Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun
Lycée Classique d'Edéa
Mercredi, 26 02 2020

Année scolaire : 2019-2020
Epreuve : Mathématiques
Classes : T^{le} C
Durée : 4h Coefficient : 5
Profs : AWONO MESSI & NGOS JOP

Session de Février 2020

COMPOSITION DE FIN DU 2ème TRIMESTRE

EXERCICE 1 : 3 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On donne les points $A(2;0), B(1;1), C(-2;-1), A'(3;10), B'(4;6)$ et $C'(-3;-1)$.
   Soit f l'application affine du plan telle que $f(A)=A'$; $f(B)=B'$ et $f(C)=C'$.
   (a) Démontrer que f est bijective. **0,5pt**
   (b) Ecrire la matrice de l'application linéaire φ associée à f dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. **0,5pt**
   (c) En déduire l'expression analytique de f. **0,5pt**
2. Soit g l'application affine du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = y+4 \\ y' = x-2 \end{cases}$
   (a) Montrer que g est un antidéplacement. **0,5pt**
   (b) Déterminer l'ensemble des points invariants par g, puis caractériser g. **1pt**

EXERCICE 2 : 4 points

Soit $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ un repère orthonormé direct de l'espace. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On note H son projeté orthogonal sur le plan (ABC) et K celui, sur la droite (AB).

1. Soit G l'isobarycentre des points A, B et C.
   (a) Donner les coordonnées du point G, puis vérifier que $(OG)\perp(ABC)$. **0,5pt**
   (b) Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC). **0,5pt**
2. Montrer que $\left|\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{OG}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}MH$; calculer la distance de M au plan (ABC). **0,75pt**
3. **(a)** Exprimer la distance MK en fonction de la norme $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|$ vue comme une aire. **0,5pt**
   (b) En déduire que $\sqrt{2}MK = \sqrt{2z^2+(1-x-y)^2}$. **0,5pt**
4. On se place dans le plan (OAB) d'équation $z=0$ et on considère l'ensemble (Γ) des points M du plan (OAB) qui sont équidistants du point O et du plan (ABC).
   (a) Montrer que (Γ) ne contient aucun point de la droite (AB); calculer le rapport $\dfrac{MH}{MK}$. **0,5pt**
   (b) Donner la nature de (Γ), un foyer, la directrice associée et l'excentricité. **0,75pt**

EXERCICE 3 : 3 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique : 1cm)
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a=3+5i, b=-4+2i$ et $c=1+4i$. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2-2i)z+1$.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f. **0,75pt**
2. **(a)** Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f. **0,25pt**

t.me/KamerHighSchool

(b) Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales. **0,5pt**

3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{Z}$ et M' l'image du point M par f.

(a) Montrer que $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$. **0,5pt**

(b) Déterminer l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5;5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux. **1pt**

PROBLEME : 10 points

Le problème comporte trois parties A,B et C.

A) Soit g_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Etudier les variations de g_n. **0,75pt**

(b) En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$. **0,25pt**

(c) Montrer que $1 < \alpha_n < e^2$ et que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$. **0,5pt**

(d) Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n. En déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. **0,75pt**

2. (a) Montrer que la suite de terme général α_n est convergente. On note l sa limite. **0,5pt**

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n)$ et en déduire l. **0,5pt**

B) 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$. **0,5pt**

2. Soit l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$.

(a) Vérifier que le polynôme h défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$ est solution de (E). **0,25pt**

(b) Montrer que f est solution de $(E) \Leftrightarrow g = f - h$ est solution de (E_0). **0,5pt**

(c) En déduire la forme générale des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. **0,25pt**

(d) En déduire une solution φ de (E) satisfaisant à $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = 0$. **0,5pt**

C) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^{(x-1)}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; ***(unité graphique : 2cm).***

1. Etudier les variations de f. **1pt**

2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique notée α. **0,5pt**

(b) Montrer que $1,7 < \alpha < 1,8$. **0,25pt**

3. On appelle (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.

(a) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et (Γ). **0,5pt**

(b) Calculer la limite de $f(x) - x^2$ quand x tend vers $-\infty$. Qu'en conclure ? **0,5pt**

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la parabole (Γ). **0,75pt**

5. Soit λ un nombre réel strictement inférieur à 1. On appelle $\mathscr{D}_\lambda$ le domaine du plan limité par les courbes $\mathscr{C}$, (Γ) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$. On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire du domaine $\mathscr{D}_\lambda$ exprimée en unités d'aire.

(a) Montrer que $\mathscr{A}(\lambda) = 2(\lambda - 1)e^{(\lambda-1)} - 2e^{(\lambda-1)} + 2$. **0,75pt**

(b) Calculer l'aire $\mathscr{A}(0)$ du domaine $\mathscr{D}_0$ et calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \mathscr{A}(\lambda)$ **0,5pt**