Lycée de Bepanda
Département de Mathématiques — Année scolaire : 2009/2010

Classe : $2^{nd}C$ Durée : 3h ; coef : 6
Mars 2010 ; 8h - 11h
Epreuve de Mathématiques. 4eme séquence

L'épreuve comporte trois figures :Figure1, Figure2 et Figure 3 voir verso de l'épreuve.

A - Activités Numériques (10pts)

I. On considère dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

1. Préciser le domaine de validité V pour la résolution de cette inéquation. (Contraines sur x) [0,5pt]
2. Démontrer que pour tout $x \in V$, on a :$(E) \Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 0$ [1pt]
3. Résoudre l'inéquation (I). [0,5pt]

II. Soit $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

1. Factoriser $f(x)$; puis résoudre l'équation $f(x) = 0$ [0,5pt]
2. On considère $g(x) =| \frac{x-1}{x} | -(x^2 + 3x - 4)$
   (a) Déterminer la contrainte sur x. [0,5pt]
   (b) Ecrire $g(x)$ sans le symbole de valeur absolue. [1pt]
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$. [1pt]

III. Soit $p(x) = x^3 - 10x^2 + 25x - 12$.

1. Montrer que 3 est une racine de p. [0,5pt]
2. Déterminer a et b tels que $p(x) = (x-3)(x^2 + ax + b)$. [1pt]
3. On suppose que $a = -7$ et $b = 4$.
   (a) Etudier le signe de $p(x)$. [1pt]
   (b) Montrer que $p(x) = (5-x)^2x - 12$. [0,5pt]
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $p(x) \geq 0$. [0,5pt]
4. Aux quatre coins d'une feuille carrée de $10\,cm$ de côté, on découpe quatre petits carrés de côté x. En repliant les bords suivant les pointillés comme l'indique la **figure1(voir verso de l'épreuve)**, on obtient une boîte.
   (a) Montrer que $0 < x < 5$. [0,5pt]
   (b) Montrer que le volume de la boîte obtenue est $V = (10-2x)^2x\,cm^3$. [0,5pt]
   (c) En déduire la dimension des quatre petits carrés qu'il faut découper pour obtenir une boîte dont le volume soit supérieur ou égal à $48\,cm^3$. [0,5pt]

B - Activités Géométriques (10pts)

Exercice 1 (4,5pts).

La figure2 ci-dessous est montée dans un triangle quelconque tel que $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$ où a b et c sont trois nombre réels strictement positifs. I et J sont des milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$. Les droites (BI) et (AJ) sont perpendiculaires au point O.

1. Montrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ}$ et que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}$. [1pt]
2. Montrer que si $AB^2 = BI^2 = AI^2$, alors $a^2 + b^2 = 4c^2$ [1pt]
3. On pose $b = 5\,cm$ et $c = 3\,cm$. Calculer a. [1pt]
4. (a) Calculer à 10^{-2} près le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$. [0,5pt]
   (b) En déduire la mesure de cet angle en degré à 10^{-1} près puis en radians en fonction de π. [1pt]

Exercice 2 (2pts).

EFG est un triangle rectangle en E et N le projecté orthogonal de E sur (FG).

1. Démontrer que $\frac{1}{EF^2} + \frac{1}{EG^2} = \frac{1}{EN^2}$.
2. H est le point tel que $EFGH$ définisse un parallèlogramme. Démontrer que $2(EF^2 + EH^2) = EG^2 + FH^2$.

Exercice 3 (3,5pts).

Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre $BC = 2$, A est un point de ce demi-cercle tel que $\widehat{COA}$ soit aigu. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) et I le projeté orthogonal de O sur (AB). α est la mesure principal de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$.(**voir Figure3 ci-dessous**)

1. Démontrer que I est le milieu de $[AB]$ et que $OH = \cos^2\alpha$. et que $OH = 2\cos^2\alpha - 1$. [1pt]
2. Exprimer AB en fonction de $\cos\alpha$. [0,5pt]
3. Démontrer que : $BH = 2\cos^2\alpha$ et que $OH = 2\cos^2\alpha - 1$. [1pt]
4. En déduire que : $\cos^2\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2}$ et $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$. [1pt]