MINESEC	Thèmes	samedi 16 Avril 2016
CITY BILINGUAL ACADEMY	Arihtmétiq.Suites	Classe : $T^{le}C$
Département de Mathématiques	Proba.equa.diff	Séquence n°5
examinateur : M.Ulrich TCHEUKO	coniq.fonctions.	Durée : 04h00 Coef :5

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE I 3,5 pts

1. Calculer $PGCD(2688; 3024)$. **0,25pt**
2. On donne l'équation (E) : $8x + 9y = -10$.
   a. Vérifier que $(1; -2)$ est solution de (E). **0,25pt**
   b. Résoudre l'équation (E) **0,5pt**
3. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthogonal de l'espace.
   $(S) : x + 2y - z + 2 = 0$ et $(p) : 3x - y + 5z = 0$ deux plans.
   a. Montrer que (S) et (p) sont sécants suivant une droite (D). **0,75pt**
   b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (E). **0,75pt**
   c. En déduire l'ensemble (F) des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs. **1pt**

EXERCICE II 3,5pts

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et une pièce dont on distingue les cotés Piles (P) et face (F). A chaque lancé on associe le nombre complexe : $z = pe^{\frac{in\pi}{6}}$

On note M le point d'affixe z et y son ordonnée

1. déterminer l'ensemble des points M que l'on peut obtenir(pour $p = 1$ et pour $p = 2$) **1pt**
2. calculer la probabilité des événements $p = 1$ et $p = 2$ **1,5pt**
3. on répète trois fois l'épreuve , les répétions étant indépendantes quelle est la probabilité d'obtenir au moins un point M tel que $y + 1$ **1pt**

EXERCICE III 4 pts

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal (O, I, J).Unité graphique $2cm$ Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$$

1. a. Déterminer l'écriture complexe de f. **0,5pt**
   b. En déduire que f est une similitude directe plane dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle. **0,5pt**
2. Soit (G) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et (G') son image par f.
   a. Déterminer une équation cartésienne de (G') **0,75pt**
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (G') **0,75pt**
   c. En déduire que (G) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. **0,75pt**
3. Construire (G') et (G) dans le plan. **0,75pt**

PROBLÈME 9 pts

Partie A :

Soit n un entier naturel. On considère l'équation différentielle $(E_n) : y' + y = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$

1. Soient g et h deux fonctions définies et derivable sur $\mathbb{R}$ telles que $g(x) = h(x)e^{-x}$.
   a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ **0,5pt**
   b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n) sachant que $h(0) = 0$. **0,5pt**
   c. Quelle est alors la fonction g ? **0,25pt**
2. Soit ϕ une fonction derivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Montrer que ϕ est solution de (E_n) si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation différentielle $(F) : y' + y = 0$. **1pt**
   b. Résoudre (F) et déterminer la solution générale ϕ de (E_n) **0,5pt**
   c. Déterminer la solution f de (E_n) vérifiant $f(0) = 0$. **0,5pt**

Partie B :

Le but de cette partie est de montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = e$

1. On pose pour tout réel x, $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$.
   a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.
   Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n comme solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$. **0,5pt**
   b. Montrer par récurrence (Utiliser la partie A) que
   $\forall^{x}_{\mathbb{R}}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ **0,5pt**
2. Pour tout entier $n \geq 0$, On pose $I_n = \int\limits_0^1 f_n(x)dx$.
   a. Montrer que pour tout entier n et pour tout réel $x \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n!}$ **0,5pt**
   b. En déduire que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$ puis déterminer la limite de (I_n) **0,75pt**
   c. Montrer que pour tout entier naturel k, $I_k - I_{k-1} = \dfrac{1}{k!e^{-1}}$ **0,75pt**
   d. Calculer I_0 et en déduire que $I_n = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{e^{-1}}{k!}$ **0,75pt**
   e. Conclure la partie B **0,5pt**

Partie C :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$. **0,25pt**
2. Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$, où f' désigne la dérivée de f
   a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = cosx$. Vérifier que g est un élément de E. **0,25pt**
   b. Soit f un élément de E.
   Vérifier que pour tout réel x, $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$. **0,5pt**
   c. En déduire que si f est un élément de E, alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. **0,5pt**
   d. Déterminer alors l'ensemble E. **0,5pt**

"PRIÈRE ET TRAVAIL, TRAVAIL ET PRIÈRE"