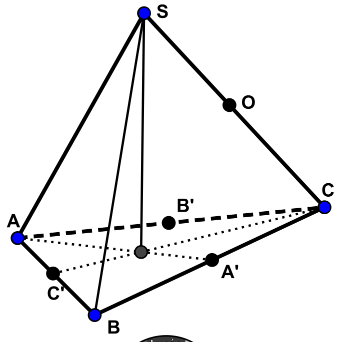
MINESEC
Lycée de Garoua Djamboutou
Département de Mathématiques

Année scolaire 2019/2020
Composition de fin du trimestre 2
Classe: T^{le}C **Durée : 4 heures** **Coef : 5**

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, tous obligatoires.

EXERCICE 1 3,5 points



$SABC$ est un tétraèdre régulier (toutes les faces sont les triangles équilatéraux); G et H sont les points tels que: $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{SH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$ et O le milieu du segment $[SC]$.Soit D le point tel que $ABCD$ est carré de sens directe et de centre B'.

1) $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont des vecteurs unitaires, respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$. On suppose que l'espace est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et que $AS = 4$. Déterminer les coordonnées des points G, H et O, dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. **1 pt**

2) Déterminer une équation du plan (GOH), puis la distance $d(S, (GOH))$. **1,5pts**

3) Soit la similitude s de centre D qui transforme B' en C. Déterminer l'angle et le rapport de s. **1 pt**

EXERCICE 2 : 4,5 points

I/Dans le plan, on considère le parallélogramme $ABCD$. tel que $AB = BD$. Soit f, l'application affine de $\mathcal{P}$ définie par $f(A) = B$, $f(B) = D$, $f(D) = C$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Préciser la nature de l'application g, définie par: $g = t^{-1}of$. **0,5 pt**

2) Construire l'image par f d'un point quelconque M de $\mathcal{P}$. **0,75 pt**

3) Démontrer que f n'abmet pas de point invariant. **0,5 pt**

II/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit la droite (Π) d'équation $x + y - 2 = 0$. On note S_Π la symétrie orthogonale d'axe (Π).

1) Déterminer l'expression anaytique, puis l'écriture complexe de S_Π. **(0,75+0,5) pts**

2) Soit le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On pose $f = t_{\overrightarrow{u}} o S_\Pi$.

   a) Montrer que f est une symétrie glisée, puis déterminer son expression analytique. **0,5 pt**

   b) Déterminer l'axe et le vecteur de f. **1 pt**

PROBLEME: 12 points

"Le problème comporte trois parties A, B et C indépendantes"

Partie A: 3 points

On considère la fonction numérique f_n définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par $f_n = \dfrac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ pour n un entier naturel impair. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1) a) Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et $+\infty$. ***(En $+\infty$, on pourra poser $X = x + 1$)*** **0,5 pt**

   b) Etudier la limite de la foncton f_n à gauche et à droite en -2. **0,5 pt**

2) a) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ de f, puis étudier son signe. **1 pt**

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n. **0,5 pt**

3) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A à préciser. **0,5 pt**

Partie B: 3,5 points

On donne la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 4 + \ln x$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tels que $1 < \alpha < 2$. **0,75 pt**

2) On cherche une valeur approchée de α par la m éthode du point fixe.

On considère la fonction g définie par $g(x) = 2 - \dfrac{1}{2}\ln x$, et $x \in K = [1; 2]$.

a) Montrer que $g(\alpha) = \alpha$, puis que pour tout $x \in K$, $g(x) \in K$. **0,5 pt**

b) Montrer que pour tout $x \in K$, $\mid g'(x) \mid \leq \frac{1}{2}$, puis que $\mid g(x) - \alpha \mid \leq \frac{1}{2} \mid x - \alpha \mid$. **0,75 pt**

3) On définie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par: $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$, puis que $\mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \frac{1}{2} \mid u_n - \alpha \mid$. **0,5 pt**

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mid u_n - \alpha \mid \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **0,5 pt**

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. **0,25 pt**

d) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $\mid u_n - \alpha \mid < 10^{-3}$. **0,25 pt**

Partie C: 5,5 points

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ tels que $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$. On déterminera certaines isométries du plan qui laissent globalement invariant (E).

I/ Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $g(x) = (1 - \sqrt{|x|})^2$, $\forall x \in [-1; 1]$. On note (C) sa représentation graphique dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ***L'unité graphique étant égale à 3cm.***

1) Déterminer la parité de g. En déduire une interprétation géométrique du résultat. **0,5 pt**

2) Soit h la restriction de g à $[0; 1]$.

a) Vérifier que $h(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ pour tout $x \in [0; 1]$. **0,25 pt**

b) Etudier la dérivabilité de h à droite en 0. Que peut on conclure pour la courbe (C) de g. **0,5 pt**

c) Montrer que pour tout $x \in]0; 1]$, $h'(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. Dresser le tableau de variation de h. **1 pt**

3) Représenter soigneusement la courbe de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **0,5 pt**

4) Soit la fonction t définie sur $[-1; 1]$ par $t(x) = -g(x)$.
Déduire de (C), la courbe (C') de t dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **0,5 pt**

II/Soit $(\mathfrak{I})$, l'ensemble des isométries du plan qui laissent (E) globalement invariant.

1) Montrer que pour tout point $M(x, y)$ appartient à (E), on a: $-1 \leq x \leq 1$. **0,25 pt**

2) Montrer que (E) est la reunion des courbes (C) et (C'). **0,25 pt**

3) On considère dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $I(1; 0)$, $J(0; 1)$, $K(-1; 0)$ et $L(0; -1)$.

a) Déterminer l'ensemble des couples (A, B) des points de (E) tels que $d(A, B) = 2$. **0,5 pt**

b) Soit S une isométrie du plan qui laisse (E) globalement invariant.
Montrer que $S(O) = O$ et en déduire toutes les natures de l'isométrie S. **(0,5+0,75) pts**

A méditer

"Celui qui néglige l'infiniment petit,
n'aura jamais l'infiniment grand."
Travaillez, travaillez, travaillez encore et travaillez par vous même.