Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat
Session : 2022
Séries : C / E
Épreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 7 / 6

Cette épreuve étalée sur deux pages, est constituée de deux parties indépendantes.

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 : (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

On considère les points A, B, F et G d'affixes respectives :

$Z_A = 1 + i\sqrt{3}\,;\, Z_B = -1 - i\sqrt{3}\,;\, Z_F = 4$ et $Z_G = -4$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$. (0,75 pt)

2) Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z$.

a) Donner les éléments caractéristiques de s. (0,75pt)

b) Quelles sont les images par s des points A et B ? (0,5pt)

3) Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de foyers A et B et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.

a) Déterminer une équation de l'image $(\mathcal{E}')$ de $(\mathcal{E})$ par la similitude s. (1pt)

b) Construire $(\mathcal{E}')$ puis $(\mathcal{E})$ dans le même repère. (1pt)

4) Aicha a choisi au hasard l'un après l'autre, deux points distincts parmi les points O, A, B, F et G comme ceux par lesquels passe l'axe focal de l'ellipse $(\mathcal{E}')$.

Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi deux points de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$? (1pt)

Exercice 2 : (5 points)

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E.

Soit f un endomorphisme de E.

1) Pour k appartenant à $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble E_k des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f(\vec{u}) = k\vec{u}$.

a) Démontrer que E_k est un sous-espace vectoriel de E. (1pt)

b) On suppose que f vérifie l'égalité $f \circ f = 2f$.

Démontrer que $\vec{u} \in Imf$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$. (1pt)

2) On suppose ici qu'on a :

$f(\vec{i}+\vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}\,;$

$f(\vec{i}-\vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j}\,;$

$f(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = \vec{0}\,.$

a) Démontrer que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$. (0,75pt)

b) Donner la matrice M de f dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (0,5pt)

c) Démontrer que $f \circ f = 2f$. (0,5pt)

d) Déterminer par une de ses bases, le noyau $Kerf$ de f. (0,5pt)

e) Déterminer l'image Imf de f. On précisera une de ses bases. (0,75pt)

Exercice 3 : (5 points)

f est une fonction définie sur $[0\,;2\pi]$ par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

$(\mathcal{C}_f)$ est la courbe de f dans un repère orthogonal où en abscisse, on a $2\,cm$ pour unité et en ordonnée $4\,cm$ pour unité.

1) Démontrer que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$. **(0,5pt)**
2) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations. **(1,25pt)**
3) a) Démontrer qu'on a $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. **(0,5pt)**
   b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$. **(0,75pt)**
4) Sur $[0\,;2\pi]$, tracer dans le même repère, les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$ puis la courbe $(\mathcal{C}_f)$. **(1pt)**
5) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$ et la courbe d'équation $y = e^{-x}$ sur $[0\,;2\pi]$. *On pourra utiliser la question 1).* **(1pt)**

PARTIE B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation :

Trois gisements de gaz A, B et C présentant chacun 100 milliards de m^3 de quantité, ont été découverts dans un pays. L'inauguration a eu lieu à une certaine année (année 0) prise comme origine des temps t (en années).

L'exploitation du gaz des gisements A et B avait commencé à la date $t = 0$ et celle du gisement C légèrement avant. Seulement à la date $t = 1$, la quantité totale du gaz extraite de chacun de gisements A et C était de 5,01 milliards de m^3.

- Pour le gisement A et à partir de la 2ᵉ année, la quantité de gaz extraite chaque année augmente de 0,75 milliards de m^3 par rapport à celle de l'année précédente.
- Pour les gisements B et C, les ingénieurs pétrochimistes savent que si $q(t)$ est la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite de chacun de ces gisements à la date t, alors le taux d'extraction ou de consommation du gaz du gisement à cette date t est $q'(t)$ (milliards de m^3 par an).
  - Au niveau du gisement B, ce taux est $\left(\frac{1}{2t+1} + 0{,}02t\right)$ milliard de m^3 par an.
  - Au niveau du gisement C, ces taux (aux dates t) sont proportionnels aux quantités de gaz extraites à ces dates. À la date $t = 1$ ce taux était 5,01 milliards de m^3 par an.

