**Ministère des enseignements secondaires**
**Lycée bilingue SIN de Foumban**
**Département de mathématiques**

**Examen:** Séquence 4. **Session:** Février 2019.
**Classe:** Tle C. **Durée:** 4 heures. **Coeff:** 5.
**Par: EFOUBA E. R. et NJIEMESSA M.**

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*L'épreuve comporte trois exercices et un problème à trois parties.*
*La qualité de la rédaction et les soins apportés lors de la construction des figures et des courbes seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.*

## Exercice 1: /4 points

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé du plan complexe. $f$ et $g$ sont deux applications du plan dans lui même telles que $g(M)$ est le milieu de $[Mf(M)]$.

1. Montrer que si $f$ est une symétrie centrale alors $g$ est une application constante. [0,25pt]
2. On suppose que $f$ est une isométrie d'écriture complexe de forme:
   $z' = az + b$ avec $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
   (a) Déterminer l'écriture complexe de $g$. [0,5pt]
   (b) Démontrer que $g$ est une isométrie si et seulement si $f$ est une translation. [0,5pt]
3. On suppose que $f$ a pour écriture complexe $z' = iz - 4$.
   Déterminer la nature exacte et les éléments caractéristiques de $f$ et $g$. [1,5pt]
4. On suppose que $f$ est la projection orthogonale sur l'axe des abscisses.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{f(M)g(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{f(M)M}$ [0,25pt]
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $g$. [1pt]

## Exercice 2: /3 points



E est un espace vectoriel réel dont une base est $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $h$ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ associe le vecteur $h(\vec{u}) = (-x-y+2z)\vec{i}+(2x-y+z)\vec{j}+(x+y-2z)\vec{k}$.

1. Déterminer le noyau de $f$ et donner une éventuelle base. [0,5pt]
2. En déduire que $Imf$ est un plan vectoriel. [0,5pt]
3. On pose $\vec{e_1} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{e_2} = 5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E $t$ tel que $t(\vec{e_1}) = \vec{e_2}$, $t(\vec{e_2}) = \vec{e_1}$ et $t(\vec{i}) = \vec{k}$. [1pt]
   (b) Écrire la matrice de $t$ dans la base $B$. [1pt]

## Exercice 3: /3 points

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $31x - 14y = 3$. [0,75pt]
   (b) En déduire les solutions $(x; y)$ de (E) tels que $x$ et $y$ sont étrangers. [0,75pt]
2. Énoncer le théorème de Bézout. [0,25pt]
3. (a) Montrer que $pgcd(a^2; b^2) = 1$ si et seulement si $pgcd(a; b) = 1$. [0,5pt]
   (b) En déduire d'une manière générale que $pgcd(a^2; b^2) = [pgcd(a; b)]^2$. [0,5pt]
   (c) Montrer, pour tout entier naturel $n$, que $(n+1)^2$ et $n^2$ sont premiers entre eux. [0,25pt]

**Problème:** **/10 points**

***La partie C du problème est indépendante des parties A et B.***

**Partie A:** **/2,25 points**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions numériques définies par $u(x) = ln(x+1)$ et $v(x) = \dfrac{-x}{x+1}$ pour tout $x \in ]-1;+\infty[$.

1. Sans étudier les variations de $u$ et $v$, construire, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, I, J)$ d'unité un centimètre, les courbes $(C_u)$ et $(C_v)$ représentatives des fonctions $u$ et $v$ respectivement. [1pt]
2. En déduire le signe de $u - v$ sur $]-1;0[$ puis sur $[0;+\infty[$. [0,5pt]
3. On pose $g(x) = u(x) - v(x)$.
   (a) Déduire des courbes $(C_u)$ et $(C_v)$ l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$. [0,5pt]
   (b) Donner le signe de $g$. [0,25pt]

**Partie B:** **/3,75 points**

$f$ est la fonction numérique définie par $\begin{cases} f(x) = xln(x+1) \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ si } x < 0. \end{cases}$

1. Calculer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$. [0,5pt]
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ au point d'abscisse $x_0 = 0$. [1pt]
3. (a) Démontrer que $\forall x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = g(x)$. [0,25pt]
   (b) Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty;0[$. [0,5pt]
   (c) Dresser le tableau de variations de $f$. [1pt]
   (d) Étudier les branches infinies à la courbe $(C_f)$ représentative de $f$. [0,5pt]



**Partie C:** **/4 points**

$n$ est un nombre entier naturel. $(I_n)$ et $(J_n)$ sont deux suites définies par des intégrales comme suit: $I_n = \int_0^\pi e^{nt}cos^2tdt$ et $J_n = \int_0^\pi e^{nt}sin^2tdt$.

1. Calculer $I_0$ et $J_0$. [0,5pt]
2. Calculer $I_n + J_n$ en fonction de $n$, $n \neq 0$. [0,75pt]
3. (a) Démontrer que $I_n - J_n = \int_0^\pi e^{nt}cos2tdt$. [0,25pt]
   (b) A l'aide de deux intégrations par parties exprimer $I_n - J_n$ en fonction $n$. [1pt]
   (c) Déduire des questions précédentes les expressions de $I_n$ et $J_n$ en fonction de $n$. [1pt]
4. Calculer la limite de $(I_n)$ et celle de $(J_n)$. [0,5pt]