Proposition de corrigé Prob D 2022

MATHEMATIQUES. [OBC].

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES

Exercice 1 :

1. Soit $p(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

1.a) Donnons la forme canonique de P

On sait que : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Donc $P(x) = -2\left[\left(x + \frac{3}{2(-2)}\right)^2 - \frac{3^2 - 4(-2)(2)}{4(-2)^2}\right]$

$$= -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5^2}{4^2}\right]$$

$$= -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right]$$

$$P(x) = -2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

b) En deduisons que 2 et $-\frac{1}{2}$ sont les solutions de P sur IR

$P(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

2. On a : (E) : $\cos 2x + 3\sin x + 1 = 0$ et

(I) : $\cos 2x + 3\sin x + 1 < 0$.

2.a) Mtq $\forall x \in IR$, $\cos 2x + 3\sin x + 1 = -2\sin^2 x + 3\sin x + 2$.

on sait que : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

Donc $\cos 2x + 3\sin x + 1 = 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = -2\sin^2 x + 3\sin x + 2$

D'où $\cos 2x + 3\sin x + 1 = -2\sin^2 x + 3\sin x + 2$

b) Resolvons dans IR (E) :

$\cos 2x + 3\sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

Posons : $X = \sin x$

$-2X^2 + 3X + 1 = 0$ D'après 1.b)

$X = 2$ ou $X = -\frac{1}{2}$

$\sin x = 2$ (impossible)

$X = \sin x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\pi/6 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$S_{IR} = \left\{-\pi/6 + 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

3. Resolvons (I) dans $[0, 2\pi[$

→ cherchons les solution de (E) dans $[0, 2\pi[$:

$X = \frac{7\pi}{6}$; $X = \frac{11\pi}{6}$;

x	0		$7\pi/6$		$11\pi/6$		2π
(I)		+	0	−	0	+	

$$S_{[0,2\pi[} = \left]7\pi/6 ; 11\pi/6\right[$$

Exercice 2

$N = 60$, $\bar{m} = 450F$.

DQ	[0;300[	[300;500[	[500;600[	[600;800[	[800;1000[	TOTAL
EFF	13	x	15	10	y	60

1.a) Mtq $\forall (x,y) \in IR^2$ ce couple verifie

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 4x + 9y = 98 \end{cases}$$

$N = 13 + x + 15 + 10 + y = 60 \Rightarrow x + y = 60 - 10 - 13 - 15$

$x + y = 22$ (1)

$$\bar{m} = \frac{\sum c_i n_i}{N} = \frac{13 \times 150 + 400x + 550 \times 15 + 700 \times 10 + 900y}{60}$$

$400x + 900y + 17200 = 60 \times 450$

$400x + 900y = 27000 - 17200$

$400x + 900y = 9800 \Leftrightarrow 4x + 9y = 98$ (2)

(1) et (2) donne : $\begin{cases} x + y = 22 \\ 4x + 9y = 98 \end{cases}$

b) En déduire x et y. (Combinaisons)

$$\begin{cases} -4x - 4y = -88 \\ 4x + 9y = 98 \end{cases}$$

$5y = 10 \Rightarrow y = 2$.

$\to x + y = 22 \Rightarrow x = 22 - y$

$\Rightarrow x = 20$

2. on suppose que $x=20$ et $y=2$

a) trouvons la variance.

$$V=\frac{\sum n_i a_i^2}{N}-\bar{m}^2$$

$$V=\frac{13\times150^2+20\times400^2+15\times550^2+10\times700^2+2\times900^2}{60}-450^2$$

~~$V=40000$~~ $V=40.000$

b) déterminons par interpolation linéaire la médiane. $me\in[300;500[$.

posons: $A(300;13)$; $M(me;30)$; $B(500;33)$

$\vec{AB}(200;20)$; $\vec{AM}(me-300;17)$

$\det(\vec{AM},\vec{AB})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} me-300 & 200 \\ 17 & 20 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 20(me-300)-17\times200=0 \Rightarrow 20(me-300)=3400$

$\Rightarrow me-300=170 \Rightarrow me=470$

3. Déterminons le nombre de choix possibles

$C_{13}^2=78$ choix possibles

Exercice 3:

On a; ABC un triangle équilatéral de côté 3cm

$\vec{BD}=\frac{1}{2}\vec{BC}$ et $-\vec{EA}+2\vec{EB}+2\vec{EC}=\vec{0}$

1. Montrons que:

a) E est barycentre de A et D

$\rightarrow \vec{BD}=\frac{1}{2}\vec{BC} \Rightarrow D=\text{bar}\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 1 & 1 \end{array}$

$\Leftrightarrow D=\text{bar}\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 2 & 2 \end{array}$

or $-\vec{EA}+2\vec{EB}+2\vec{EC}=\vec{0}$

$\Rightarrow E=\text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline -1 & 2 & 2 \end{array}$

or $D=\text{bar}\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 2 & 2 \end{array}$

$\Rightarrow E=\text{bar}\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline -1 & 4 \end{array}$

D'où $E=\text{bar}\{(A;-1);(D,4)\}$

b) pour tout M du plan.

