MINESEC
COLLEGE DIDEROT
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Année scolaire : 2009/2010
Séquence N° 4 Classe : Tle D
Durée : 4 Heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 4$ et $U_0 = 3$.

1) Démontrer que la différence $U_{n+1} - U_n$ de deux termes consécutifs garde un signe constant. En déduire le sens de variation de cette suite.
2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n + 6$.
   a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique
   b) Trouver sa limite.
3) Déterminer le plus petit des entiers naturels n_0 de $\mathbb{N}$ tels que si $n \geq n_0$; $U_n \leq -5{,}99$

Exercice 2 :

1) a) Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :$\sqrt{2} - \sqrt{2}i$; $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. On désigne par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 L'autre solution.
   c) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{Z\_1}{Z_2}\right)^2$
2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (Unité : 1cm) ; on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$; le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point A d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.
   b) Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

Problème :

Partie A

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé d'origine O

1a) Calculer $(1+\sqrt{3})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

(E): $z^2 + z\left[-2 + i(1-\sqrt{3})\right] + 1 + \sqrt{3} + i(-1+\sqrt{3}) = 0$

c) Mettre les racines de (E) sous forme trigonométrique.

d)On appelle A et B les images de ces racines, A ayant une ordonnée positive. Placer – A et B dans P

2) On considère l'application T et P dans P, qui au point M d'affixe fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z - i + \sqrt{3}$

a) Quel est la nature géométrique de T ? caractériser T.

b) Déterminer l'image C de B par T.

c) Placer C dans P. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Partie B :

Soit la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = 1 + e^{x}(1 - x)$
1a) Montrer f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -xe^{x}$
b) Etudier la variation de la fonction f
c) Faire une étude précise des branches infinies.
d) Montrer qu'il existe une valeur α de x et une seule comprise entre 1 et 2 ; telle que $f(\alpha) = 0$
e) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de α.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.
a) Montrer que g admet une application réciproque g^{-1}. Quel est son sens de variation ? (on ne demande pas d'expliciter $g^{-1}(x)$).
b) Tracer dans un même repère orthonormal, la courbe représentative de g et celle de g^{-1}