SENEMATHS

COURS

3ème

EDITION

2017

ACTIVITES NUMERIQUES

Les Égyptiens ont utilisé les mathématiques principalement pour le calcul des salaires, la gestion des récoltes, les calculs de surface et de volume et dans leurs travaux d'irrigation et de construction. Ils utilisaient un système d'écriture des nombres additionnels (numération égyptienne). Ils connaissaient les quatre opérations, étaient familiers du calcul fractionnaire (basé uniquement sur les inverses d'entiers naturels) et étaient capables de résoudre des équations du premier degré par la méthode de la fausse position. Ils utilisaient une approximation fractionnaire. Les équations ne sont pas écrites, mais elles sous-tendent les explications données.

On découvre que les Chinois avaient développé des méthodes de calcul et de démonstrations qui leur étaient propres : arithmétique, fractions, extraction des racines carrées et cubiques, mode de calcul de l'aire du disque, volume de la pyramide et méthode du pivot de Gauss. Leur développement des algorithmes de calcul est remarquablement moderne. Mais on trouve aussi, sur des os de moutons et de bœufs, des gravures prouvant qu'ils utilisaient un système décimal positionnel (numération chinoise). Ils sont aussi à l'origine d'abaques les aidant à calculer. Les mathématiques chinoises avant notre ère sont principalement tournées vers les calculs utilitaires.

Les mathématiciens musulmans vont considérablement enrichir les mathématiques, développant l'embryon de ce qui deviendra l'algèbre, répandant le système décimal indien avec les chiffres improprement appelés chiffres arabes et développant des algorithmes de calculs.

CHAPITRE 1: RACINE CARREE

Durée : 12 heures

Objectifs de la leçon:

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- Connaître la définition et la notation de la racine carrée d'un nombre positif ou nul;
- Calculer la valeur exacte ou une valeur approchée d'une racine carrée
- Connaître la notation IR.
- Calculer une valeur numérique d'une expression littérale dans IR
- Connaître et utiliser les propriétés de la racine carrée
- Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient
- Comparer des réels avec des radicaux
- Connaître et utiliser les propriétés de la valeur absolue d'un réel
- Ecrire sans radical la racine carrée du carré d'un nombre
- Déterminer la valeur exacte d'une expression comportant un radical
- Déterminer une valeur approchée d'une expression comportant un radical : à partir d'un encadrement de ce radical ou avec la calculatrice.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.

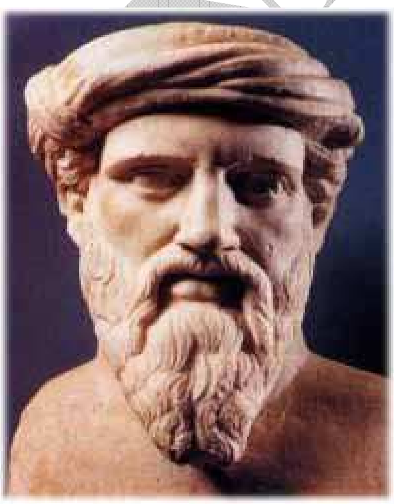
-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré-requis:

Egalités usuelles ; Pythagore.

Introduction :



La devise pythagoricienne était « Tout est nombre » au sens de nombres rationnels (quotient de deux entiers).
L'erreur des pythagoriciens est d'avoir toujours nié l'existence des nombres irrationnels.
Par la diagonale d'un carré de côté 1, ils trouvent le nombre inexprimable $\sqrt{2}$ qui étonne puis bouleverse les pythagoriciens.
Dans un carré d'une telle simplicité niche un nombre indicible et jamais rencontré jusqu'alors.
Cette découverte doit rester secrète pour ne pas rompre le fondement même de la Fraternité pythagoricienne jusqu'à ce qu'un des membres, Hippase de Métaponte, trahisse le secret.
Celui-ci périra "curieusement" dans un naufrage !

Déroulement de la leçon :

I. Définitions et notations, valeur exacte et valeur approchée :

1) Activité :

a) Calcule la longueur d'un côté d'un carré de 36 cm^2 d'aire.

b) Soit x la longueur d'une diagonale de ce carrée. Détermine la valeur de x^2.

c) Encadre x par deux nombres entiers naturels consécutifs.

d) Donne une valeur approchée de x à une unité près par défaut.

e) Donne une valeur approchée de x à deux unités près par excès.

2) Définitions et notations :

Soit ***a un nombre rationnel positif ou nul****, on appelle racine de a, le nombre positif ou nul dont le carré est a. On le note* $\sqrt{a}$ *. Le symbole «* $\sqrt{\ }$ *» est appelé radical et le réel a est le radicande.* $\sqrt{a}$ *se lit « racine carrée de a »*

Conséquence immédiate de la définition :

$(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = \| a \|$; $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ et $|-3| = 3$ donc $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 = |3|$

On a : $5^2 = 25$ *et* $(-5)^2 = 25$, le nombre positif dont le carré est 25 est 5 donc $\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$

NB : On ne peut pas parler de la racine carrée d'un nombre réel négatif.

3) Valeur exacte et valeur approchée :

Soit la racine carrée de 7, elle se note $\sqrt{7}$. La valeur exacte de ce nombre est égale à $\sqrt{7}$

$\sqrt{7}$ =2,64575131…..

2, 645 est la valeur approchée à 0,001 (10^{-3}) près par défaut et 2,646 est la valeur approchée par excès.

4) Exercice d'application :

Soit B= $\sqrt{11}$.

a) Calcule B^2.

b) Donne la valeur exacte de B.

c) Détermine la valeur approchée de B à deux unités près par défaut.

d) Donne la valeur approchée de B à 0,01 près par excès.

e) Encadre B à 10^{-2} près.

II. Nombres irrationnels : ensemble IR des nombres réels :

1) Activité :

a) A l'aide d'une calculatrice, détermine : $\sqrt{3}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{196}$

b) Parmi ces nombres, quels sont ceux qui ne sont pas des nombres rationnels ? Ceux qui sont des nombres rationnels ?

