MINESEC
DELEGATION REGIONALE DE L'EXTREME-NORD
INSPECTION REGIONALE CHARGEE DE L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES
SOUS SECTION MATHEMATIQUES
EVALUATION HARMONISEE REGIONALE DE FIN DU 1er TRIMESTRE

Année scolaire 2019 - 2020
Classe : Tle D & TI
Coefficient : 04
Durée : 4h

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.
Les pages sont numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

EXERCICE 1 : 04,5 points

I/ On considère le système suivant : $(S):\begin{cases} a+b+c=100 \\ 3a-2b-7c=0 \\ 6a-5b-11C=0. \end{cases}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) .. **1pt**
2. Un homme, sa femme et leur enfant ont au total 100 ans. Dans n années, l'homme aura la somme des âges de sa femme et de l'enfant. Il y a n années, la femme avait le quadruple de l'âge de l'enfant et l'homme était 6 fois plus âgé que l'enfant.

a) Donne une interprétation mathématique de ce problème. **1pt**
b) En déduire les âges actuels des trois personnes. **0,75pt**

II/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{5x-1}}{x-2} & pour\ tout\ x>2 \\ \frac{x^3-5x^2+10x-8}{4-x^2} & pour\ tout\ x<2 \end{cases}$

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **0,25pt**
2) Calculer les limites de f en 2 par valeurs positives et par valeurs négatives. **1pt**
3) Dire en justifiant si l'on peut prolonger f par continuité en 2.
4) Si oui préciser ce prolongement. **0,5pt**

EXERCICE 2 : 05 points

A /

1. Calculer $(1-i)^6$ puis en déduire les racines sixièmes du nombre complexe $8i$. **0,75pt**
2. En déduire de ce qui précède, la valeur exacte de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$. **0,5pt**

B / Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4cm.
Soit P, Q et K les points d'affixes respectives $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et -1.

1. Montrer que les points P, Q et K appartiennent au cercle (ζ) de centre O et de rayon 1. **0,75pt**
2. Placer les points P, Q et K dans le repère et en déduire la nature du triangle PQK. **0,5pt**
3. Déterminer et représenter l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que $|z|=|z+1|$. **0,5pt**
4. Montrer que P et Q sont les points d'intersections du cercle (ζ) et (D). **0,5pt**

C / Soit a un paramètre réel.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante: $z^2-(1+i)(1+a)z+i(1+a^2)=0$.

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $\delta^2=-2i(1-a)^2$. **0,5pt**
b. En déduire les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E). **1pt**

PROBLEME : 10,5 points

Le problème comporte deux parties A et B toutes indépendantes.

PARTIE A : 04 points

On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

1) Etudier les variations de la fonction h. **1pt**
2) Sans résoudre h montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution α appartenant à $[1; 2]$. **1pt**
3) Montrer que $|h'(x)| \leq \frac{1}{4}$ sur $[1; 2]$ **0,75pt**
4) En déduire que $|h(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$. **0,5pt**
5) Montrer que le point $\Omega(-1; 1)$ est le centre de symétrie à la courbe représentative de la fonction h dans un repère (O; I, J). **0,75pt**

PARTIE B : 06,5 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + x\sqrt{-x} & si\ x \leq 0 \\ \frac{1-x}{1+x^3} & si\ x > 0 \end{cases}$

1)
   a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f. **0,5pt**
   b. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0; puis donner une interprétation du résultat. **1,5pt**
   c. Calculer les limites aux bornes de D_f et déterminer les branches infinies éventuels de (Cf), la courbe de f. **1pt**

2) Calculer $f'(x)$? puis dresser le tableau de variation de f. **0,75pt**
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0]$, et g^{-1} sa réciproque.
   a. Montrer que g^{-1} existe sur un intervalle K à déterminer. **0,5pt**
   b. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}. **0,25pt**
   c. Déterminer l'expression de g^{-1}. **0,75pt**
5) Représenter la courbe de (Cf) et celle de g^{-1}dans un repère (O; I, J). **0,75pt**
6) Trouver une primitive F de f sur $]-\infty; 0]$ qui prend la valeur 3 en -27. **0,5pt**