Tâches :

1) En combien d'années le gisement A s'épuisera-t-il ? **(1,5pt)**
2) Combien d'années d'extraction suffiront à ce pays pour épuiser le contenu du gisement B ? **(1,5pt)**
3) Après l'inauguration, combien d'années faudra-t-il à ce pays pour vider le gisement C de son contenu ? **(1,5pt)**

Présentation : **(0,5pt)**

PROPOSITION DE CORRIGÉ EPREUVE DE MATHEMATIQUES BACC ESG Série C/E. Session 2022.

Par M. Nathanaël AWONO-MESSI
PLEG Maths

Partie A. EVALUATION DES RESSOURCES.

EXERCICE 1.

1. Resolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2+2-2i\sqrt{3}=0$.

$$z^2+2-2i\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow z^2-(-2+2i\sqrt{3})=0$$
$$\Leftrightarrow z^2-(1+i\sqrt{3})^2=0 \Leftrightarrow [z-(1+i\sqrt{3})][z+(1+i\sqrt{3})]=0$$
$$\Leftrightarrow z-(1+i\sqrt{3})=0 \text{ ou } z+(1+i\sqrt{3})=0$$
$$\Leftrightarrow z=1+i\sqrt{3} \text{ ou } z=-1-i\sqrt{3}.$$

Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\{-1-i\sqrt{3}\,;\,1+i\sqrt{3}\}$. 0,75pt

2. (a) Donnons les éléments caractéristiques de S.

L'écriture complexe de S est sous la forme $z'=az+b$ avec $a=1-i\sqrt{3}$ et $b=0$.

- De plus $a=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$\arg(a)=-\frac{\pi}{3}$; $|a|=2$

donc S est la similitude direct de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

- $b=0 \Rightarrow$ le centre de S est le point O

0,75pt

S est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

(b) Images par S des points A et B.

0,25pt

Nous avons : $z'_A=(1-i\sqrt{3})z_A=(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$
$=1^2+(-\sqrt{3})^2=4=z_F$, donc $S(A)=F$.

De même : $z'_B = (1-i\sqrt{3})z_B = (1-i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3}) = -(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = -4 = z_G$

donc $S(B) = G$. 0,25pt

3. (a) Déterminons une équation de l'image $(\mathcal{E}')$ de $(\mathcal{E})$ par la similitude S.

- $(\mathcal{E})$ est une ellipse de centre O, d'excentricité $e = \frac{1}{2}$, de foyers A et B ;
- S est la similitude directe de centre O

donc $(\mathcal{E}')$ est une ellipse de centre O, d'excentricité $e = \frac{1}{2}$, de foyers $S(A) = F$ et $S(B) = G$

Dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on a : $F\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$

Ainsi, avec les notations habituelles $c = 4$.

$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2c = 2\times 4 = 8$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Si $M(X, Y)$ est un point de $(\mathcal{E}')$, alors l'équation de $(\mathcal{E}')$ dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est : $\frac{X^2}{8^2} + \frac{Y^2}{(4\sqrt{3})^2} = 1$

c'est-à-dire $\frac{X^2}{64} + \frac{Y^2}{48} = 1$. 1pt

(b) Construisons $(\mathcal{E}')$ puis $(\mathcal{E})$ dans le même repère.

(Voir figure en Annexe) 1pt

4. Probabilité pour que AÏCHA ait choisi deux points de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$.

- L'axe focal de $(\mathcal{E}')$ est l'axe qui passe par les points G, O et F ;
- les points O, A, B, F et G étant distincts, aucun point ne présente un avantage sur un autre : Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité

la probabilité le premier point de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$ est $P_1 = \frac{3}{5}$; celle de choisir le deuxième point est $P_2 = \frac{2}{4}$. (tirage sans remise)

- la probabilité qu'elle ait choisi deux points de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$ est $p = P_1 \times P_2 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0{,}3$. 1pt

EXERCICE 2.

1.(a) Demontrons que E_k est un sous-espace vectoriel de E.

$$E_k = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = k\vec{u}\}.$$

(i) Montrons que $E_k \neq \emptyset$.