2) Définitions et notations :

- ✓ *Les nombres irrationnels sont les nombres qui ne sont pas rationnels.*
- ✓ *Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble IR des nombres réels.*
- ✓ *L'ensemble des nombres réels positifs est noté IR_+ : intervalle $[0 ; +\infty[$*
- ✓ *L'ensemble des nombres réels négatifs est noté IR_-: intervalle$]-\infty ; 0]$*
- ✓ *L'ensemble des nombres réels non nuls est noté IR^* : intervalle$]-\infty ; 0[U] 0 ; +\infty [$*
- ✓ *L'ensemble des nombres réels positifs non nuls est noté IR^*_+ : intervalle$] 0; +\infty [$*
- ✓ *L'ensemble des nombres réels négatifs non nuls est noté IR^*_-: intervalle$] -\infty ; 0 [$*
- ✓ *On a IN c Z c ID c Q c IR.*

3) Exercice d'application:

Recopie et complète les pointillés par $\in$ ou $\notin$:

$\sqrt{8}$ …IR; π…Q ; $\sqrt{1}$ …IR_-; $-\sqrt{12}$ …Q; $\sqrt{0{,}09}$ … IR^*_+; 2π….Q; 0, 03…IR^*

III. Propriétés de la racine carrée:

1) Activité :

Soient les nombres x=$\sqrt{4}\times\sqrt{25}$; y = $\sqrt{4x25}$; z=$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}}$; w= $\sqrt{\frac{4}{49}}$.

a) Calcule x et y, puis compare les résultats obtenus.

b) Fais de même pour z et w.

2) Propriétés :

a) *La racine carrée du produit de deux nombres réels positifs est égale au produit des racines de ces deux réels.*

Autrement dit : si $a\in IR_+ et\ \ b\in IR_+, alors\ \ \sqrt{a}\times\sqrt{b}\ =\sqrt{ab}$

Exemple : $\sqrt{4x9}$ = $\sqrt{4}$ x $\sqrt{9}$

$\sqrt{36}$ = 2x 3

6= 6 vrai

b) *Le quotient des racines carrées de deux nombres réels positifs est égal à la racine carrée du quotient de ces deux réels. Autrement dit, si* $a\in IR_+ ;et\ \ b\in IR^*_+, alors$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. *En particulier* $\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}$

Exemples : $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$

Remarque :

a et b étant deux nombres réels positifs ou nuls, si $\sqrt{a}$ = b, alors a= b^2

Attention : Si $a\le 0\ \ et\ \ b\le 0\ \ on\ \ a\ \ ab\ge 0\ \ donc$ $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ n'existent pas dans IR, mais $\sqrt{ab}$ existe.

Exemple : $\sqrt{-2}$ **et** $\sqrt{-3}$ n'existent pas dans IR, mais $\sqrt{(-2)\times(-3)}=\sqrt{6}$ existent car $(-2)\times(-3)=6$

Erreur fréquente : Certains qui apprennent mal leurs leçons, ont tendance à commettre les **erreurs** suivantes : $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ *ou* $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$ **(faux) .**

Contre-exemples pour illustrer la fausseté de ces résultats :

$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ et $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$, on voit bien que $7\neq 5$ donc $\sqrt{16}+\sqrt{9}\neq\sqrt{16+9}$

$\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$ et $\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ 2≠4, donc $\sqrt{25}-\sqrt{9}\neq\sqrt{25-9}$

Donc $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ *et* $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$

IV. Calculs sur les radicaux :

A. Sommes algébriques :

1) Activité :

a) Ecris les radicaux suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a ∈ IN et b ∈ IN :
$\sqrt{18}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$

b) Déduis-en une écriture simplifiée des sommes algébriques suivantes :

C= : $\sqrt{18}+2\sqrt{50}+3\sqrt{32}$

D= $\sqrt{50}-\sqrt{32}+\sqrt{48}$

2) Propriétés :

- ✓ *Quels que soient les réels b et c et le réel positif a, on a :*
  $b\sqrt{a}+c\sqrt{a}=(b+c)\sqrt{a}$ *et :* $b\sqrt{a}-c\sqrt{a}=(b-c)\sqrt{a}$
- ✓ *Si* $p\in IN$ *et* $a\geq 0$, *alors* $\sqrt{a^{2p}}=\sqrt{(a^p)^2}=a^p$

Exemple :

E= $\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{80}$

E= $(1+2-4)\sqrt{5}$

E= $-\sqrt{5}$

B. Expressions conjuguées ; rendre rationnel le dénominateur d'un quotient :

1) Activité :

Soients les nombres : F = $\frac{5}{\sqrt{2}}$; G = $\frac{4}{3\sqrt{7}}$; H = $\frac{1}{\sqrt{6}-2}$

Multiplie chacun de ces nombres par le nombre qui convient pour obtenir un dénominateur sans radical.

2) Vocabulaire :

Soient a un réel et b un réel positif

L'expression conjuguée de $(a+\sqrt{b})$ est $(a-\sqrt{b})$

L'expression conjuguée de $(a-\sqrt{b})$ est $(a+\sqrt{b})$.

Exemples :

L'expression conjuguée de $7+\sqrt{5}$ *est* $7-\sqrt{5}$

L'expression conjuguée de $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ *est* $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

3) Méthode :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un ou plusieurs radicaux, on multiplie le numérateur et le dénominateur de ce quotient par l'expression conjuguée du dénominateur.

Remarque : $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$. (On a multiplié le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$).

Exemple :

Soit à rendre rationnel les dénominateurs des rationnels suivants :

$I = \frac{2-\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}}$; $J=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-6}$; $K=\frac{7}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$.

C. Comparaison de réels comportant des radicaux :

1) Activité :

On donne $x=\sqrt{11}$ et $y=\sqrt{13}$

a) Calcule x^2 et y^2.

b) En utilisant une calculatrice, donne une valeur approchée à $\frac{1}{100}$ près par défaut de x et y.

c) Recopie et complète par le symbole $<$ *ou* $>$ qui convient : x^2…….y^2 ; x…….y

2) Propriétés :

✓ *Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrées.*

Autrement dit, si $x \in IR_+$, $y \in IR_+$ et $x^2 > y^2$, alors $x > y$.

si $x \in IR_+$, $y \in IR_+$ et $x^2 < y^2$, alors $x < y$.

Exemple :

Soit à comparer $2\sqrt{3}$ et $\sqrt{11}$

✓ *Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de celui de leurs carrées.*

Autrement dit, si $x \in IR_-$, $y \in IR_-$ et $x^2 < y^2$, alors $x > y$.

si $x \in IR_-$ $y \in IR_-$ et $x^2 > y^2$, alors $x < y$.

Exemple:

Soit à comparer $-3\sqrt{5}$ et $-4\sqrt{2}$

Remarque :

Pour comparer des nombres réels comportant des radicaux, on peut utiliser un encadrement de ces nombres ou une calculatrice pour obtenir leurs valeurs approchées.

