MINESEC
Lycée de ***Rabingha***
B.P : ***35 Lagdo***
Département de ***Mathématiques***

Année scolaire : ***2020-2021***
Classe : ***Tle C*** **Durée :** ***04 Heures***
Examen : ***Séquence N°4***
Coefficient : ***07***

Epreuve de Mathématiques

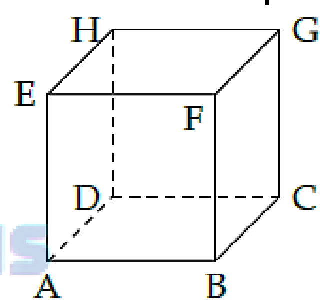
Examinateur : **M. TEBAYA Ambroise**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/ ***(15,5 points)***

EXERCICE 1 / ***(04,5 points)***

Cet exercice regroupe deux blocs de questions pouvant être traités de façon indépendante.

1. On considère la plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note (ℸ) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation : $5z\bar{z} + (z + \bar{z} + 1)^2 - 1$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.
   Soit φ la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{2}$, de rapport 2 et de centre O; Ψ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe z, affixe d'un point M, associe le nombre $\Psi(z)$, affixe de $\varphi(M)$. On désigne par (ℸ') l'image de (ℸ) par φ.
   a. Démontrer que (ℸ) est une ellipse et préciser ses éléments caractéristiques. **1.5pt**
   b. Donner l'expression de $\Psi(z)$ en fonction de z. **0.75pt**
   c. Donner en justifiant la nature exacte de (ℸ'). **0.75pt**
2. On considère dans l'espace le cube ABCDEFGH ci-contre représenté. On note r_1 la réflexion de plan (ABCD) ; r_2 la réflexion de plan (ADHE) ; r_3 la réflexion de plan (ABFE) et r_4 la réflexion de plan (DCGH). On pose $s = r_1 o r_2 o r_3 o r_4$, $d = r_1 o r_2$ et $t = r_3 o r_4$. Il n'est pas demandé aux candidats de reproduire la figure.
   a. Montrer que d est un demi-tour dont on précisera l'axe. **0.5pt**
   b. Montrer que t est une translation dont on précisera la vecteur. **0.5pt**
   c. Reconnaitre et caractériser s. **0.5pt**



EXERCICE 2 / ***(03,75 points)***

N.B : Les exercices 2, 3 et 4 sont liés.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{j}, \vec{k})$. Soit A le point d'affixe $3 + i$ et B le point d'affixe 6. Pour tout réel u, on considère les deux points M_u et N_u d'affixes respectives $3 - \sin(u) + i\cos(u)$ et $3(1 + \cos(u)) + 3i\sin(u)$.

1. a. Peut-on avoir $M_u = N_u$? **0.5pt**
   b. En déduire que pour toute valeur de u, il existe une unique similitude directe T_u qui transforme A en M_u et B en N_u. **0.25pt**
2. a. Montrer que l'écriture complexe de T_u est $z' = e^{iu}z + 3(1 - e^{iu})$. **0.75pt**
   b. En déduire que pour tout u, T_u est une rotation dont on précisera le centre et l'angle. **0.5pt**
3. Soit E l'ensemble des transformations T_u pour $u \in \mathbb{R}$. On muni E de la loi de composition d'applications "o". Montrer que (E, o) est un groupe abélien. **0.75pt**
4. On pose $B_0 = B$, $B_1 = T_{\frac{\pi}{2}}(B_0)$, et pour tout entier naturel n non nul, $B_n = T_{\frac{\pi}{2^n}}(B_{n-1})$.
   a. Montrer par récurrence que $B_n = T_{\frac{2^n - 1}{2^n}\pi}(B)$, pour tout entier naturel n. **0.5pt**
   b. Montrer que $n \in \mathbb{N}$, le point B_n a pour affixe $z_{B_n} = 3 + 3\cos\left(\frac{2^n-1}{2^n}\pi\right) + 3i\sin\left(\frac{2^n-1}{2^n}\pi\right)$ puis en déduire la position limite des points B_n quand n tend vers $+\infty$. **0.5pt**

EXERCICE 3 / ***(05 points)***

I. Soit (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $(y^2 - 8y + 15)e^{y-3} + 3 - x = 0$. On note par (C_1) l'image de (C) par $T_{\frac{\pi}{2}}$.

