

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : 3.5 points

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe, On suppose que

$Mes(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{7}$, donner la plus petite valeur strictement positive de l'entier naturel n pour laquelle z^n est un réel. 1pt

2. On considère les nombres complexes $A = \frac{2+3i}{1-i}$ et $B = \frac{2+3i}{1-i} + \frac{2-3i}{1+i}$.



a) Mettre A sous la forme algébrique. 0.75pt

b) En déduire que B est un nombre réel (On précisera sa valeur). 0.75pt

3. Soit θ un nombre réel tel que $\pi < \theta < 2\pi$. Déterminer en fonction de θ le module et un argument du nombre complexe $u = i\cos\theta + \sin\theta$. 1pt

Exercice 2 6.5 points

A. Soit A, B, C et m quatre entiers relatifs non nuls.

Démontrer que si m divise AB et C et $PGCD(A, C) = 1$ alors m divise B (on pourra se servir du théorème de Bézout) 1pt

B. Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. 0.75pt

2. On pose $\alpha = n + 3$, $\beta = 2n + 1$, on désigne par δ le PGCD de α et β .

a) Donner les valeurs possibles de δ . 0.75pt

b) Démontrer que : α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5. 1pt

3. On considère : $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $b = 2n^2 - n - 1$.

Montrer, après factorisation que $(n - 1)$ divise a et b 0.5pt

4. On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $2n + 1$.

a) Montrer que δ divise d , puis que $\delta = d$ 1.5pt

b) En déduire le PGCD, Δ , de a et b en fonction de n dans le cas où n est multiple de 5 1pt

Exercice 3 : 10points

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\sum_{k=1}^n k(n-k)(n+k) = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}. \quad 1.5pt$$

2) Déterminer les entiers naturels n tels que le quotient $\frac{2n+1}{n-3}$ soit un nombre premier. 1pt.

3) Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que le nombre $A = \overline{2x3y}$ dans le système décimal soit divisible 28. 1.5pt

4) Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que $\overline{100010001}^b$ est divisible par $\overline{10101}^b$ (on pourra développer $(b^4 + b^2 + 1)(b^4 - b^2 + 1)$ et poser $w = b - 1$; on précisera le quotient en base b). 1.5pt

5) a) Démontrer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que 20 et 47 sont premiers entre eux. 1pt

b) En déduire les entiers relatifs u et v tels que $47u + 20v = 1$. 1pt

c) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 , l'équation $47x - 20y = 3$. 1.5pt

d) Un nombre B a pour reste 2 dans la division euclidienne par 47, a pour reste 5 dans la division euclidienne par 20. Quel est son reste dans la division euclidienne par 940. 1pt