Exemple :

Soit à comparer les nombres suivants : $17-3\sqrt{2}$ et $7+\sqrt{5}$

(On utilise une calculatrice, puis on encadre)

D. Intervalles dans IR :

Soient a et b des réels. Le tableau suivant résume la liste des intervalles dans IR :

Intervalles dans IR		
Ecriture	Intervalle	Ensemble des réels x tels que
[a ; b]	fermé en a et en b	$a \le x \le b$
[a ; b[	fermé en a et ouvert en b	$a \le x < b$
]a ; b]	ouvert en a et fermé en b	$a < x \le b$
]a ; b[	ouvert en a et b	$a < x < b$
[b ; +∞[	des nombres supérieurs ou égaux à b	$x \ge b$
]b ;+∞[	des nombres strictement supérieurs à b	$x > b$
]−∞; a]	des nombres inférieurs ou égaux à a	$x \le a$
]− ∞ ; a[	des nombres strictement inférieurs à a	$x < a$
]− ∞ ; +∞[	de tous les réels	$x \in IR$

E. **Exercice d'application :**

Soient : $a = 7 + 2\sqrt{2}$ $b = 7 - 2\sqrt{2}$

1) Calcule $\frac{a}{b}$
2) Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, encadre $\frac{a}{b}$.
3) Montre que $a + b$ et $a^2 + b^2$ sont des entiers.

V. Valeur absolue d'un réel :

1) Activité :

a) Recopie et complète le tableau suivant :

x	y	$/x/$	$\lvert y\rvert$	$/ x\times y/$	$/x/\times/y/$	$\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$
-3	-5						
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$						
$\sqrt{5}$	$- -\sqrt{3}$						

b) Pour chaque cas, compare $/ x\times y/$ et $/x/ \times /y/$, puis $\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert$ et $\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$

2) Propriétés :

✓ *La valeur absolue du produit de deux nombres réels est égale au produit des valeurs absolues de ces deux réels.*

Autrement dit, si $a\in IR$ et $b\in IR$, alors $|a \times b| = |a| \times |b|$.

Exemple :

$$|-2 \times (-3)| = |-2| \times |-3|$$
$$|6| = 2 \times 3 \text{ vrai}$$

✓ *La valeur absolue du quotient de deux nombres réels est égale au quotient des valeurs de ces réels.*

Autrement dit, si $a\in IR$ et $b\in IR^*$, alors $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Exemple: $\left|\frac{-\sqrt{5}}{8}\right| = \frac{|-\sqrt{5}|}{|8|} = \frac{\sqrt{5}}{8}$;

3) Exercice d'application :

Calcule les expressions suivantes sans la valeur absolue :

$$|-5 \times (-7)|;\quad \left|\frac{13}{-13}\right|;\quad |x \times y| \ (x \in IR_+ ; y \in IR_-);\quad \left|\frac{x}{y}\right| \ (x \in IR_- ; y \in IR_+)$$

VI. Racine carrée du carré d'un réel :

1) Activité :

a) Recopie et complète le tableau suivant :

x	X^2	$\sqrt{x^2}$	$\lvert x\rvert$
3			
-3			
$\sqrt{5}$			

b) Pour chaque cas, compare $\sqrt{x^2}$ et $|x|$

2) Propriété:

Pour tout nombre réel, la racine carrée de son carré est égale à la valeur absolue de ce nombre.

Autrement dit, si $a\in IR$, alors $\sqrt{a^2} = |a|$.

Remarques :

✓ $\sqrt{(a)^2}$ n'est pas toujours égale à $\left(\sqrt{a}\right)^2$.

Exemple :

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$; mais ($\sqrt{-3})^2$ n'existe pas.

✓ Si x∈ IR, alors $|x| = \begin{cases} x\text{ , } si\ x > 0 \\ 0, si\ x = 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$

Exemple: $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3; si\ x > 3 \\ 0; si\ x = 3 \\ -x+3; si\ x < 3 \end{cases}$

3) Exercice d'application :

Ecris sans radical les nombres réels suivants :

$\sqrt{(-30)^2}$; $\sqrt{\left(5-\sqrt{6}\right)^2}$; $\sqrt{(2x-1)^2}$; $\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}$; $\sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}$

CHAPITRE 2 : APPLICATIONS AFFINES ET APPLICATIONS AFFINES PAR INTERVALLES

Durée : 10 heures

Objectifs de la leçon :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

• Déterminer l'expression littérale d'une application affine connaissant :
- les images de deux réels
- le coefficient de l'application affine et l'image d'un réel par cette application.

• Utiliser l'expression littérale d'une application affine pour :
- calculer des images ou des antécédents
- établir des tableaux de valeurs.

• Représenter graphiquement une application affine dans un repère orthonormal.

• Utiliser la représentation graphique d'une application affine pour déterminer une image ou un antécédent

• Tracer la représentation graphique d'une application affine par intervalles du type :
$x \rightarrow |\, a\,x + b|$.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré- requis :

Application linéaire, vecteur, équations.

Introduction :

En géométrie, une application affine est une application entre deux espaces affines qui est compatible avec leur structure. Cette notion généralise celle de fonction affine de IR dans IR ($x \rightarrow ax + b$).

Dans son « Introductio in analysin infintorum » de 1748, Leonhard Euler introduit le mot « affinité » dans une mathématique, avec une acceptation différente, lorsqu'il discute les courbes dont les abscisses et les ordonnées respectives sont dans des rapports déterminés, mais pas nécessairement égaux : « à cause de l'espèce d'analogie qu'on remarque dans les courbes qu'on obtient de cette manière, on dira qu'elles ont entre elles de l'affinité.

Déroulement de la leçon :

I. Rappels sur les applications linéaires :

1) Définition et notation :

- ✓ *a étant un nombre rationnel, le procédé qui fait correspondre à tout nombre rationnel x le nombre rationnel ax est appelé application linéaire de coefficient a.*
- ✓ *Si f désigne cette application, on note* $f : x \to f(x) = ax$
- ✓ $f(x)$ *où* ax *est l'image de x par l'application f.*

Exemples :

f(x) = $5x$. L'image de x par f est $5x$. (5 est le coefficient de l'application linéaire f).
h(x)= (− 2,3)x. (h est application linéaire de coefficient − 2,3).

2) Proportionnalité et application linéaire :

- ➢ A toute situation de proportionnalité, on peut associer une application linéaire dont le coefficient de proportionnalité est le coefficient de l'application correspondante.
- ➢ Toute application linéaire traduit une situation de proportionnalité.

Exemples :

On donne les tableaux suivants :

2	3	5
10	15	−25

− 6	7	11
− 3	3, 5	5,5

a) Sont- ils des tableaux de proportionnalité ?

b) Si oui, détermine dans chaque cas l'application linéaire correspondante.

Solution : $-3 \div (-6) = 0{,}5$; $3{,}5 \div 7$=0,5 ; $5{,}5 \div 11 = 0{,}5$; *donc* f(x)= (0,5)x pour le deuxième tableau.

