	MINESEC - COLLÈGE BILINGUE NOTRE REINE DE LOURDES Année scolaire 2019-2020			
	Département	Examen	Classe	Date
	MATHEMATIQUES	SEQUENCE 4	Tc	/02/2020
	Durée	Coefficient	Visa de l'AP	Visa de PE
	4H	5		

Exercice 1 : 4,25pts

I. Soit n un entier supérieur ou égal à 3

1. Montrer que 4^n–1 est divisible par 3 ; puis que 4^n–1= (2^n+1) (2^n–1) [0.5pt]
2. Démontrer que si 2^n+1 est un nombre premier, alors 2^n–1 n'est pas un nombre premier. [0.5 pt]

II. Soient A et B deux points distincts de l'espace, I le milieu de [AB] .

1. Montrer que pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB}$. [0.25 pt]
2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\| = MI\times AB$. [0,5 pt]
3. L'espace étant muni d'un repère orthogonal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On suppose $A\,(-\frac{1}{2},0,0)$; $B\,(\frac{1}{2},0,0)$.
   Soient F (0,1,0) et $M(x,y,z)$ deux points de l'espace.

a)Déterminer le point M_0 tel que $\overrightarrow{M_0A}\wedge\overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0F}$. [0.25 pt]

b) Déduire l'équation cartésienne du plan (ABM_0) [0.25 pt]

III. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$; ABCD est un tétraèdre tel que AB=AC=AD=a. ABD , ABC et ACD sont des triangles rectangles en A.

1. Quelle est la nature du triangle BCD? [0.25 pt]
2. a)Soit H le centre de gravité de BCD. Justifier que (AH) est orthogonal au plan (BCD) [0.25 pt]

b) Calculer le volume V du tétraèdre ABCD ; puis l'aire S du triangle BCD. [1 pt]

c) Exprimer AH en fonction de V et S et en déduire que AH= $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ [0,5 pt]

Exercice 2 : 4,75 pts

I. On appelle f et g deux fonctions définies sur [0 +∞[par $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = ln\,(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

1) Etudier les variations de f et de g sur [0 +∞[[1 pt]
2) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq ln\,(1+x) \leq x$ [0,5pt]

II. On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n\,(1+\frac{1}{2^{n+1}})$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. [0,25pt]
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n≥ 1 , $ln\,u_n = ln\,(1+\frac{1}{2}) + ln\,(1+\frac{1}{2^2}) + \ldots + ln\,(1+\frac{1}{2^n})$ [0,5pt]
3. On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$
   A l'aide de la partie A, montrer que $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$ [0,5pt]
4. Calculer S_n et T_n en fonction de n, En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} T_n$. [1pt]
5. Etude de la convergence de la suite (u_n)
   a)Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante. [0,25pt]
   b) En déduire que (u_n) est convergente. Soit l sa limite. [0,25pt]
   c)On admet le résultat suivant :Si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n \leq \lim_{n\to+\infty} w_n$ .Montrer alors que $\frac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$ et en déduire un encadrement de l. [0,5pt]

Exercice 3 : 2,5pts Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tous réels x et y, $z = x + i\,y$ est l'affixe du point M de coordonnée (x, y), c'est aussi celle du vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

A est le point d'affixe $2i$, (D) la droite d'équation $y=0$. f est la fonction complexe de la variable complexe z qui à tout z non réel associe : $z'=\dfrac{z-2i}{z-\bar{z}}$. f associe à tout point M de (P)\(D) d'affixe z le point M' d'affixe z'.

1) Exprimer les parties réelles et imaginaire de z' en fonction de celles de z. [0,5pt]

2) B est le point d'affixe $\frac{1}{2}$. Quelles sont les images respectives par f des demi-droites ouvertes d'origine O portées par l'axe imaginaire, l'axe imaginaire étant l'ensemble des points d'abscisse nulle. [0,5pt]

3) Quelle est l'affixe du projeté orthogonal H sur (D) du point M d'affixe z ? [0,5pt]

Quelle est celle de $\overrightarrow{HM}$? [0,25pt]

4) Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)|=\frac{1}{2}$ est une parabole dont vous préciserez le foyer et la directrice. [0,75pt]

Problème [9.5pts] Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Partie A : [1.75pts]

Soit g_n la fonction définie par $g_n(x)=n(x+1)+e^x$

1) Dresser le tableau de variation de g_n [0.5pt]

2) Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α_n [0.5pt]

3) Montrer que α_n vérifie $-2<\alpha_n<-1$ [0.25pt]

4) Déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x [0.5pt]

Partie B : [4.5pts]

On considère la fonction f_n définie par $f_n(x)=\frac{xe^x}{n+e^x}$ On note (C_n) sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}(f_n(x)-x)$, puis déduire que (C_n) admet deux asymptotes que l'on précisera. [1pt]

2) Montrer que pour tout réel x, $f_n'(x)=\frac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}$ [0.5pt]

3) Montrer que $f_n(\alpha_n)=1+\alpha_n$ [0.5pt]

4) Dresser le tableau de variation de f_n [0.5pt]

5) a) Donner les positions relatives entre (C_n) et la droite (D) d'équation $y=x$ [0.5pt]

b) Déterminer les positions relatives entre (C_n) et (C_{n+1}) [0.5pt]

c) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère. (unités sur les axes 2cm) Prendre $\alpha_1=-1.4$ et $\alpha_2=-1.4$ [1pt]

Partie C : [3.25pts]

On pose $I=\int_{-1}^{0} xe^x dx$ et $U_n=\int_{-1}^{0} f_n(x)dx$

1) Calculer I [0.5pt]

2) Montrer que $\forall x\in[-1,0]$, $\frac{xe^x}{n}\le\frac{xe^x}{n+e^x}\le\frac{xe^x}{n+1}$ [0.5pt]

3) Déduire que (U_n) est une suite convergente. [0.5pt]

4) On pose $V_n=\sum_{k=1}^{n} U_k$, Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{t}dt\le\frac{1}{k+1}$ [0.5pt]

5) Déduire que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\ge\ln(n+2)-\ln 2$ [0.75pt]

6) Montrer alors que $\lim_{x\to+\infty} V_n=-\infty$ [0.5pt]