On a : $\vec{O}_E \in E$ et $f(\vec{O}_E) = \vec{O}_E$, car f est un endomorphisme de E
$= k \cdot \vec{O}_E$

donc $\vec{O}_E \in E_k$ et par conséquent $E_k \neq \emptyset$.

(ii) Montrons que E_k est stable par combinaison linéaire.

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in E_k$; Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$, car f est linéaire
$= \alpha k\vec{u} + \beta k\vec{v}$, par définition de f
$= k(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$, donc $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in E_k$. 1pt

De (i) et (ii), il en découle que E_k est un s.e.v de E.

(b) On suppose que f vérifie l'égalité $f\circ f = 2f$.
Démontrons que $\vec{u} \in \mathrm{Im}f \Leftrightarrow \vec{u} \in E_2$.

- Supposons que $\vec{u} \in \mathrm{Im}f$, alors il existe $\vec{v} \in E$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{u}$.

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) = \vec{u} &\Rightarrow f(f(\vec{v})) = f(\vec{u}) \\ &\Rightarrow f\circ f(\vec{v}) = f(\vec{u}) \\ &\Rightarrow 2f(\vec{v}) = f(\vec{u}),\ \text{car } f\circ f = 2f \\ &\Rightarrow 2\vec{u} = f(\vec{u}) \\ &\Rightarrow \vec{u} \in E_2. \end{aligned}$$

0,5pt

- Réciproquement, supposons que $\vec{u} \in E_2$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \in E_2 &\Rightarrow f(\vec{u}) = 2\vec{u} \\ &\Rightarrow \vec{u} = \tfrac{1}{2}f(\vec{u}) = f\left(\tfrac{1}{2}\vec{u}\right) \\ &\qquad = f(\vec{v}) \text{ avec } \vec{v} = \tfrac{1}{2}\vec{u} \in E \\ &\Rightarrow \vec{u} \in \mathrm{Im}f. \end{aligned}$$

0,5pt

d'où $\vec{u} \in \mathrm{Im}f \Leftrightarrow \vec{u} \in E_2$.

2. (a) Démontrons que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$; $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

- On a : $\begin{cases} f(\vec{i}+\vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} \\ f(\vec{i}-\vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases}$, donc $\begin{cases} f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} \\ f(\vec{i}) - f(\vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases}$

Ceci étant : $2f(\vec{i}) = 4\vec{i}$ et $2f(\vec{j}) = 4\vec{j}$

et par suite : $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$; $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$.

0,25pt x 3

- $f(\vec{i}-\vec{j}) + f(\vec{k}) = \vec{0} \Leftrightarrow f(\vec{k}) = -f(\vec{i}-\vec{j})$

$$= -(2\vec{i} - 2\vec{j}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}.$$

b) Donnons la matrice M de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La matrice M de f est entièrement déterminée par les images des vecteurs de base disposées en colonnes, donc :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 0,5pt

c) Démontrons que $f \circ f = 2f$.

Il suffit de montrer que $M \times M = 2M$.

$\cdot\ 2M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $M \times M = M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $M \times M = 2M$, on conclut que $f \circ f = 2f$. 0,5pt

(d) Déterminons par une de ses bases, le noyau de f.

$\ker f = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}_E\}$.

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E.

$\cdot\ \vec{u} \in \ker f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

$\cdot\ \vec{u} \in \ker f \Rightarrow \vec{u} = z\vec{i} - z\vec{j} + z\vec{k} = z(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = z\vec{e}_1$ avec $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

Comme $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$, alors $\ker f$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. 0,5pt

(e) Déterminons l'image Im f de f.

Nous venons de voir d'après la question 2.c) que $f\circ f = 2f$, ainsi, d'après la question 1.b), on en déduit que $\operatorname{Im} f = E_2$.

$$E_2 = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = 2\vec{u}\}.$$

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in E$; $\vec{u} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = 2\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} f(\vec{u})$$

Comme $f(\vec{u}) = f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x f(\vec{i}) + y f(\vec{j}) + z f(\vec{k})$

$$= x(2\vec{i}) + y(2\vec{j}) + z(-2\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$= 2(x-z)\vec{i} + 2(y+z)\vec{j}$$

alors $\vec{u} = (x-z)\vec{i} + (y+z)\vec{j}$. 0,75pt

Ainsi, Im f est un plan vectoriel dont une base est $(\vec{i}; \vec{j})$.