3) Propriétés des applications linéaires :

Soit f une application linéaire et a, b, et k, trois rationnels donnés.

- ✓ ***f(a+b) = f(a) + f(b).***
- ✓ ***f(ka) = k f(a).***

Exemple :

Soit f(x)= $\frac{2}{3}x$

a) Calcule f(3) et f(4)

b) Calcule de deux façons différentes f(7) et f(20)

Solution : f(3) = 2 ; f(4) = $\frac{8}{3}$. f(7) = $\frac{14}{3}$ et f(20) =$\frac{40}{3}$; f(7)= f(3+4)= f(3) + f(4) et f(20)= f(5×4)= 5f(4)

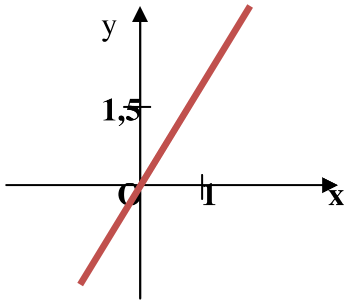
4) Représentation graphique d'une application linéaire :

Dans un repère d'axes perpendiculaires, la représentation graphique d'une application linéaire est une droite qui passe par l'origine.

Exemple :

Soit à représenter l'application linéaire suivante : $f(x) = (1,5)x$. Dans ce cas on cherche un point :

A(1 ; 1,5)



II. Applications affines :

1) Activité :

Pour être bénéficiaire d'un repas par jour, un élève doit verser 500 F de droit d'adhésion et payer 100 F par repas.

a) Recopie et complète le tableau suivant :

Nombre de repas dans l'année	2	5	15	30	70	90
Dépense						

b) Si x est le nombre de repas pris dans l'année et y, la dépense correspondante, alors recopie et complète : y = …..x + …..

2) Définition :

Soit a et b deux réels donnés.

On appelle application affine f de coefficient directeur a et de terme constant b, la correspondance qui à chaque réel x associe le nombre réel $ax+b$.

On dit que l'application affine f est définie par : $f(x)= ax + b$

f(x) ou y est appelé l'image de x par l'application f et x est l'antécédent de y.

Exemples

$f(x)= 2x+3$; $g(x)=-x+3$; $h(x)=2x$, $k(x)=5$ sont des applications affines de coefficient directeur respectivement : 2 ; -1 ; 2 ; 0.

3) Méthode :

Pour reconnaître une application affine f, on doit pouvoir identifier a et b dans l'expression f(x) écrite sous la forme $ax+b$.

4) Exercice d'application :

Les applications suivantes sont-elles affines ?

Si oui donne pour chacune son coefficient directeur.

$f(x)= 3x-1$; $g(x)=\frac{1}{2}x$; $t(x)= 2x^2+1$; $i(x)=-x-4$;

$u(x)=\frac{x+2}{x}$; $w(x)= 2x+3-\sqrt{5}\,x$; $m(x)=\frac{2x-1}{4}$.

III. Représentation graphique d'une application affine:

1) Activité :

On donne l'application affine f définie par $f(x)= 2x + 1$

a) Recopie et complète le tableau suivant :

x	0	1	2	1,5	-1	-2	$-0,5$
f(x)							

b) Place les points de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ dans un repère orthonormal.

c) Que constates-tu ?

d) Que peux-tu déduire de cette représentation graphique.

2) Définitions :

- ✓ *La représentation graphique d'une application affine définie par $f(x)= ax+b$ est la droite(Δ) d'équation $y= ax+b$.*
- ✓ *a est appelé coefficient directeur (ou pente) de la droite.*
- ✓ *b est appelé l'ordonnée à l'origine.*

Remarque :

L'intersection de la droite (Δ) d'équation $y= ax+b$ avec l'axe des ordonnées est un point dont l'ordonnée est b.

3) Méthodes :

Pour représenter une application affine f définie $f(x)= ax +b$ dans un repère orthonormal, on utilise l'une des méthodes suivantes :

- ✓ On détermine les coordonnées de deux points A et B de (Δ) et on trace la droite (AB) qui correspond à la droite (Δ) d'équation $y= ax+ b$.
- ✓ On peut déterminer aussi les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}(1; a)$ et les coordonnées d'un point C de la droite (Δ) équation $y= ax+b$. Ensuite, on trace la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Remarques :

- ✓ Une application linéaire est une application affine définie par $f(x) = ax$.
  Sa représentation graphique est la droite d'équation $y= ax$ qui passe par l'origine du repère.
- ✓ Une application constante est une application affine définie par $f(x)= b$.
  Sa représentation graphique est la droite d'équation y= b qui est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point de coordonnées (0 ; b).

Exemple :

Soit à représenter graphiquement l'application affine f définie par $f(x)=2x-3$.

1ère méthode :

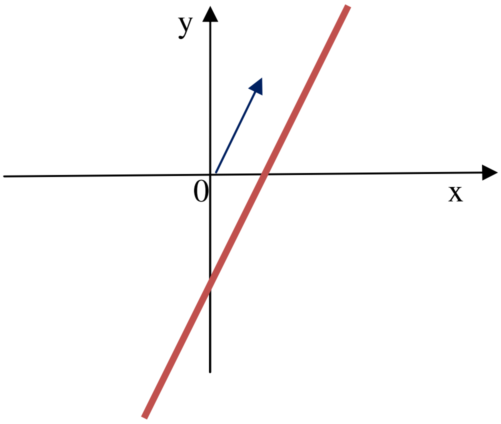
$f(x) = 2x - 3$;

Si $x= 0$; $y= -3$; donc A(0 ;−3)

Si $x= 1$; $y=-1$; donc B(1 ;−1)

2ème méthode :

$f(x) = 2x - 3$ équivaut $y = 2x - 3$. Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur, donc $\vec{u}\,(1; 2)$



Attention : ***Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas la représentation graphique d'une application affine.***

4) Exercice d'application :

Représente dans un même repère orthonormal les applications affines définies par :
$f(x) = 3x - 2$; $g(x) = 2$; $h(x) = -4x$.

IV. Variations d'une application affine :

1) Activité :

f, g et h sont des applications affines définies par les tableaux suivants :

x	− 2	− 1	0	1	2	3
f(x)	−3	− 1	1	3	5	7

1er tableau

x	−2	−1	0	1	2	3
g(x)	5	3	1	− 1	− 3	− 5

2ème tableau

x	− 2	−1	0	1	2	3
h(x)	1	1	1	1	1	1

3ème tableau

a) Les valeurs de $f(x)$ sont-elles rangées dans le même ordre que celles de x ?

b) En est-il de même pour les valeurs de $g(x)$? $h(x)$?

