COLLÈGE DE LA RETRAITE **ANNÉE 2018/2019**
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES **SÉQUENCE 4**
BACCALAURÉAT BLANC N° 1 **COEF : 7**
CLASSE : TC

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (4 pts)

A) 1- Démontrer que pour tous entiers k et r, $5^{4k+r} \equiv 5^r \ (13)$. (0,5 pt)

2- Quels sont les restes possibles de 5^n modulo 13. (0,5 pt)

3- Soit $A_n = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1, \ n \in \mathbb{N}$.
Montrer que A_n est divisible par 13 si et seulement si n n'est pas multiple de 4. (1 pt)

B) Soit M_0 le point d'affixe $2\,i$ et (M_n) la suite des points dont les affixes z_n sont donnés par $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

1) Déterminer Ω le point invariant par (M_n). (0,5 pt)

2) Exprimer $z_{n+1} + 1$ en fonction de $z_n + 1$ et donner donc la nature de (M_n). (0,75 pt)

3) Calculer ΩM_{n+1} en fonction de ΩM_n. (0,75 pt)

Exercice 2 : (6 pts)

A) Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^3 + ax + b$ a et b des réels.

1) Étudier les variations de p et dresser son tableau de variation. (1 pt)

2) On suppose a strictement négatif.

a) Démontrer que le polynôme p(x) admet une unique racine réelle si $4\,a^3 + 27\,b^2 > 0$.

b) Démontrer que le polynôme p(x) admet trois racines réelles si $4\,a^3 + 27\,b^2 < 0$.

c) Démontrer que le polynôme p(x) admet deux racines réelles distinctes α et β, que l'on déterminera, telles que $p(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$ si $4\,a^3 + 27\,b^2 = 0$. (1 pt)

B) Dans cette partie $p(x) = x^3 - 2\,x + 4$.

1) Démontrer que le polynôme p(x) admet une racine réelle. (0,75 pt)

2) Soit U et V deux nombres réels distincts.

a) Démontrer que si U et V sont des réels tels que $U^3 + V^3 = -4$ et $UV = \frac{2}{3}$ alors $U + V$ est une racine de p(x). (0,75 pt)

b) En déduire que U^3 et V^3 sont solutions de l'équation $x^2 + 4\,x + \frac{8}{27} = 0$. (1 pt)

Problème : (10 pts)

Le problème compte trois parties A, B et C indépendantes.

Partie A : (3,5 pts)

n est un entier naturel non nul, f_n la fonction définie par $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x$.

1- Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation. (0,75 pt)

2- Montrer qu'il existe un unique solution α_n de l'équation $f_n(x) = 0$.

3- Démontrer que $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e^2$ et $\ln\alpha_n = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$. (0,75 pt)

4- Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n puis déduire les variations de α_n.

5- Démontrer que (α_n) converge et calculer sa limite. (0,5 pt)

Partie B : (3 pts)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 cm.
On considère dans un repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, I $\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$, J $\left(0, \frac{3}{4}, 1\right)$ et K $\left(\frac{2}{5}, 0, 1\right)$. M et N sont les points tels que MIB et JHN soient des triangles rectangles isocèles respectivement en B et en H.
L est un point de (CD) tel que KJLI soit un parallélogramme.

1- Faire la figure. (0,5 pt)

2- Justifier que (IL) est parallèle à (JK). (0,5 pt)

3- Donner les représentations paramétriques des droites (IL) et (CD).

4- Justifier que (IL) et (AB) sont sécantes et démontrer que leur point d'intersection S a pour abscisse $\frac{17}{15}$. (0,5 pt)

5- Donner la nature du triangle ILN et calculer sa surface. (0,5 pt)

Partie C : (4 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit l'ensemble $(\mathcal{E})$ d'équation : $3(x+1)^2 + 4y^2 = 12$.

1- Caractériser $(\mathcal{E})$.

2- À chaque point $M(x, y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M.
Démontrer que $|z| = \frac{1}{2}(3 - x)$. (1 pt)

3- En déduire que $|z| = \dfrac{3}{2 + \cos\theta}$ $\qquad \theta = \arg(z)$. (1 pt)

4- Soient M' et M'' les points de $(\mathcal{E})$ ayant pour affixes z' et z'' d'arguments respectifs θ et $\theta + \pi$.
Calculer $\left\|\overrightarrow{M'M''}\right\|$ en fonction de θ. (1 pt)