Lycée de Mandoumba	Séquence n°5	Année scolaire 2018/2019
Département de mathématiques	Epreuve de mathématiques (Tronc commun)	Classe : T^le^C
		DUREE : 4 heures

Instructions :
Lis l'énoncé entièrement avant de répondre aux questions posées. Tu peux traiter les exercices dans l'ordre que tu souhaites. **Le correcteur tiendra en compte ta rédaction. Surtout, évitez les ratures sur ta copie.**

Exercice 1 : 3 points

Pour tout entier naturel n, on considère

$$\mathrm{I_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \sin x \, dx \text{ et } \mathrm{J_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \cos x \, dx .$$

1° En utilisant une intégration par parties montrer que

$$2\mathrm{I_n} - n\mathrm{J_n} = 2 \quad \text{et} \quad n\mathrm{I_n} - 2\mathrm{J_n} = 2e^{-\frac{nx}{4}}$$ [1.5pt]

2° Déduire de **1°** les expressions de $\mathrm{I_n}$ et J_n en fonction de n, pour tout entier naturel n. [1pt]

3° Les suites $(\mathrm{I_n})$ et $(\mathrm{J_n})$ sont elles convergentes ? [0.5pt]

Exercice 2 : 4 points

Un dé cubique pipé est tel que :
deux faces sont marquées 2 ; trois faces sont marquées 4, et une face marquée 6.
La probabilité p_i d'apparition de la face i est proportionnelle au nombre i.

1° Calculer les nombres p_2, p_4, p_6. [1.5pt]

2° On suppose dans la suite que :
On lance deux fois de suite le dé précédent, on note i, le résultat du premier lancer et j le résultat du deuxième lancer. On définit la variable aléatoire X qui au couple $(i; j)$ associe le nombre $i - j$.

a) Déterminer l'univers-image de X. [1pt]

b) Déterminer la loi de probabilité de X. [1,5pt]

Exercice 2 : 3 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$. A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6cm$. r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_2 est la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Si M est un point du plan, on note M_1 l'image du point M par r_1 et M_2 l'image du point M par r_2. On suppose que A et B ont pour affixes respectives $+3$ et -3 ; on note z, z_1 et z_2 les affixes respectives des points M, M_1 et M_2.

1° Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z. [1pt]

2° Montrer que si M est distinct de A et de B, on a : $\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = i\sqrt{3}\frac{z-3}{z+3}$ [0.75pt]

3° En déduire que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{MM_1} ; \overrightarrow{MM_2}}) \equiv$ Mes$(\widehat{\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$. [0.75pt]

4° Déterminer et construire l'ensemble (T) des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés. [0.5pt]

Problème : 10 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ I\ ,\ J\ )$, on prendra $OI = OJ = 2\ cm.$

Partie A : 6 points

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans $(O;\ I\ ,\ J\ )$.

1° a) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f. [0.75pt]

b) Etudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de (C_f) par rapport à sa tangente (T_0) en O. [0.75pt]

c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe (C_f). [0.5pt]

2° a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. [0.5pt]

b) Soit g la bijection réciproque de f et (C_g) sa courbe représentative. Montrer que pour tout $x \in K,\ g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. [0.5pt]

3° Construire dans le même graphique les courbes (C_f) et (C_g). [1.5pt]

4° Pour tout entier naturel n strictement positif, on définit la suite numérique (U_n) par :

$$U_n = \int_{\frac{n+1}{n}}^{2} (\ln(x+1) - \ln(x-1))dx$$

a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul n, [1pt]

$$U_n = 3\ln(3) - \frac{\ln(n)}{n} - \left(\frac{2n+1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right).$$

b) Calculer la limite de la suite (U_n) et interpréter graphiquement le résultat. [0.75pt]

Partie B : 4 points

Etude de la convergence de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Dans toute cette partie, h désigne la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite de terme général $V_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln(n)$.

1° a) Pour tout entier naturel n, vérifier que : $V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{n(n+1)} - h(n)$. [0.5pt]

b) Etudier le sens de variations de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (On pourra utiliser le signe de h). [0.75pt]

2° a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a : $V_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\right) + \frac{1}{n}$ [0.75pt]

b) Pour tous entiers naturels $n \geq 3$ et $k \in [1\,; n-1], \forall t \in [k\,; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ [0.75pt]

c) En déduire que tout entier naturel $n \geq 3$, $h(n) \leq V_n$. [0.75pt]

3° Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. [0.5pt]