2) Sens de variation d'une application affine :

❖ Dans un tableau de valeurs obtenu à partir d'une application affine :

✓ Si les valeurs de x et $f(x)$ sont rangées dans le même ordre, alors l'application f est dite croissante.

Exemple : 1er tableau (voir activité)

✓ Si les valeurs de x et celles de $f(x)$ sont rangées dans des ordres contraires, alors l'application f est dite décroissante.

Exemple : 2ème tableau (voir activité)

✓ Si les valeurs de x sont rangées dans un certain ordre et que celles de $f(x)$ restent constantes, alors l'application f est dite constante.

Exemple : 3ème tableau (voir activité)

Remarque :

Dans un tableau de valeurs, il faut prendre soin de ranger les valeurs de *x*, soit dans un ordre croissant, soit dans un ordre décroissant.

Exemple : Soit à ranger le tableau suivant dans un ordre.

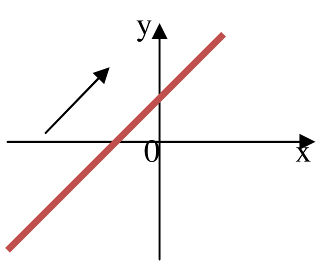
x	4	5	1	3
f(*x*)	6	7	2	4

Solution :

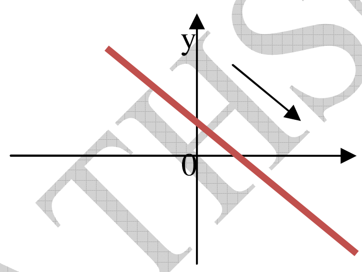
x	1	3	4	5
f(*x*)	2	4	6	7

- Soit f une application affine définie par $f(x) = ax + b$
  - ✓ f est croissante si a est positif.
    Exemple : $f(x) = 2x - 5$, f est croissante car a= 2.
  - ✓ f est décroissante si a est négatif.
    Exemple : $f(x) = -3x + 4$, f est décroissante car a= − 3
  - ✓ f est constante si a est nul.
    Exemple : $f(x) = 7$, f est constante car a= 0.

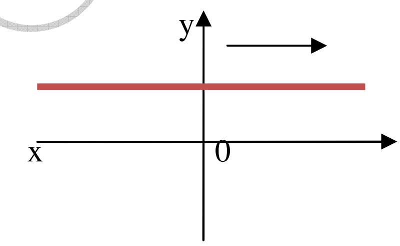
Interprétation graphique :



f croissante



f décroissante



f constante

Remarque :

Déterminer le sens de variation d'une application affine, c'est déterminer si elle est croissante, ou décroissante ou constante.

3) **Exercice d'application :**

Détermine les sens de variations de f, g, h, i, k et m définies par : $f(x) = 2x - \frac{3}{5}$; $g(x) = -\sqrt{3}\,x + 5$; $h(x) = 4$; $i(x) = \frac{x-7}{7}$; $k(x) = 6 - x$; $m(x) = -8$

Solution : f est croissante car a= 2 ; g est décroissante car a= $-\sqrt{3}$; h est constante car a= 0 ; i est croissante car a= $\frac{1}{7}$; k est décroissante car a= − 1 ; m est constante car a= 0.

V. Détermination de l'expression littérale d'une application affine :

1) **Activité :**

Soit f l'application affine définie par f(1) = − 1 et f(2) = 1. Etant donné que $f(x) = ax + b$:

a) Recopie et complète f(1) =…+b ou − 1= a+… (1) ; f(2) =2a+ … ; ou 1 = …+ b (2)

b) De l'égalité (1), donne a en fonction de b.

c) Dans l'égalité (2), remplace a par sa valeur trouvé dans l'égalité (1) et déduis de l'égalité obtenue la valeur de b.

d) Calcule alors la valeur de a et déduis $f(x)$.

2) Méthodes :

Déterminer l'expression littérale $f(x) = ax+b$ de l'application affine f, revient à trouver les valeurs de a et b. Pour cela, on procède comme suit :

a) Si on connait l'image d'un réel donné et le coefficient directeur de l'application f, alors on détermine b puis on en déduit $f(x)$.

Exemple :

Soit à déterminer l'application affine f définie par : f(2) $=-3$ et de coefficient directeur est -2.

$f(x)= ax+b$; $f(x)=-2x+b$ et $f(2)=-4+b=-3$, donc $b=1$ et $f(x)=-2x+1$.

b) Si on connait les images de deux réels donnés, alors:

- ✓ On remplace dans $f(x) = ax+b$, $f(x)$ et x par leurs valeurs respectives pour obtenir deux équations.
- ✓ On exprime une des inconnues d'une équation en fonction de l'autre et ensuite on la remplace dans l'autre équation pour trouver les inconnues a et b.

Exemple :

Soit à déterminer l'application affine f définie par : f(1)$=-1$ et f(2)$=1$

(1)$=a+b=-1$ (1) et f(2)$=2a+b$ (2)

1)$\Rightarrow b=-a-1$ puis on remplace (1) dans (2)$\Rightarrow 2a-a-1=1$; donc $a=2$ et $b=-3 \Rightarrow$ $f(x)=2x-3$.

3) Exercice d'application :

Détermine les expressions littérales des applications affines f et g dont les droites (représentations graphiques) respectives : (Δ) et (Δ') sont telles que :

a) (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; 3) et passe par le point A(5 ; 6).

b) (Δ') passe par les points B(6 ; 2) et C(-3 ; 1).

VI. Applications affines par intervalles :

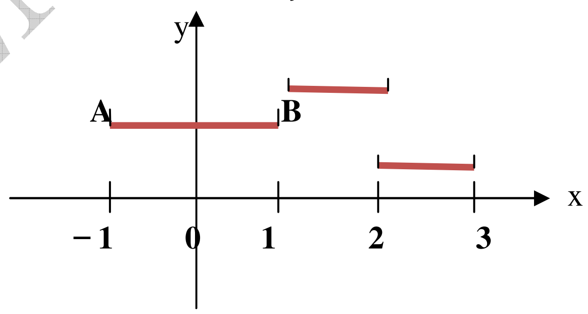
A. Applications constantes par intervalles :

La représentation graphique d'une application affine par intervalles est de segments de droites.

Exemple :

Soit à représenter l'application affine f suivante :

sur $]-1;1]$; $f(x) = 2$; sur $]1;2[$; $f(x) = 3$; sur $[2;5]$; $f(x) = 1$



Sur $]-1;1]$ $est\ le\ segment$ $]A;B]$ $contenant\ le\ point$ $C(0;2)$

B. Application affine par intervalles de type : f(x)= $|ax+b|$

1) Activité :

Soit f l'application affine définie par f(x)= $|2x-4|$

a) Ecris *f(x)* sans la valeur absolue dans l'intervalle$]-\infty;2]$.

b) Dans un repère orthonormal (O ;I ;J), représente f(x) en te limitant à l'intervalle $]-\infty;2]$.

c) Ecris *f(x)* sans la valeur absolue dans l'intervalle$]2;\ +\infty]$.

d) Représente *f(x)* dans le repère en te limitant à l'intervalle $]2;\ +\infty]$.