EXERCICE 3.

1. Démontrons que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$.

f est une fonction 2 fois dérivable sur $[0; 2\pi]$ et pour tout $x \in [0; 2\pi]$, $f'(x) = (e^{-x}\cos x)' = (e^{-x})'\cos x + (\cos x)' e^{-x} = -e^{-x}\cos x - \sin x\, e^{-x}$

$$f''(x) = -(-e^{-x}\cos x - \sin x\, e^{-x}) - (\sin x\, e^{-x})'$$

$$= e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - (e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x)$$

$$= 2e^{-x}\sin x.$$

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 2e^{-x}\sin x + 2(-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x) + 2e^{-x}\cos x$$

$$= 0.$$ 0,5pt

2. Etudions les variations de f et dressons son tableau de variations.

- $f(0)=1$. $\quad f(2\pi)=e^{-2\pi}$
- f est continue et dérivable sur $[0;2\pi]$ et pour tout $x\in[0;2\pi]$,

$$f'(x) = -e^{-x}(\cos x+\sin x)$$

- pour tout $x\in[0;2\pi]$, $e^{-x}>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-\cos x-\sin x$.

$$f'(x)=0 \iff -\cos x-\sin x=0 \iff \cos x = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\iff x = \frac{-\pi}{2}-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff 2x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

x \ k	0	1	2
$-\frac{\pi}{4}+k\pi$	//////	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$

Dans $[0;2\pi]$, $f'(x)=0 \iff x=\frac{3\pi}{4}$ ou $x=\frac{7\pi}{4}$.

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[$ et sur $\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

f est strictement croissante sur $\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right[$.

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7\pi}{4}}$	$\searrow$	$e^{-2\pi}$

1,25pt

3.(a) Démontrons qu'on a $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

Pour tout $x \in [0;2\pi]$, $-1 \leq \cos x \leq 1$

En multipliant chaque membre de la double inégalité ci-dessus par $e^{-x} > 0$, on obtient $-e^{-x} \leq e^{-x}\cos x \leq e^{-x}$

c'est-à-dire $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. 0,5pt

(b) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$.

- Avec la courbe d'équation $y = e^{-x}$.

$f(x) = e^{-x} \iff e^{-x}\cos x = e^{-x} \iff \cos x = 1$ car $e^{-x} \neq 0$.

Dans $[0;2\pi]$, $\cos x = 1 \iff x = 0$ ou $x = 2\pi$.

- Avec la courbe d'équation $y = -e^{-x}$.

