UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO

Office du Baccalauréat

Série D

Année 2020
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = 4\dfrac{1+2u_n}{4-u_n}$ et $u_0 = -3$

1) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3. (0,75 point)
2) Montrer que la suite (u_n) est majorée par -2. (0,5 point)
3) a) Déterminer le sens de variation de (u_n). (0,5 point)
   b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier. (0,5 point)
4) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. (0,5 point)
   b) Exprimer V_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n. (0,5 point)
   c) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$ en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. (0,75 point)

Exercice 2 (4 points)

Le tableau suivant donne la distance de freinage nécessaire à une automobile circulant sur une route humide pour s'arrêter.

Vitesse de l'automobile x_i (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance de freinage y_i (en m)	18	26	40	58	76	98	120	148	180	212

On considère l'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) où $1 \leqslant i \leqslant 10$.

1) a) Construire le nuage de points M_i (1,5 cm représentera 20 km/h en abscisses et 1,5 cm représentera 50 m en ordonnées). (1 point)
   b) Un ajustement affine de ce nuage semble-t-il raisonnable ? Justifier la réponse. (0,5 point)
2) a) Construire la droite (Δ) d'ajustement affine obtenue par la méthode de Mayer. On prendra pour premier sous nuage les cinq premiers points et pour deuxième sous nuage les cinq derniers points. (1 point)
   b) Déterminer une équation de (Δ) sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont des réels à préciser. (0,5 point)
3) En utilisant l'équation de (Δ) estimer :
   a) La distance de freinage pour une vitesse de l'automobile de 150 km/h. (0,5 point)
   b) La vitesse de l'automobile pour une distance de freinage de 250 m. (0,5 point)

Problème (12 points)

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 2(x-1)\ln(1-x) \text{ si } x < 1 \\ f(x) = (x-2)e^{-x+1} + 1 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 2 cm.

Partie A **(6 points)**

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en$-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ? (0,75 point)

2) Etudier la continuité de f en 1. (0,75 point)

3) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats. (2 points)

4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (2 points)

5) Montrer que l'équation(E) : $f(x) = -2$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[-1; \frac{-1}{2}\right]$. (0,5 point)

Partie B **(2 points)**

1) Déterminer les réels α, β, γ tels que pour tout $x < 1$, $\frac{x^2 - 2x}{x-1} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$. (1 point)

2) Par une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_0^{1-\frac{1}{e}} (x-1)\ln(1-x)dx$. (0,75 point)

3) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1 - \frac{1}{e}$. (0,25 point)

Partie C **(4 points)**

1) a) Montrer que l'équation (E) équivaut à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ par $h(x) = 1 - e^{\frac{1}{1-x}}$. (0,5 point)

b) On pose $I = [-1, \frac{-1}{2}]$, montrer que pour x appartenant à I, $h(x)$ appartient à I. (1 point)

c) Montrer que pour tout x appartenant à I, $|h'(x)| \leqslant \frac{7}{8}$. (1 point)

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = h(u_n),\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$. (0,25 point)

b) En utilisant l'inégalité de la moyenne, montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{7}{8}|u_n - \alpha|$. (0,5 point)

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$. (0,5 point)

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite. (0,25 point)

On donne : $\frac{2}{e} \simeq 0,73$; $\frac{1}{e^2} \simeq 0,13$; $\ln 2 \simeq 0,69$; $\ln\frac{3}{2} \simeq 0,40$; $e^{\frac{2}{3}} \simeq 1,947$; $e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,648$

Fin