



Vous êtes peut-être un mathématicien si Vous prouvez votre innocence lors d'un interrogatoire en commençant par « Supposez en effet que je sois coupable..... », point à partir du quel vous êtes arrêté,

EXERCICE 1: [3, 75 points]



I- 1) Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$ puis en déduire la solution du système :

$$\begin{cases} 2\ln(x) + \ln(y) = 1 \\ 5\ln(x) + 3\ln(y) = 4 \end{cases} \quad [2 \text{ pts}]$$

II- Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 0 [$ par $g(x) = \frac{x^2 - x + 4}{-x}$.

- Déterminer les réels a, b et c tels que $g(x) = ax + b - \frac{c}{x}$. [0, 75pt]
- Montrer que la fonction g admet des primitives sur l'intervalle $] -\infty; 0 [$; En déduire la primitive G de g sur $] -\infty; 0 [$ qui s'annule en 2. [1pt]

EXERCICE 2: [6 points]

2) Soit (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer U_1 et U_2 [1pt]

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 3$. [1pt]

3) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ [1pt]

b) Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n . [1pt]

c) Calculer la limite de la suite (U_n) . [1pt]

4) On considère la suite (W_n) définie par : $W_n = \frac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n W_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = 1 - V_n$. [0, 5pt]

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$. [1pt]

c) Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$ [0, 5pt]

PROBLEME: [10 points]



Le problème comporte deux parties indépendantes A et B

Partie A : [4 points]

Pour chaque question de cet exercice quatre réponses vous sont proposées, mais une seule est juste. Relever sur votre feuille de composition: le numéro de la question suivi de la lettre correspondante à la réponse juste.

- 1) L'ensemble de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \ln(-2x + 6)$ est :
a) $[3; +\infty[$; b) $] -\infty; 3]$; c) $] -\infty; 3[$; d) $]3; +\infty[$
- 2) Le nombre réel $e^{2\ln 3}$ est égal à :
a) $2\ln 3$; b) 9 ; c) $\sqrt{3}$; d) $\ln 3$
- 3) Une primitive H de la fonction h définie sur l'intervalle $] -\frac{1}{2}; +\infty[$ par $h(x) = \frac{4}{2x + 6}$ est définie pour tout x de $] -\frac{1}{2}; +\infty[$ par :
a) $H(x) = 2\ln(2x + 6)$; b) $H(x) = \ln(2x + 6)$; c) $H(x) = [\ln(2x + 6)]^2$; d) $H(x) = \frac{1}{2}\ln(2x + 6)$
- 4) Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative (C_q) de la fonction q définie par : $q(x) = \frac{x-1}{x-2}$ est :
a) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$; b) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$; c) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$; d) $y = \frac{-1}{2}x - \frac{1}{2}$

Partie B : [6 points]

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
 2. (a) Calculer les limites aux bornes de D_f .
(b) En déduire que (C_f) admet deux asymptote verticales dont on précisera les équations.
 3. (a) Calculer la dérivée f' de f . En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
(b) en déduire que (C_f) admet deux extrémums en justifiant votre réponse. Préciser tout en justifiant votre réponse si ces extrémums sont des maximums ou des minimums.
 4. Déterminer les équations des tangentes à (C_f) aux points d'abscisses respectives $x_0 = -\frac{1}{2}$ et $x_0 = 1$.
 5. Tracer les asymptotes, les tangentes puis construire la courbe (C_f) .
 6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 0$
- Examineur : Alex Manga « La colère du cafard augmente l'appétit de la poule »