MINESEC
Lycée de Nkolnda–Nsimalen
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2011-2012
Classe : T^{le} D **Durée : 4 heures**
Séquence 4 **Février 2012**
Coefficient : 04

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **2 points**

1. Soit x un nombre réel quelconque. Linéariser $\cos^6 x$. **1 pt**
2. En déduire la valeur moyenne de la fonction $f: x \longmapsto f(x) = \cos^6 x$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. **1 pt**

EXERCICE II **6 points**

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3 - 6z^2 + 12z - 16 = 0$.
   a. Montrer que l'équation $((E)$ admet une solution réel. **0,5 pt**
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0,75 pt**
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
   Soient A,B, C les points d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.
   a. Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice. **0,5 pt**
   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral. **0,5 pt**
3. Soit K le point d'affixe $z_K = -\sqrt{3} + \text{i}$. F l'image de K par la rotation r de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\text{OB}}$.
   a. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r et celle de la translation t. **0,75 pt**
   b. Quelles sont les affixes respectives de F et de G ? **1 pt**
   c. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires. **0,5 pt**
4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.
   a. Montrer que le quadrilatère COFH est un carré. **0,5 pt**
   b. Calculer l'affixe du point H. Le triangle AGH est-il équilatéral ? **1 pt**

PROBLEME **12 points**

Le problème comporte quatre parties A, B, C et D.

Partie A : Equations différentielles

On considère les équations différentielles $(E): y'' - 2y' + y = 2x - 11$ et $(E'): y'' - 2y' + y = 0$.

1. On pose $\text{u}(x) = ax + b$. Déterminer les réels a et b pour que la fonction u soit une solution de l'équation (E). **0,75 pt**

2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - u$ est solution de l'équation (E'). **0,75 pt**

3. Résoudre l'équation (E') et déterminer une solution g de (E) tel que $g(0) = 9$ et $g'(0) = 4$. **1,5 pt**

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,5 pt**
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation. **0,5 pt**
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que $0,94 < \alpha < 0.941$. **0,75pt**
4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$. **0,25 pt**

Partie C : Etude d'une fonction f**.**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$. On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en$+\infty$. **0,5 pt**
3. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f,et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f. **0,75 pt**
4. **a.** Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$. **0,5 pt**

   b. Déterminer Le sens de variation de la fonction définie par $h(x) = \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $]-\infty; \frac{5}{2}[$ puis en déduire à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie** B, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$. **1pt**
5. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$. préciser la position de (C_f) par rapport à (D). **0,75 pt**
6. Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm). **0,5 pt**

Partie D : Calcul d'aire et étude d'une suite.

I - A l'aide d'une intégration par partie, calculer en cm^2 l'aire A de la portion de plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abcisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$. **1,5 pt**

II - Pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 3 , on considère les E_n, F_n et G_n d'abcisses n appartenant respectivement à l'axe des abcisses, à la droite (D) et à la courbe (C_f) ;
soit u_n le réel définit par $u_n = \dfrac{G_nF_n}{E_nF_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a $u_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5} = \mathrm{e}^{-n}$. **1 pt**
2. **a.** Montrer que la suite (u_n) est géométrique. **0,5 pt**

   b. Calculer la limite de la suite (u_n). Pouvait-on prévoir ce résultat ? **0,5 pt**