

Epreuve de Mathématiques
Examineur : M. TEBAYA Ambroise



PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/

(15,5 points)

EXERCICE 1 / (05,25 points)

I. On considère dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $Z^5 + aZ^5 + bZ^2 + aZ + 1 = 0$, où a et b sont deux nombres réels.

1. Démontrer que si Z_0 est une solution de (E), alors $\overline{Z_0}$ et $\frac{1}{Z_0}$ sont également des solutions de (E). **1pt**

2. Déterminer a et b sachant que $1 + i$ est une solution de (E). **1pt**

3. En déduire trois autres solutions de (E). **0,75pt**

4. Achever la résolution de l'équation (E). **0,5pt**

II. On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2\sin \alpha)z^2 + (1 - 2\sin \alpha)z - 1, \text{ où } \alpha \in [0; \pi]$$

1. Calculer $P(1)$. **0,25pt**

2. Déduire trois réels a , b et c tels que $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$. **0,75pt**

3. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$. **1pt**

4. On considère les trois nombres complexes : $z_1 = 1$; $z_2 = -\sin \alpha + i \cos \alpha$ et $z_3 = -\sin \alpha - i \cos \alpha$.

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes. **1,5pt**

EXERCICE 2 / (05,5 points)

I. Soit (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $(y^2 - 8y + 15)e^{y-3} + 3 - x = 0$.

On note T_θ la similitude directe d'écriture complexe $z' = e^{i\theta}z + 3(1 - e^{i\theta})$ et par (C_1) l'image de (C) par $T_{\frac{\pi}{2}}$.

1. Montrer que (C_1) a pour équation $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$. **0,75pt**

2. Calculer l'intégrale $\int_0^x (t^2 + 2t)e^{-t} dt$ **0,5pt**

II. Soit la fonction numérique à variable réelle f définie par $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$, (Sa courbe représentative est (C_1)).

1. Préciser l'ensemble de définition de f , calculer les limites aux bornes de cet ensemble puis en déduire l'existence d'une asymptote à (C_1) . **1pt**

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. **1pt**

3. a. Déterminer la branche infinie de f en $-\infty$. **0,25pt**

b. Tracer soigneusement (C_1) dans le repère. **0,75pt**

4. a. Calculer l'aire du domaine limité par (C_1) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 3$. **0,5pt**

b. En déduire l'aire du domaine limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3$. **0,5pt**

EXERCICE 3 / (04,75 points)

I. Soit l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = (x^2 + 2x)e^{-x}$.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (F_0) : $y'' + 4y' + 4y = 0$. **0,5pt**

2. Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction numérique g de la variable réelle définie par $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit solution de (F). **0,75pt**

3. Soit h une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

a. Démontrer que h est solution de (F) si et seulement si $h - g$ est solution de (F_0) **0,75pt**

b. En déduire la solution h de (F) qui s'annule en 0 et dont la courbe admet en ce point une tangente horizontale. **0.75pt**

II. Soit l'équation différentielle $(E): y' - 0,02y = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) . **0,5pt**

2. Une population a une croissance instantanée relative constante qui, à tout instant t est égale à 2% de son effectif à cet instant.

a. Montrer que l'effectif total $P(t)$ de cette population vérifie l'équation différentielle (E) . **1pt**

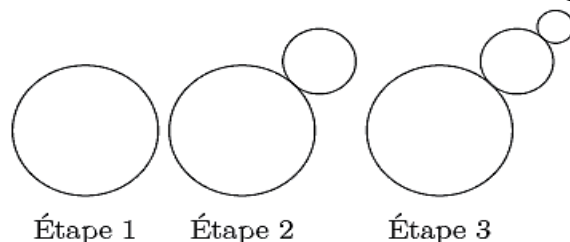
b. Déduire de 1°) l'effectif $P(t)$ en fonction de t sachant qu'à l'instant $t = 0$, il est de 4 millions d'habitants. **0,5 pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/

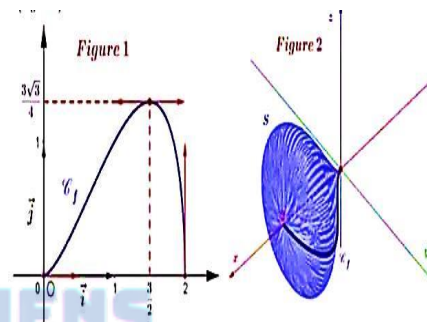
(04,5 points)

M. IKSE veut décorer un immeuble en construisant une figure étape par étape comme suit :

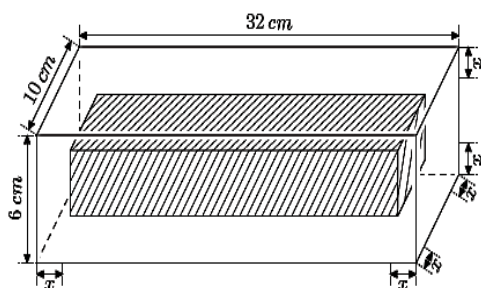
À chaque étape, il ajoute un disque dont le rayon est la moitié de celui qui a été ajouté à l'étape précédente. Il désire peindre sa décoration avec une peinture qui coûte 500FCFA le m^2 .



M. IKSE doit aussi construire un objet d'art ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2. Pour se faire, il considère la surface à réaliser son objet d'art comme un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 2m. Il trace d'abord la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$ puis il opère la rotation de (C_f) au tour de l'axe (O, \vec{i}) engendrant un solide S ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2.



En faisant des marches d'inspections sur son chantier, M.



IKSE trouve un bloc de marbre de forme parallélépipédique de 32 cm de long, 10 cm de profondeur et de 6 cm de hauteur. Il apporte ce bloc de marbre à un atelier de menuiserie où il souhaite récupérer le « cœur » de ce bloc pour en faire un objet de décoration. Pour se faire, on rabote chaque côté de ce pavé droit d'une longueur de x cm.

1. Sachant que le premier disque a un rayon égal à 35 cm, quelle sera la somme d'argent à pouvoir lorsqu'il fait ses disques jusqu'à l'étape 50 ? **1,5pt**
2. Calculer le volume V du béton que peut prendre le solide S **1,5pt**
3. Pour quelle valeur de x , le volume de la partie rabotée est égale au volume du « cœur » de cette pièce. **1,5pt**