



**Exercice 1 : Sur les équations dans  $\mathbb{C}$ .**

A) Dans cet exercice,  $\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes et  $\text{Re}(z)$  la partie réelle du complexe  $z$ .  
On note  $p(z) = z^3 - (6 + 5i)z^2 + (3 + 20i)z + 10 - 15i$ .

- 1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $w = -2i$ . 1 pt
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0$ . 0,75 pt
- 3)a) Montrer que  $3 + 2i$  est racine de  $p(z)$ . 0,5 pt  
Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $p(z) = (az^2 + bz + c)(z - (3 + 2i))$  1,5 pt
- b) Dédire dans l'ensemble  $\mathbb{C}$ , les solutions de l'équation (E) :  $z^3 - (6 + 5i)z^2 + (3 + 20i)z + 10 - 15i = 0$ . 0,75 pt
- On notera  $z_1, z_2, z_3$  les trois solutions de (E) telles que :  $\text{Re}(z_1) < \text{Re}(z_2) < \text{Re}(z_3)$
- c) Calculer les distances AB, BC et AC. Quelle est alors la nature du triangle ABC. ? 1,5 pt

**Exercice 2 : Sur les nombres complexes, les configurations géométriques et la trigonométrie**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

On considère les points A, B, C d'affixes respectives  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_B = -1 - i$  et  $z_C = (2 + \sqrt{3}) + i$ .

- 1) Calculer le rapport  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ . En déduire la nature du triangle ABC ? 1,5 pt
- 2)a) Ecrire  $z_A, z_B$  et  $\frac{z_A}{z_B}$  sous forme trigonométrique. 1,5 pt
- b) Ecrire  $\frac{z_A}{z_B}$  sous forme algébrique. 1 pt
- c) En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ . 1 pt

**Exercice 3 : Sur les nombres complexes et les lieux géométriques**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

On considère pour tout complexe  $z = x + iy$  différent de 1, avec  $x$  et  $y$  réels, le nombre complexe  $Z$  tel que  $z' = \frac{z-1}{z-1}$ .

On note M le point d'affixe  $z$  et M' le point d'affixe  $z'$ .

- 1) Calculer  $|z'|$ . Donner une interprétation géométrique du résultat de ce calcul. 1,5 pt
- 2) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z'$  en fonction de  $x$  et  $y$ . 1,5 pt
- 3) Donner et construire l'ensemble des points M pour lesquels  $z'$  est un réel. 1,5 pt

**Exercice 4 : Linéarisation**

Linéariser les expressions :

- a)  $\cos^4(4x)$  b)  $\sin^2(3x)\cos(2x)$  2,5 pts

**Exercice 5 : Utilisation des formules d'Euler**

Soit  $\theta$  élément de l'intervalle  $]0, \pi[$ .

- Montrer que : a)  $1 - \cos\theta - i\sin\theta = \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\pi+\theta}{2}}$  b)  $1 + \cos\theta + i\sin\theta = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ . 2,5 pts