$-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}=3\vec{ME}$ et $-\vec{MA}+\vec{MD}=\vec{AD}$

* $-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}$ (introduit E)

$-\vec{ME}-\vec{EA}+2\vec{ME}+2\vec{EB}+2\vec{ME}+2\vec{EC}$

$\Rightarrow 3\vec{ME}\underbrace{-\vec{EA}+2\vec{EB}+2\vec{EC}}_{\vec{0}}=3\vec{ME}$

D'où $-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}=3\vec{ME}$

* $-\vec{MA}+\vec{MD}$ (relation de chalès)

$-\vec{MA}+\vec{MD}=\vec{AM}+\vec{MD}=\vec{AD}$

2. Déterminons l'ensemble (Γ)/

$\|-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}\|=2\|-\vec{MA}+\vec{MD}\|$

D'après 1.b on a: $\|3\vec{ME}\|=2\|\vec{AB}\|$

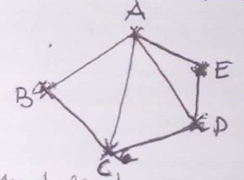
$\Leftrightarrow 3ME=2AB \Rightarrow ME=\frac{2}{3}AB$ or $AB=3$

$\Rightarrow ME=2$ cm

D'où l'ensemble (Γ) est un cercle de E et de rayon $r=2$cm.

3. Soit A, B, C, D et E des villes.

a) Construisons un graphe de la situation



b) justification: le graphe est simple parce qu'il ne contient aucune boucle et qu'il n'admet pas d'arrête multiples

c) Ce graphe n'est pas complet car tout les sommets ne sont pas adjacents

4. le nombre de vol «aller-simples» est $d(A)=4$ donc il faut 4 vols.

Exercice 4:

soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3x}{3+4x}$ et (C_f) sa courbe représentative

1a) Calculons la limites de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$

b) Calculons $f'(x)$

$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{3(3+4x)-4\times 3x}{(3+4x)^2}$

$f'(x) = \frac{9+12x-12x}{(3+4x)^2}$

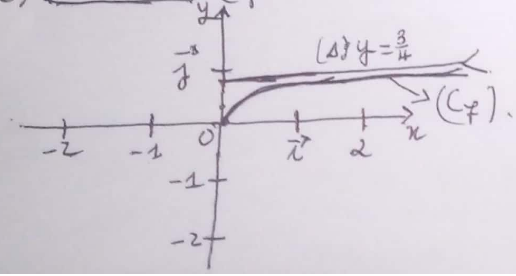
D'où $f'(x) = \frac{9}{(3+4x)^2}$

2·a) Dressons le TV.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$\frac{3}{4}$

b) Construisons (C_f).



3. Soient (U_n) et (V_n) ; $U_0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{3+4U_n}$ et $V_n = 1 + \frac{3}{U_n}$

b) Mtq $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n + 4 = \frac{5U_n+3}{U_n}$.

$V_n + 4 = 1 + \frac{3}{U_n} + 4 = 5 + \frac{3}{U_n}$

$V_n + 4 = \frac{5U_n+3}{U_n}$

4·a) Mtq (V_n) est arithmétique

$V_{n+1} = 1 + \frac{3}{U_{n+1}}$

$V_{n+1} = 1 + \frac{3}{\frac{3U_n}{3+4U_n}} = 1 + \frac{3(3+4U_n)}{3U_n}$

$V_{n+1} = 1 + \frac{3+4U_n}{U_n}$

$= 1 + \frac{3}{U_n} + \frac{4U_n}{U_n} = \underbrace{1 + \frac{3}{U_n}}_{V_n} + 4$

$V_{n+1} = V_n + 4$.

D'où (V_n) est arithmétique $r = 4$

$V_0 = 1 + \frac{3}{U_0} = 1 + \frac{3}{1} = 4$

$V_0 = 4$

b) Exprimons (V_n) en fonction de n.

$V_n = V_p + (n-p)r$

$V_n = V_0 + nr$

$V_n = 4 + 4n = 4(n+1)$

c) En déduisons U_n en fonction de n.

$V_n = 1 + \frac{3}{U_n} \Rightarrow \frac{3}{U_n} = V_n - 1$.

$\Rightarrow U_n = \frac{3}{V_n - 1}$

$U_n = \frac{3}{4(n+1)-1} = \frac{3}{3+4n}$

$U_n = \frac{3}{3+4n}$.