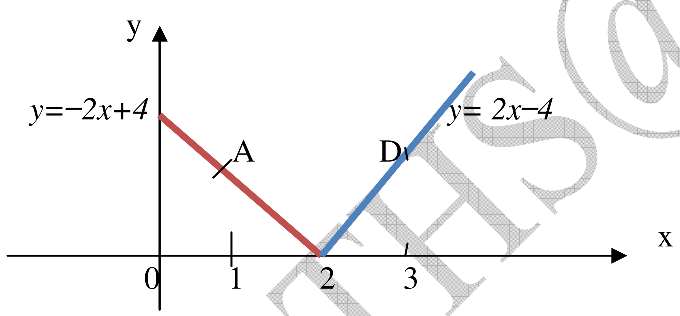
Solution :

Sur $]-\infty;2]$; $f(x) = -2x+4; si\ x \le 2\ ; c'està\ dire\ x \in\ ]-\infty;2]$

On cherche deux points A(1 ; 2) ; B(2 ;0)

Sur $[2;\ +\infty[$; $f(x) = 2x\ -4; si\ x \ge 2\ ; c'està\ dire\ x \in [2;\ +\infty[$

On cherche deux points C(2 ; 0) ; D(3 ;2)



2) Définition :

La représentation graphique d'une application affine par intervalles de type f(x)= / ax+b/ est de demi-droites.

3) Méthode :

Pour représenter graphiquement une application affine f du type f(x) = $|ax+b|$, on procède comme suit :

- ✓ Exprimer f(x) sans le symbole de la valeur absolue sur l'intervalle $\left]-\infty;\ \frac{b}{a}\right]$, puis dans un repère orthonormal (O, I, J), représente f en te limitant à cet intervalle.
- ✓ Exprime f(x) sans le symbole de la valeur absolue sur l'intervalle $\left[-\frac{b}{a};\ +\infty\right[$, puis dans le même repère, représente f en te limitant à cet intervalle.

Exemple :

Soit à représenter dans un repère orthonormal l'application affine f définie par :

f(x) = / 2x− 1 /

4) Exercice d'application :

Représente dans un repère orthonormal l'application affine définie par : *g(x)= / x− 1 / .*

CHAPITRE 3: EQUATIONS ET INEQUATIONS DU 1er DEGRE A UNE INCONNUE

Durée : 10 heures

Objectifs de la leçon :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations de types :
$|ax + b| = c$ et $|ax + b| = |cx + d|$.

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations se ramenant à la forme : $ax^2 + b = 0$.

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations du type :
$(ax + b)(cx + d) \leq 0$.

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations se ramenant au type : $ax^2 + b \leq 0$.

• Résoudre des problèmes en utilisant les équations et inéquations ci-dessus.

• Vérifier qu'un nombre est solution ou non d'une équation, d'une inéquation.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré-requis :

1 - Equations du type : $ax + b = 0$ dans Q

2 - Inéquations du type : $ax + b \leq 0$ dans Q

3 -Intervalles dans Q : intersection et réunion

4 - Représentation graphique sur une droite de l'ensemble des solutions d'une inéquation.

5 - Conditions pour qu'un produit soit nul.

6 - Factorisation et Développement.

7 - Valeur absolue - Distance.

Introduction :

Dans l'Antiquité, vers -2000 ans avant JC, les Babyloniens savaient déjà résoudre des problèmes par équations et inéquation, mais leur résolution n'a rien à voir avec les techniques actuelles. Un exemple de problèmes babyloniens : «J'ai une pierre mais je ne l'ai pas pesée. Après avoir enlevé un septième de son poids, j'ai pesé le tout j'ai trouvé : 1 ma-na (unité de masse). Quel était le poids de la pierre à l'origine ? » résolution par méthode de fausse position : on donne une valeur arbitraire à la pierre, on regarde combien cela fait, et par proportionnalité on trouve la vraie masse de la pierre.

Ce chapitre, abordera l'étude de certaines équations et inéquations du second degré dont la résolution fait appel à des factorisations vues en 4ème. Elles nous serviront à résoudre des problèmes concrets.

Déroulement de la leçon :

I. Equations à une inconnue

A. Equation des types : $|ax+b| = c$ et $|ax+b| = |cx+d|$

1) Activité :

a) Utilise la propriété $|A| = |B|$ équivaut à $A = B$ ou $A = -B$ pour exprimer $|3x-4| = |x+2|$ sans le symbole de la valeur absolue.

b) Déduis-en les solutions de l'équation $|3x-4| = |x+2|$.

2) Méthode

Pour résoudre une équation du type $|ax+b| = c$ ou $|ax+b| = |cx+d|$, on utilise la propriété $|A| = |B|$ équivaut à $A = B$ ou $A = -B$, on résous les équations ainsi obtenues.

Exemples :

Soit à résoudre dans IR les équations suivantes :

$|x-2| = |3x-4|$; $|2x-1| = 3$.

Remarque :

La valeur absolue n'est jamais négative.

3) Exercice d'application :

Résous dans IR les équations suivantes :

$|x+1| = |x-5|$; $|2x-7| = |5-3x|$; $|x-\sqrt{3}| = 2$; $|7x-1| = -6$.

B. Equations du type : $ax^2 + b = 0$

1) Activité :

On donne $A = 4x^2 - 9$.

a) Calcule la valeur numérique de A lorsque $x = 0$; $x = \frac{-3}{2}$; $x = \sqrt{3}$; $x = \frac{3}{2}$

b) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles A=0 ?

c) Factorise A, puis résous l'équation A=0.

2) Méthode :

Pour résoudre une équation se ramenant à la forme $\mathbf{ax^2 + b = 0}$, où a et b étant des réels donnés :

- ✓ On factorise si possible le 1er membre c'est-à-dire l'écrire sous la forme $(ax+b)(cx+d)$.
- ✓ On utilise la propriété suivante : « un produit de facteurs est nul si l'un au moins de ses facteur est nul », c'est-à-dire AB=0 équivaut à A=0 ou B=0
- ✓ On résous les équations obtenues.

Exemple :

Soit à résoudre dans IR l'équation suivante : $9x^2 - 2 = 0$

$S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{3} ; \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$.