1. Montrer que (C_1) a pour équation $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$. **0.5pt**
2. Calculer l'intégrale $\int_0^x (t^2 + 2t)e^{-t}dt$ **0.5pt**

II. Soit la fonction numérique à variable réelle f définie par $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$, (Sa courbe représentative est (C_1)).

1. Préciser l'ensemble de définition de f, calculer les limites aux bornes de cet ensemble puis en déduire l'existence d'une asymptote à (C_1). **1pt**
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. **1pt**
3. a. Déterminer la branche infinie de f en $-\infty$. **0.25pt**
   b. Tracer soigneusement (C_1) dans le repère. **0.75pt**
4. a. Calculer l'aire du domaine limité par (C_1), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 3$. **0.5pt**
   b. En déduire l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $y = 3$. **0.5pt**

EXERCICE 4* /** ***(02,75 points)

Soit l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = f(x)$.

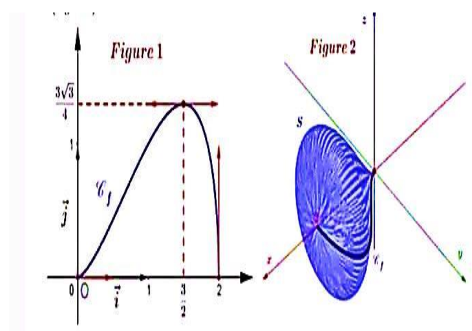
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (F_0) : $y'' + 4y' + 4y = 0$. **0.5pt**
2. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction numérique g de la variable réelle définie par $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit solution de (F). **0.75pt**
3. Soit h une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer que h est solution de (F) si et seulement si $h - g$ est solution de (F_0) **0.75pt**
   b. En déduire la solution h de (F) qui s'annule en 0 et dont la courbe admet en ce point une tangente horizontale. **0.75pt**

PARTIE B* : *EVALUATION DES COMPETENCES/ ***(04,5 points)***

Afin de crypter ou coder et décoder des messages dans une banque, on utilise un chiffrement affine. La banque dispose d'une table de conversion des lettres dont chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Un nombre x est associé à la lettre à coder puis on détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine). Exemple : M correspond à $x = 12$; $7 \times 12 + 5 \equiv 11[26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codé par la lettre L. Sur le manuel d'utilisation de la machine qui gère le codage et le décodage du gestionnaire de la banque est inscrit le système codage-décodage : $y \equiv 7x + 5[26]$ équivaut à $x \equiv 15y + 3[26]$.



Un gestionnaire d'une banque veut construire chez lui un objet d'art ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2. Pour se faire, l'ingénieur considère la surface à réaliser son objet d'art comme un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2m. L'ingénieur trace d'abord la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$ puis il opère la rotation de (C_f) au tour de l'axe $(O, \vec{\imath})$ engendrant un solide S ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2.

L'ingénieur possède trois bus pour ramener ses employés aux chantiers. Lorsqu'il utilise le premier bus qui a des bancs de 5 places, une personne reste mais lorsqu'il utilise le deuxième bus qui a des bancs de 7 places, 5 personnes restent. Finalement, il utilise le troisième bus qui a des bancs de 2 places et ce bus prend tout le monde.

1. Aider le gestionnaire de cette banque à faire un tableau codage-décodage de toutes les lettres alphabétiques qui lui permettra facilement de coder et décoder des messages des autres banques. **1,5pt**
2. Calculer le volume V du béton que peut prendre le solide S **1,5pt**
3. Quel est le nombre minimal que l'ingénieur peut transporter ? **1,5pt**