UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat

Séries D

Année 2019
Session de remplacement
Epreuve du 1er tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient cinq boules blanches portant les numéros 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 4; trois boules noires portant les numéros 1 ; 3 ; 5 ; et deux boules bleues portant les numéros 6 ; 6.

On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : «Les deux boules tirées sont de même couleur». (0,25 point)
   B : «Les deux boules tirées sont de couleurs différentes». (0,25 point)
   C : «Les deux boules tirées portent le même numéro». (0,25 point)

2) On suppose que chaque boule tirée et portant un numéro impair fait gagner 50F et chaque boule tirée portant un numéro pair fait gagner 100F.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage simultané de deux boules associe la somme des gains.

   a) Quelles sont les valeurs prises par X ? (0,75 point)
   b) Déterminer la loi de probabilité de X. (1 point)
   c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X. (0,5 point)
   d) Déterminer la fonction de répartition F de X. (0,5 point)
   e) Construire la représentation graphique de F. (0,5 point)

Exercice 2 (4 points)

La production de savon (en kg) d'une association féminine est donnée dans le tableau suivant :

Rang x_i d'année	1	2	3	4	5	6	7	8
Production y_i (en kg)	15 000	16 000	18 000	20 000	21 000	24 000	26 000	28 000

1) Représenter le nuage de points associé à la serie statistique dans un repère orthonormal, prendre pour unités : abscisses : 1 cm par rang d'année, en ordonnées : 1cm pour 1000kg de production. (1 point)

2) a) Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point. (0,5 point)
   b) Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau ; puis celles du point moyen G_2 des quatre derniers points. (1 point)

3) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (G_1G_2) et la tracer. (0,5 point)
   b) On admet que (G_1G_2) réalise un ajustement du nuage de points. (0,5 point)

Déterminer par le calcul la production de cette association féminine dans sa quinzième année de fonctionnement. (0,5 point)

Problème (12 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 + \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \leqslant -1 \\ f(x) = 1 + 2xe^{-x-1} \text{ si } x > -1. \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2cm.

Partie A (5,5 points)

1) Etudier la continuité de f en -1. (0,5 point)

2) a) Etudier la dérivabilité de f en -1. (0,5 point)
   b) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu. (0,5 point)

3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats. (1 point)

4) a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la dérivée de f en x. (0,5 point)
   b) Etudier le signe de $f'(x)$. (0,5 point)
   c) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (0,5 point)

5) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0. (0,5 point)

6) Tracer la courbe (C), ses asymptotes, ses tangentes et éventuellement ses demi-tangentes. (1 point)

Partie B (4,5 points)

Soit α un réel strictement positif. On désigne par :

- $\mathcal{D}_1$ le domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$
- $\mathcal{D}_2$ le domaine plan délimité par les droites d'équations $y = 1$; $y = 0$; $x = 0$ et $x = \alpha$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $k = \int_0^{\alpha} xe^{-x-1}dx$. (0,75 point)

2) Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x-2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)$.
Calculer $h'(x)$. (0,5 point)

3) En déduire :
   a) Le volume $\mathcal{V}_1(\alpha)$ en cm^3 du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}_1$ autour de l'axe des abscisses. (1 point)
   b) Le volume $\mathcal{V}_2(\alpha)$ en cm^3 du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}_2$ autour de l'axe des abscisses. (1 point)
   c) Le volume $\mathcal{V}(\alpha)$ en cm^3 du solide obtenu par la rotation du domaine plan délimité par la courbe (C) ; l'axe des ordonnées et les droites d'équations $x = \alpha$ et $y = 1$. (1 point)

4) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{V}(\alpha)$. (0,25 point)

Partie C (2 points)

On considère la courbe parmétrée (Γ) ; ensemble des points $M(t)(x(t); y(t))$ où $x(t)$ et $y(t)$ sont donnés par le système :

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{\ln t} \\ y(t) = -1 + t - t\ln t \end{cases} \quad t \in]1; e]$$

1) Montrer que (Γ) est une partie de la courbe (C). (1 point)

2) Tracer (Γ) en pointillés sur le même repère. (1 point)

Données numériques
$e \approx 2,7$; $e^{-1} \approx 0,4$; $e^{-2} \approx 0,14$

Fin