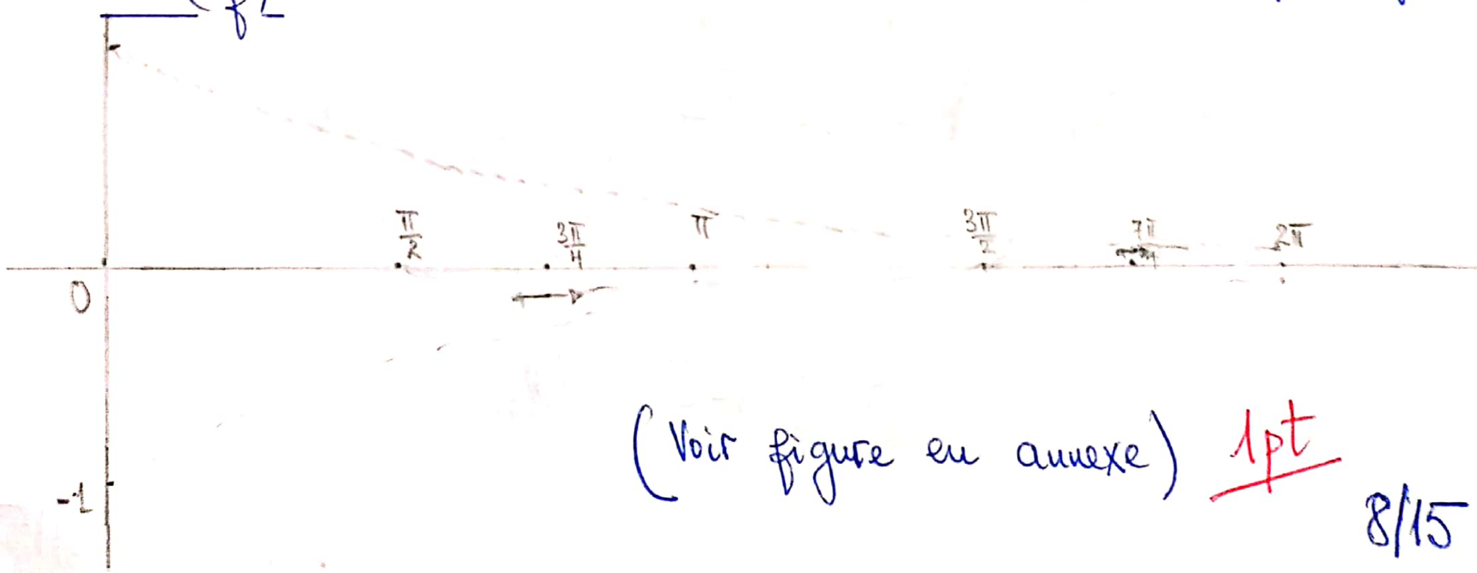
$f(x) = -e^{-x} \iff e^{-x}\cos x = -e^{-x}$

$\iff \cos x = -1$, car $e^{-x} \neq 0$.

Dans $[0;2\pi]$, $\cos x = -1 \iff x = \pi$. 0,2pt x 3

Les points d'intersection cherchés sont $(0;1)$; $(2\pi; e^{-2\pi})$ et $(\pi; -e^{-2\pi})$

(c) Traçons dans le même repère, les courbes d'équations $y = e^{-x}$; $y = -e^{-x}$ et (C_f)



(Voir figure en annexe) 1pt

PARTIE B. EVALUATION DES COMPÉTENCES.

Tâche 1. Déterminons en combien d'années le gisement A sera épuisé.

Soit U_t la quantité totale de gaz (en milliards de m^3) extraite du gisement A à l'année t.

- la quantité de gaz extraite chaque année augmente de 0,75 milliards de m^3 par rapport à celle de l'année précédente signifie que $U_{t+1} = U_t + 0{,}75$

donc (U_t) est une suite arithmétique de raison 0,75 et de 1er terme $U_1 = 5{,}01$ milliards de m^3.

Ainsi, pour tout $t \geq 1$, $U_t = U_1 + 0{,}75(t-1)$

$= 5{,}01 + 0{,}75(t-1)$

- le gisement A s'épuisera lorsque $U_1 + U_2 + \dots + U_t = 100$

c'est-à-dire $\dfrac{t(U_1+U_t)}{2} = 100$

ce qui donne $t(5{,}01 + 5{,}01 + 0{,}75(t-1)) = 200$

ce qui équivaut à : $0{,}75t^2 + 9{,}27t - 200 = 0$.

$\Delta = 685{,}9329$. $\sqrt{\Delta} = 26{,}2$.

la solution positive est $t = \dfrac{-9{,}27+26{,}2}{2(0{,}75)} \approx 11{,}28$

$\boxed{\text{le gisement A s'épuisera en 12 années}}$

1,5pt C_1 C_2 C_3.

Tâche 2 Nombre d'années d'extraction suffisant à ce pays pour épuiser le contenu du gisement B.

- Soit $q(t)$ la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite du gisement B à la date t.
- Au niveau du gisement B, le taux d'extraction du gaz à la date t est $q'(t)$.

Ce taux est $\left(\frac{1}{2t+1}+0{,}02t\right)$ milliards de m^3 par an signifie que $q'(t)=\frac{1}{2t+1}+0{,}02t$.

