Lycée Bilingue de Mbanga
Département de Mathématiques

Année Scolaire 2009/2010

Epreuve de la quatrième séquence
Classe : $T^{le}D$ Durée : 4h Coef : 4
Examinateur : M. KENMOGNE N. M

NB : L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2. L'élève traitera dans l'intégralité les deux exercices et le problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte lors de l'évaluation de la copie de l'élève.

Exercice 1 (3.25pts)

On se propose de calculer les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$.

1. Calculer $I + J$. 0.75pt
2. Montrer que $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx$ et en déduire à l'aide de deux intégrations par parties la valeur de $I - J$. 1.5pt
3. En déduire les valeurs de I et de J. 0.5pt
4. Donner une interprétation géométrique de I. 0.5pt

Exercice 2 (5pts)

Le plan est muni du repère orthonormal $(O, I\, J)$. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -2$, $b = -3i$, $c = 2 - 6i$ et $d = 2 - 3i$.

1. a) Placer les points A, B, C et D dans le repère. (Unité sur les axes : 1cm) 0.5pt
   b) Démontrer que les points A, B et C sont alignés. 0.5pt
   c) Calculer $\frac{d-b}{d-c}$ et en déduire que les points B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. 1pt
2. Soit S la similitude de centre D qui transforme B en C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S. 0.75pt
   b) Donner l'écriture complexe de S.
   c) Construire le pôint E image de C par S, puis déterminer son affixe e. 1pt
3. Déterminer un polynome $p(z)$ de dégré 3 dans $\mathbb{C}$, admettant a, b et c pour racines. 0.75pt

Problème (11.75pts)

Le problème comporte trois parties A, B et C.

Partie A (1pt)

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{x}{x+1} \ln x$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de u est $]0, +\infty[$. 0.25pt
2. Montrer que u est prolongeable par continuité en 0. 0.5pt
3. Définir le prolongement par continuité v de u en 0. 0.25pt

Partie B (5.25pts)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x+1} \ln x \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

I. Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \ln x$.

(a) Etudier les variations de φ et dresser son tableau de variation. 1pt

(b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\beta > 0$. 0.5pt

(c) Vérifier que $0.27 < \beta < 0.28$. 0.25pt

(d) En déduire suivant les valeurs de x le signe de $\varphi(x)$. 0.5pt

II. **Etude de la continuité et de la dérivabilité de f.**

(a) Etudier la continuité de f en 0. 0.25pt

(b) Etudier la dérivabilité de f en 0. 0.5pt

(c) Interpréter géométriquement le résultat à la question 2. 0.25pt

III. **Etude des variations de f.**

1. Vérifier que $f(\beta) = -\beta$. 0.25pt
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. 0.25pt
3. Montrer que pour tout réel x positif, on a : $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$. 0.5pt
4. En déduire les variations de f.(On donnera le tableau de variation) 0.5pt
5. Représenter dans un repère orthonormé la courbe de f. (unité sur les axes : 2cm) 0.5pt

<u>Partie C</u> (5.75pts)

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans $[3,\ 4]$ notée α. 0.5pt
   Dans la suite on pose $I = [3,\ 4]$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0,\ +\infty[$ par : $g(x) = \exp(1 + \frac{1}{x})$.
   a) Montrer que $g(\alpha) = \alpha$.(On pourra utiliser la question 1.) 0.5pt

   b) Etudier les variations de g. 1pt

   c) Montrer que $g(I) \subset I$. 0.5pt

   d) Montrer que pour tout réel x de I, on $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. 0.5pt

   e) En déduire que pour tout réel x de I, on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. 0.25pt
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$. 0.5pt

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. 0.25pt

   c) Montrer que pout tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ 0.5pt

   d) Que dire de la suite (u_n). 0.25pt

   e) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près qui est l'un des termes de la suite (u_n). 0.75pt

" Le maître force l'exclave à travailler et en travaillant, l'exclave devient le maître de la nature. "

Travaillez, travaillez pour vous-même, c'est là la clé du succcès.