3) Exercice d'application :

Résous dans IR les équations suivantes, puis vérifie pour chacune d'elles que les réels obtenus sont bien des solutions de l'équation initiale :

$4x^2 - 1 = 0$; $2x^2 + 5x = 0$; $(x-3)(x+5) = x^2 - 11$; $x^2 + 7 = 0$; $x^2 + 1 = x^2 + 4$; $x^2 - 5 = 0$.

II. Inéquations :

A. Inéquations du type : *(ax+b)(Cx+d)≤0*

1) Activité :

a) Résous dans IR : $2-x=0$; $2-x<0$; $2-x>0$.

b) Résous dans IR : $2+x=0$; $2+x<0$; $2+x>0$.

c) Utilise les résultats obtenus en a) et b) pour compléter le tableau ci-dessous en remplaçant chaque point d'interrogation par la valeur ou le signe (+) ou (−) qui convient.

Valeur de x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $2-x$		?		?	?	?	
Signe de $2+x$		?	?	?		?	
Signe de $(2-x)(2+x)$		?	?	?	?	?	

2) Méthodes :

Pour résoudre une inéquation du type $(ax+b)(cx+d)\leq 0$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- ✓ Résoudre les systèmes d'inéquations équivalents puis donner l'ensemble des solutions.
- ✓ Remplir le tableau de signe correspondant pour déterminer l'ensemble des solutions.

Remarque :

≤ peut être remplacée par $<$; $>$ *ou* $\geq$

Exemple1 :

Soit à résoudre dans IR l'inéquation suivante en utilisant les systèmes correspondants :

$(x-2)(x+3)\leq 0$ équivaut à $(I)\begin{cases}x-2\leq 0\\x+3\geq 0\end{cases}$ ou $(II)\begin{cases}x-2\geq 0\\x+3\leq 0\end{cases}$

$(I)\begin{cases}x\leq 2\\x\geq -3\end{cases}$, ou $(II)\begin{cases}x\geq 2\\x\leq -3\end{cases}$

$-\infty$ ////// -3 2 \\\\\\ $+\infty$

S(I)=$[-3;2]$; $S(II)=\emptyset$ et $S=S(I)US(II)=[-3;2]$

Exemples2 :

Soit à résoudre dans IR les inéquations suivantes en utilisant le tableau de signe

- ✓ $(x-2)(x+3)>0$;

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

S= $]-\infty;\ -3]U]2;\ +\infty[$

- ✓ $(x-2)(x+3)<0$; S= $]-3\ ;\ 2\ [$

B. Inéquations du type : $ax^2 + b \leq 0$

1) Activité :

a) Calcule B= $9x^2 - 25$ pour chacune des valeurs suivantes de x :

$x = 0$; $x = -1$; $x = \sqrt{2}$; $x = 1{,}2$.

b) Peux-tu donner toutes les valeurs de x pour lesquelles $9x^2 - 25 < 0$?

c) Factorise B= $9x^2 - 25$ et résous dans IR l'inéquation B< 0.

2) Méthode :

Pour résoudre une inéquation se ramenant à la forme $ax^2 + b \leq 0$ où a et b étant des réels donnés, on procède comme suit :

- ✓ On factorise si possible le premier membre sous la forme $(ax + b)(cx + d)$.
- ✓ On résous l'inéquation produit obtenue.

Remarque :

$\leq$ peut être remplacée par < ; > ou $\geq$.

Exemple :

Soit à résoudre dans IR l'inéquation suivante : $x^2 - 3 \geq 0$. Pour cela, on factorise : $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \geq 0$ et on utilise un tableau de signe donc S= $]-\infty;\ -\sqrt{3}\,] U [\sqrt{3};\ +\infty[$.

3) Exercice d'application :

Résous dans IR les inéquations suivantes :

$25x^2 - 16 \leq 0$; $x^2 - 2x > 0$; $x^2 - 6x + 9 < 0$; $x^2 + 4 < 0$; $x^2 + 3 > 0$.

III. Résolution de problèmes :

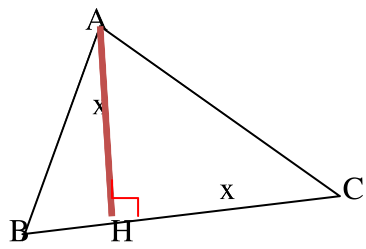
1) Activité :

Sur la figure ci- dessous : BH= 6 cm et AH= HC= x

a) Précise le signe du nombre x.

b) Exprime l'aire du triangle ABC à l'aide de x.

c) Calcule x lorsque l'aire du triangle ABC est 20 cm^2.



Solution :

a) x est positif.

b) Aire(ABC)=$\frac{BC \times AH}{2} = \frac{(BH+HC)AH}{2} = \frac{(6+x)x}{2}$

c) $\frac{x^2+6x}{2} = 20 \Rightarrow x^2 + 6x - 40 = 0$; $donc\ x^2 + 6x + 9 - 49 = 0$

$(x+3-7)(x+3+7)=0$; $x=4$ *ou* $x=-10$, or x positif, donc $\boldsymbol{x = 4}$.

2) Méthode :

Pour résoudre un problème, on procède comme suit :

- ✓ On fait une lecture sélective de l'énoncé.
- ✓ On choisit l'inconnue, guidé par ce qu'on te demande.
- ✓ On met en équation ou en inéquation sous les contraintes des données.
- ✓ On résout l'équation ou l'inéquation ainsi obtenue.
- ✓ On donne les solutions mathématiques.
- ✓ On vérifie les solutions trouvées.
- ✓ On donne les solutions du problème en interprétant les solutions mathématiques.

3) <u>Exercice d'application :</u>

a) Si on augmente le côté d'un carré de 2cm, son aire devient égale à 9cm^2.
Calcule la longueur initiale du côté de ce carré.

b) Le produit de deux entiers naturels consécutifs est 6.
Calcule ces entiers naturels.

<u>Remarque :</u> Condition d'existence :

Une condition d'existence est une condition qui fait que la fraction puisse exister.
Pour qu'une fraction existe, il faut que son dénominateur soit différent de zéro (0).

<u>Exemples :</u>

Donne la condition d'existence des réels suivants :

$$A = \frac{-5x(x-3)}{(x-3)(2x-3)}\ ; \qquad B = \frac{2x-1}{x^2-1}; \qquad C = \frac{3x+1}{x+4}; \qquad D = \frac{3x-1}{x}$$

A existe si et seulement si $(x-3)(2x-3) \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 3$ *et* $x \neq \frac{3}{2}$.

B existe si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$ *et* $x \neq -1$.

C existe si et seulement si $x+4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -4$.

D existe si et seulement si $x \neq 0$.

CHAPITRE 4: EQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU 1ER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

Durée : 8 heures.