- Déterminons $q(t)$ (contenu du gisement B)

$$q'(t)=\frac{1}{2t+1}+0{,}02t \iff q(t)=\int\left(\frac{1}{2t+1}+0{,}02t\right)dt=\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2t+1}+0{,}02t\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\ln(2t+1)+0{,}01t^2+C$$

$q(t=0)=0 \iff C=0.$

Ainsi $q(t)=\frac{1}{2}\ln(2t+1)+0{,}01t^2.$

- le contenu du gisement B sera épuisé lorsque $q(t)=100$.

Ceci revient à résoudre dans $[0;+\infty[$ l'équation $\frac{1}{2}\ln(2t+1)+0{,}01t^2=100.$

Considérons la fonction φ définie sur $[0;+\infty[$ par
$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\ln(2t+1)+0{,}01t^2-100.$$

$\varphi(0)=-100$ $\quad \lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$

φ est continue et dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\in[0;+\infty[$,

$$\varphi'(t)=\frac{1}{2t+1}+0{,}02t>0$$

donc φ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

t	0		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	
φ	-100	$\nearrow$	$+\infty$

- L'étude des variations de φ montre que φ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc φ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $[-100;+\infty[$

De plus, $0 \in [-100;+\infty[$, donc il existe un unique réel $t_\theta \in [0;+\infty[$ tel que $\varphi(t_\theta)=0$.

d'où l'équation $\varphi(t)=0$ admet une solution unique dans $[0;+\infty[$.

1,5pt

C1
C2
C3

$\varphi(98)=-1{,}32$; $\varphi(99)\approx 0{,}66$

Comme $\varphi(98)\times\varphi(99)<0$, alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $98<t_\theta<99$.

t	98	98,1	98,2	98,3	98,4	98,5	98,6	98,7	98,8	98,9	99
$\varphi(t)$	-1,32						-0,136	0,063			0,66

- $\dfrac{98{,}6+98{,}7}{2}=98{,}65$ et $\varphi(98{,}65)\approx -0{,}037$, donc $98{,}65<t_\theta<98{,}7$.
- $\dfrac{98{,}65+98{,}7}{2}=98{,}675$ et $\varphi(98{,}675)\approx 0{,}013$, donc $98{,}65<t_\theta<98{,}675$.
- $\dfrac{98{,}65+98{,}675}{2}=98{,}6625$ et $\varphi(98{,}6625)\approx -0{,}012$, donc $t_\theta=98{,}67$.

le nombre d'années d'extraction suffisant à ce pays est de 99 ans.

Tâche 3 : Nombre d'années qu'il faudra à ce pays pour vider le gisement C de son contenu.

- Soit $q(t)$ la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite du gisement C à la date t.
- Au niveau du gisement C, les taux d'extraction (aux dates t) sont proportionnelles aux quantités de gaz extraites à ces dates signifient que $q'(t) = a\,q(t)$. où $a \in \mathbb{R}$.
- $q'(t) = a\,q(t) \Leftrightarrow \dfrac{q'(t)}{q(t)} = a \Leftrightarrow \ln|q(t)| = at + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow q(t) = ke^{at},\ k \in \mathbb{R}$.

or $q'(1) = 5{,}01 \Leftrightarrow kae^{a} = 5{,}01$

$q(1) = 5{,}01 \Leftrightarrow ke^{a} = 5{,}01$, donc $a = 1$ et $k = 5{,}01e^{-1}$

Ainsi, $q(t) = 5{,}01e^{-1}e^{t} = 5{,}01e^{t-1}$.

- le gisement C est vidé de son contenu lorsque $q(t) = 100$.

