

BACCALAUREAT BLANC / EPREUVE DE MATHÉMATIQUES/ MAI 2019

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.



Exercice 1 : [4,75 points]

On pose $a = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6})$; $b = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4})$; $c = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3})$

A) 1. Exprimer a^6 , b^6 et c^6 sous forme algébrique. 0,25 pt x 3

2. En déduire une solution de l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^6 = -8i$. 0,25pt.

3. Soit $j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a. Vérifier que $j^3 = 1$. 0,25 pt

b. Démontrer que jb et j^2b sont aussi solution de (E). 0,5 pt

c. En déduire toutes les solutions de (E). 0,75 pt

B) 1. Résoudre dans \mathbb{Z} le système : $\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 2[4] \end{cases}$ 0,75 pt

2. Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant à la fois les deux propositions suivantes :

- a^n est un nombre réel ;

- b^n est un imaginaire pur. 1,5 pt

Exercice 2 : [4,25 points]

A) On considère trois urnes U, V et W contenant chacune des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. La probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est $P_1 = 0,4$; celle de tirer 1 de V est $P_2 = 0,5$ et enfin celle de tirer 1 de W est $P_3 = 0,7$.

On tire une boule de U, une boule de V et une autre de W. Soient a, b et c les numéros respectifs de ces boules. Soit (Q) le plan d'équation $ax + by + cz + 6 = 0$, et soit (E) la conique d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - (-1)^c \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calculer la probabilité pour que :

1. (Q) soit parallèle au plan (P) : $x + 2y + z - 4 = 0$; 0,5 pt

2. (Q) contienne le point M(0, -2, -4) ; 0,5 pt

3. (E) soit une ellipse ; 0,5 pt

4. (E) soit une hyperbole équilatère. 0,5 pt

B) Un jeu consiste à tirer une boule de chaque urne :

- Dans U, une boule n°1 tirée fait gagner 40 F tandis que la boule n°2 fait perdre 60 F ;

- Dans V, une boule n°1 tirée fait gagner 50 F tandis que la boule n°2 fait perdre 50 F ;

- Dans W, une boule n°1 tirée fait gagner 70 F tandis que la boule n°2 fait perdre 30 F ;

1. Quels sont les sommes possibles qu'un joueur peut avoir à l'issue de ce jeu ? 0,5 pt

2. On appelle X la variable aléatoire réelle donnant la somme eu par un joueur après les tirages.

a. Définir la loi de probabilités de X. 1 pt

b. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ? 0,75 pt

Problème : [11 points]



Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : E désigne un espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f

l'endomorphisme de E défini par $f(\vec{i}) = \vec{i}$, $f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$. On note $\text{Ker } f$ le noyau de f et

$\text{Im } f$ l'image de E par f .

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$. 0,5 pt
2. Déterminer une base de $\text{Im } f$. 0,5 pt
3. Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\text{Ker } f$ et d'un vecteur de $\text{Im } f$. 0,5 pt

Partie B : Le plan (\mathcal{P}) est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. Unité graphique 2cm. Soit g la transformation du plan qui à tout $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel

$$\text{que : } \begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$$

- 1) a. Déterminer l'écriture complexe de g . 0,5 pt
- b. En déduire que g est une similitude directe plane dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle. 0,75 pt

2) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et (Γ')

Son image par g .

- a. Déterminer une équation cartésienne de (Γ') . 0,75 pt
- b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ') . 0,75 pt
- c. En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. 0,75 pt

Partie C : On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$, étudier le signe de sa fonction dérivée f' , sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations. 1,75 pt

2) On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

- a. Justifier que si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. 0,5 pt
- b. Montrer sans chercher à calculer u_n , que, pour tout entier n , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. 0,5 pt

3) Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.

- a. Justifier la dérivabilité sur $[0; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x , le nombre $F'(x)$. 0,5 pt
- b. On pose, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^n f(x) dx$. Calculer I_n . 0,5 pt

4) On pose pour tout entier naturel n , $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$.

Calculer S_n . La suite (S_n) est-elle convergente ? 0,75 pt