Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat Session : 2009
Série : C et E
Épreuve : MATHÉMATIQUES
Durée : 4 h Coefficient : 5 (C) ; 4 (E)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.

EXERCICE 1 (Série E uniquement) (4 points)

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points : $A(-4, 6, -1)$, $B(1, 2, 2)$ et $C(-1, 4, 3)$.

1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. **0,5 pt**
b) Calculer l'aire du triangle ABC. **0,5 pt**

2. Écrire une équation cartésienne du plan (ABC). **1 pt**

3. Soit I le milieu de $[AC]$ et $D = S_I(B)$ où S_I désigne la symétrie de centre I.
a) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires. **1 pt**
b) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$ puis calculer son aire. **1 pt**

EXERCICE 1 (Série C uniquement) (4 points)

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de p^4 où p est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer S en fonction de p. **0,5 pt**

2. Démontrer que $\left(2p^2 + p\right)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$ **1 pt**

3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où n est un entier naturel.
a) Établir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. **0,5 pt**
*(On pourra utiliser la question **2.**)*
b) Exprimer n en fonction de p. **0,5 pt**
c) Établir que p vérifie la relation $3 + 2p - p^2 = 0$. *(On utilisera le fait que $4S = 4n^2$)* **1 pt**
d) Déduire, de **3. c)**, p et puis n. **0,5 pt**

EXERCICE 2 (4 points)

Un dé cubique pipé est tel que : deux faces sont marquées 2, trois faces sont marquées 4 et une face est marquée 6.
La probabilité p_i d'apparition de la face marquée i est proportionnelle au nombre i.

1. Calculer les nombres p_2, p_4 et p_6. **1,5 pt**

2. On suppose dans la suite que $p_2 = 1/6$, $p_4 = 1/3$ et $p_6 = 1/2$.
On lance deux fois de suite le dé précédent, on note i le résultat du premier lancer et j le résultat du deuxième lancer. On définit la variable aléatoire X qui au couple (i, j) associe le nombre $i - j$.
a) Déterminer l'univers-image de X. **1 pt**
b) Déterminer la loi de probabilité de X. **1,5 pt**

PROBLÈME : 12 points

Le problème comprend trois parties A, B et C obligatoires. La partie C est indépendante.

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1. a) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variations de f. **0,75 pt**
b) Étudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à sa tangente (T_0) en O. **0,75 pt**

c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$. **0,5 pt**

2. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. **0,5 pt**

b) Soit g la bijection réciproque de f et $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative.

Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. **0,5 pt**

3. Construire dans le même graphique les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$. **1,5 pt**

(On prendra 2 cm comme unité sur les axes de coordonnées)

4. Pour tout entier naturel n strictement positif, on définit la suite numérique (U_n) par :

$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]\,\mathrm{d}x.$$

a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$U_n = \frac{2n-1}{n}\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}.$$ **1 pt**

b) Calculer la limite de la suite (U_n) et interpréter graphiquement le résultat. **0,75 pt**

Partie B

5. Soit S la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) : y = x$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. On pose : $\varphi = T \circ S$.

a) Donner la nature de l'application φ. **0,5 pt**

b) Construire l'image par φ de la courbe $(\mathscr{C}_f)$. **0,75 pt**

6. On considère les vecteurs $\vec{e_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{e_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, la droite $(\Delta') : x - y - 1 = 0$ et S' la symétrie orthogonale d'axe (Δ').

a) Vérifier que le triplet $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ forme un repère orthogonal du plan. **0,25 pt**

b) Montrer que, dans la base $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$, où $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont des vecteurs colinéaires respectivement à $\vec{e_1}$ et à $\vec{e_2}$ que l'on précisera. **0,5 pt**

EPREUVESEXAMENS

c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) et sur (Δ').

Montrer que $\vec{V_2} = 2\overrightarrow{HH'}$. En déduire que $T = T_1 \circ S' \circ S$, où T_1 est une translation dont on donnera le vecteur. **1 pt**

d) Montrer que $\varphi = T_1 \circ S'$. **0,25 pt**

Partie C

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $x = 2$. Les points M et F du plan $(\mathscr{P})$ ont pour affixes respectives z et $1 - \mathrm{i}$.

1. Exprimer, en fonction de z, la distance de M à la droite $(\mathscr{D})$. **0,5 pt**

2. On suppose que $z + \bar{z} - 4 \neq 0$.

Pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation (E_m) suivante : $|z - 1 + \mathrm{i}| - m|z + \bar{z} - 4| = 0$.

a) Déterminer, suivant les valeurs de m, la nature de (Γ_m). **1 pt**

b) Pour $m = 1$, donner les éléments caractéristiques de (Γ_1). **1 pt**