PARTIE B : EVALUATION DES Compétences.

Tâches.

1) A quel taux d'interêt le fermier a-t-il placé ses économies dans la banque ALPHA

→ $P_0 = 1\,000\,000$ FCFA ; soit $x\%$ ce taux

- après 1 an : $P_1 = P_0 + \frac{xP_0}{100}$

$P_1 = 1\,000\,000 + 10\,000x$.

→ Dans BETA.

$U_0 = P_1$; soit $(x+2)\%$

- après 1 an : $U_1 = U_0 + \frac{(x+2)}{100}U_0$

$U_1 = 1\,000\,000 + 10\,000x + (x+2)(10\,000 + 100x)$

$U_1 = 1\,123\,500$ FCFA

$1\,000\,000 + 10\,000x + 100x^2 + 10\,000x + 20\,000 + 200x = U_1$

$100x^2 + 20\,200x + 1\,020\,000 = 1\,123\,500$

$\Rightarrow 100x^2 + 20\,200x - 103\,500 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 202x - 1035 = 0$

$\Delta = 44\,944 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 212$.

Scanné avec CamScanner

$x_1 = \frac{-202-212}{2} = -207$ (rejeté)

$x_2 = \frac{-202+212}{2} = 5$

D'où le taux d'intérêt de la banque ALPHA est : 5%

2) Déterminons le prix unitaire de chaque espèce de bête. soit $\begin{cases} x : \text{~~prix~~ de poussins} \\ y : \text{~~prix~~ de pourceaux} \\ z : \text{~~prix~~ de chevreaux} \end{cases}$

→ 1er tour :

$60x + 25y + 10z = 195\,000$ ①

→ 2e tour :

$50x + 20y + 30z = 245\,000$ ②

→ 3e tour :

$60x + 20y + 20z = 210\,000$ ③

① et ② et ③ $\Rightarrow \begin{cases} 60x+25y+10z = 195\,000 & L_1 \\ 50x+20y+30z = 245\,000 & L_2 \\ 60x+20y+20z = 210\,000 & L_3 \end{cases}$

→ éliminons x dans L_1 et L_3

$L_1 - L_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 60x+25y+10z = 195\,000 \\ -60x-20y-20z = -210\,000 \end{cases}$

// $5y - 10z = -15\,000$ L_4

→ éliminons x dans L_1 et L_2

$50L_1 - 60L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3000x+1250y+500z = 9\,750\,000 \\ -3000x-1200y-1800z = -14\,700\,000 \end{cases}$

// $50y - 1300z = -4\,950\,000$ L_5

L_4 et $L_5 \Rightarrow \begin{cases} 5y - 10z = -15\,000 \\ 50y - 1300z = -4\,950\,000 \end{cases}$

éliminons y dans L_4 et L_5

$10L_4 - L_5 \Leftrightarrow \begin{cases} 50y - 100z = -150\,000 \\ -50y + 1300z = 4\,950\,000 \end{cases}$

$1200z = 4\,800\,000$

$y = \frac{4\,800\,000}{1200}$

$y = 4\,000$ FCFA

triangle de GAUSS.

$\begin{cases} 60x+25y+10z = 195\,000 \\ 5y - 10z = -15\,000 \\ y = 4000 \end{cases}$

→ trouvons z.

$5y - 10z = -15\,000$

$\Rightarrow 10z = 15\,000 + 5(4\,000)$

$z = \frac{15\,000 + 20\,000}{10}$

$z = 3\,500$ FCFA

→ trouvons x.

$60x + 25(4000) + 10(3500) = 195\,000$

$60x = 195\,000 - 35\,000 - 100\,000$

$\Rightarrow 60x = 60\,000$

$\Rightarrow x = \frac{60\,000}{60} \Rightarrow x = 1000$ FCFA

D'où le prix unitaire de poussins, de pourceau et de chevreaux seront respectivement de : 1000 FCFA ; 4000 FCFA et 3500 FCFA.

3) La proposition de son ami pourrait elle lui permettre de réaliser son projet en 8 ans

U_n : La somme à la n-ième année

$U_0 = 1\,000\,000$; $U_1 = U_0 + \frac{15U_0}{100}$

$U_1 = U_0(1+0{,}15) = U_0(1{,}15)$

$U_2 = U_1 + \frac{15}{100}U_1$

$U_2 = U_1(1{,}15) = U_0(1{,}15)^2$

⋮

$U_8 = U_0(1{,}15)^8$

AN : $U_8 = 1\,000\,000\,(1{,}15)^8 = 3.059.023$.

$U_8 > 3\,000\,000$ FCFA

D'où la proposition de son Ami lui permettra de financer entièrement son projet.

WAKEU CHRISTIAN F
698079875
ING. POLYTECHNIQUE. D