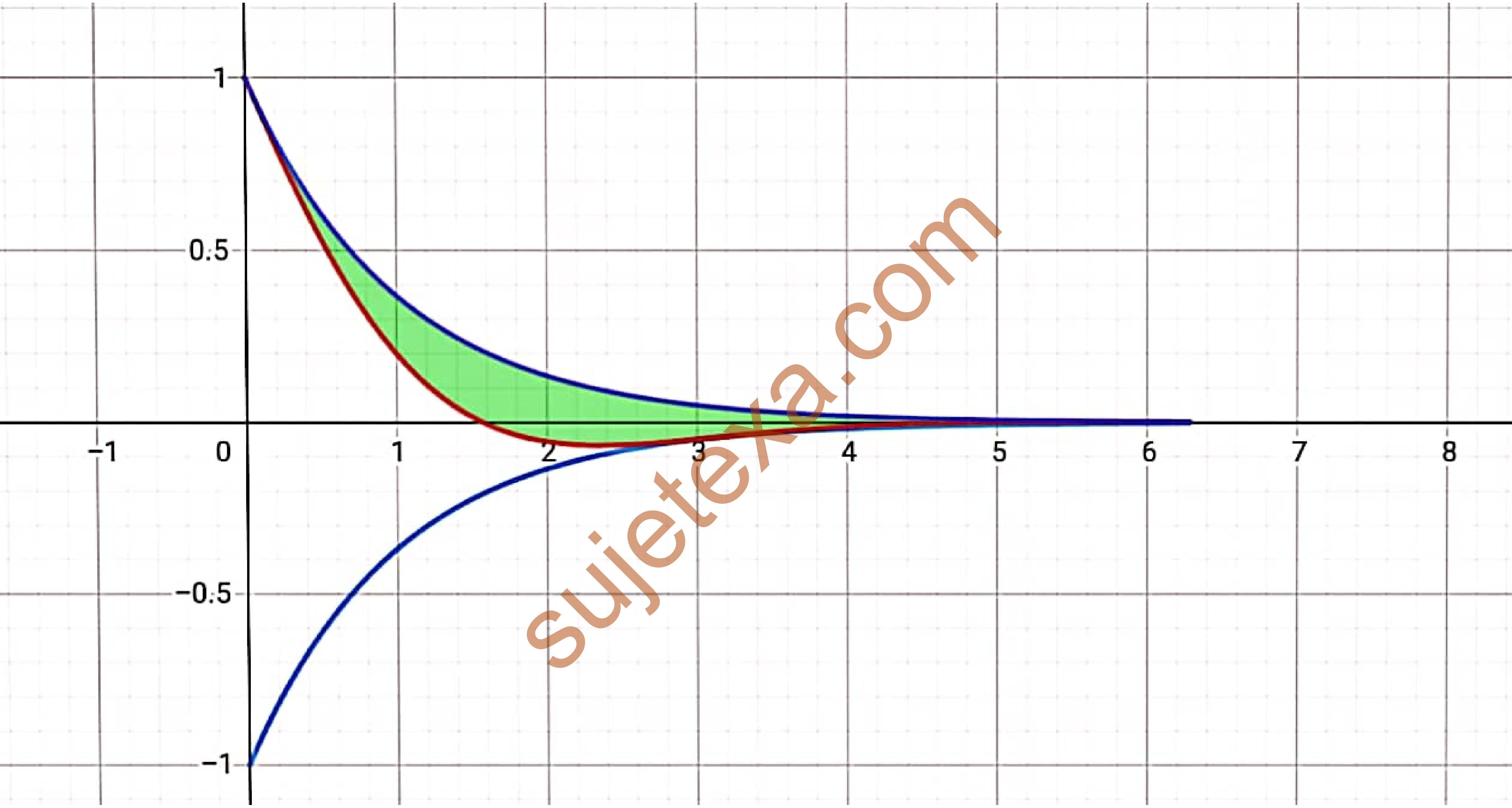
$q(t) = 100 \Leftrightarrow 5{,}01e^{t-1} = 100$

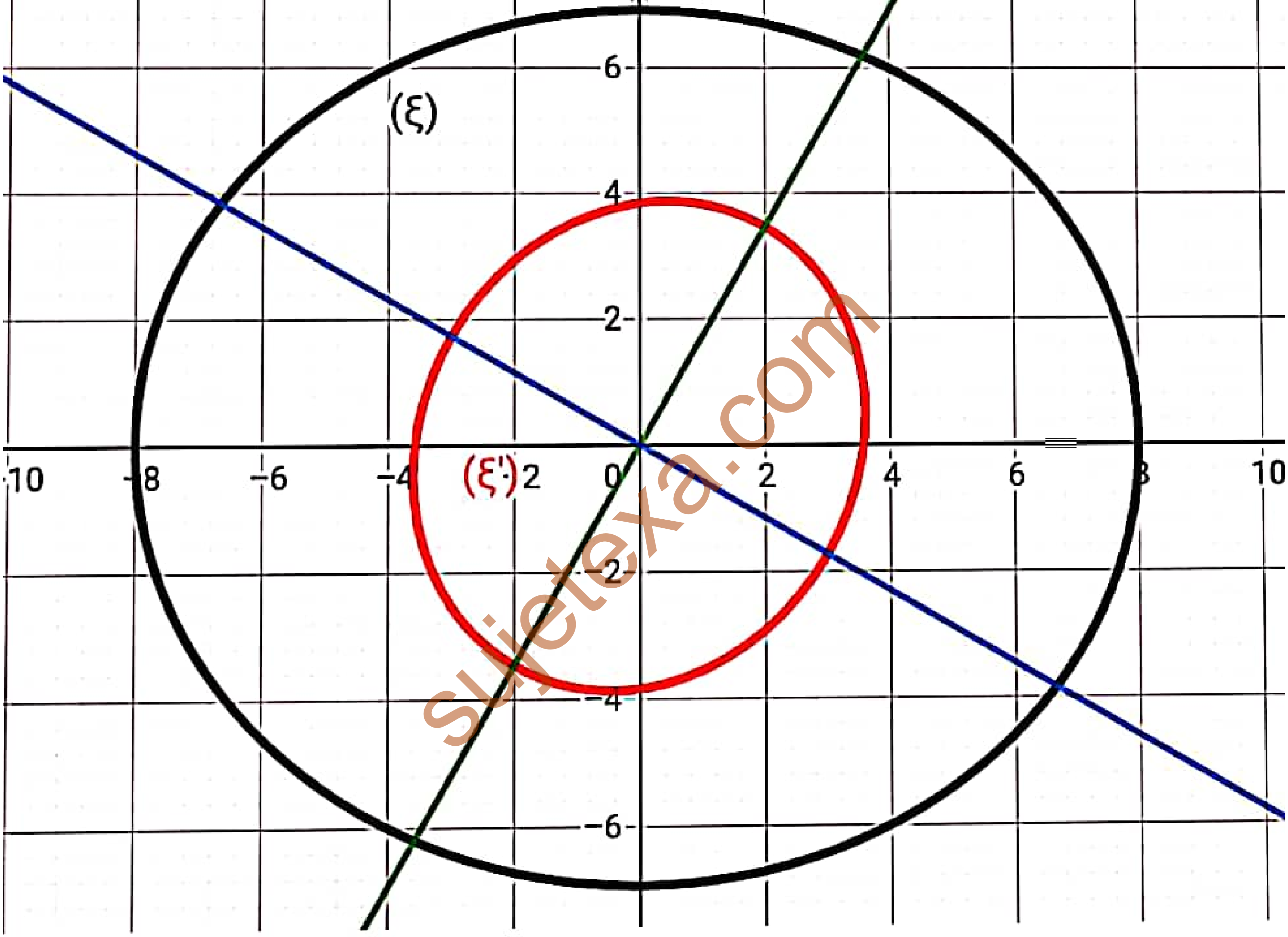
$\Leftrightarrow e^{t-1} = \dfrac{100}{5{,}01}$

$\Leftrightarrow t - 1 = \ln\left(\dfrac{100}{5{,}01}\right)$ 1,5pt C1 C2 C3

$\Leftrightarrow t = 1 + \ln\left(\dfrac{100}{5{,}01}\right) = 3{,}99\ldots$

$\boxed{\text{Après l'inauguration, il faudra 4 années à ce pays pour vider le gisement C de son contenu.}}$


1
0.5
−0.5
−1
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8


(ξ)
(ξ')
6
4
2
0
-2
-4
-6
-10
-8
-6
-4
2
4
6
8
10