Objectifs de la leçon:

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une équation du premier degré à deux inconnues.
- Vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'une équation à deux inconnues du type indiqué
- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations à deux inconnues du type indiqué par substitution, par addition, par comparaison.
- Reconnaître la position relative des droites dont les équations interviennent dans le système.
- Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations à deux inconnues du type indiqué.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré-requis :

Représentation graphique d'une droite dans le plan.

Introduction :

Dans l'Antiquité, vers -2000 ans avant JC, les Babyloniens savaient déjà résoudre des problèmes par équations et systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues. L'étude des équations et des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues nous permettra de résoudre des problèmes concrets auxquels nous sommes souvent confrontés en économie, en astronomie,…

Déroulement de la leçon :

I. Equation à deux inconnues du type : $ax + by + c = 0$

1) Activité :

Dans la boutique de Tanor, le prix de trois crayons noirs dépasse de 25F celui d'un stylo.

a) En désignant par x le prix d'un crayon noir et par y celui d'un stylo, traduis la phrase précédente par une équation.

b) Trace la droite(Δ) dont tu viens de trouver à la question a). (On prendra comme échelle : 1cm pour 25F).

c) Détermine graphiquement :

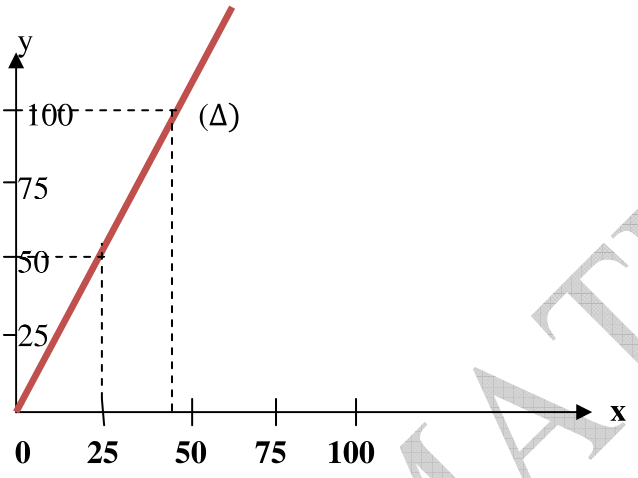
- ✓ Le prix d'un stylo, si un crayon noir coûtait 25F.
- ✓ Le prix de crayon noir, si un stylo coûtait 100F

Solution :

$3x - y = 25$; A(25 ; 50) ; B(50 ; 125)

Si un crayon noir coûtait 25F, alors un stylo va coûter 50F

Si un stylo coûtait 100F, alors un crayon noir va coûter 41,6F



2) Solution d'une équation du premier degré à deux inconnues :

Une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax+by+c=0$ obtenue graphiquement est un couple de réels, coordonnées d'un point de la droite d'équation $ax+by+c=0$.

Une telle équation admet une infinité de couples de solutions.

Exemple :

$2x - y + 1 = 0$ est une équation du 1er degré à deux inconnues;

Si l'on remplace x par 1 on obtient :

$2x1 - y + 1 = 0$, donc: $y = 3$; si $x=0$, $y= 1$

On dit que les couple (1 ; 3) et (0 ;1) sont des solutions de l'équation : $2x - y + 1 = 0$.

3) Méthodes :

❖ Pour trouver graphiquement une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax+by+c= 0$, on procède de la manière suivante :

- ✓ Tracer d'abord dans un repère orthonormal la droite d'équation $ax+by+c=0$.
- ✓ Choisir ensuite un point sur cette droite.
- ✓ Projeter ce point orthogonalement sur les deux axes et on obtient un couple de coordonnées.
- ✓ Les solutions de l'équation $ax+by+c=0$, sont les couples$(x ;y)$ coordonnées des points de la droite d'équation $ax+by+c=0$

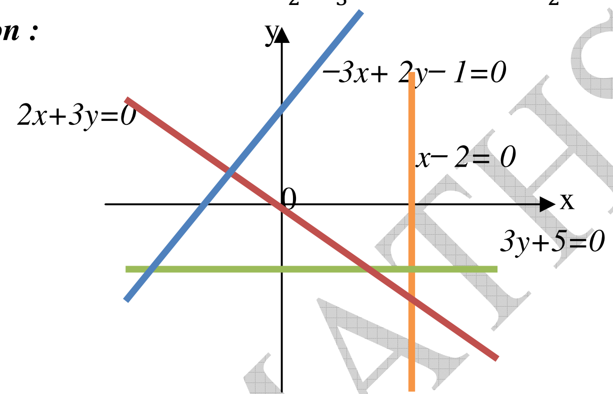
- Pour vérifier graphiquement qu'un couple de réels donnés est solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax+by+c=0$, on procède de la manière suivante :
  - ✓ Tracer d'abord dans un repère orthonormal la droite d'équation $ax+by+c=0$.
  - ✓ Placer ensuite dans le même repère, le point ayant pour coordonnées ce couple de réels donnés.
  - ✓ Si le point qu'on vient de placer se trouve sur la droite déjà tracée, alors ses coordonnées sont une solution de l'équation $ax+by+c=0$.
    Cependant, si le point ne se trouve pas sur la droite tracée, alors ses coordonnées ne sont pas une solution de l'équation $ax+by+c=0$.

4) Exercice d'application :

a) Résous graphiquement dans IR^2 les équations suivantes (dans un même repère orthonormal) : $-3x+2y-1=0$; $3y+5=0$; $x-2=0$; $2x+3y=0$

b) Vérifie graphiquement si les couples de réels suivants sont des solutions de chacune des équations ci-dessus : $(2\,;0)$; $(\frac{5}{2};\frac{-5}{3})$; $(1\,;2)$; $(0\,;\frac{1}{2})$

Solution :



II. Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues du type :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

A. Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues par substitution :

1) Activité :

Dans la boutique de Tanor, Mohamed achète 4 stylos et un crayon noir ; il paie 225F.
Dans la même boutique, Cheikh achète un crayon noir et un stylo et paie 75 F.

a) En désignant x le prix d'un stylo et y celui d'un crayon noir, traduis ces deux phrases précédentes par deux équations.

b) Dans la première équation, exprime y en fonction x et remplace le résultat trouvé dans la deuxième équation.
Déduis-en le prix d'un stylo et celui d'un crayon noir.

Solution :

$4x+y=225$; $x+y=75$

$x=50$ et $y=25$

Un stylo coûte 50F et un crayon noir coûte 25 F.

ibselam85@yahoo.fr

2) Méthode :

Pour résoudre dans IR^2 un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode de substitution, il faut :

- ✓ Exprimer *y* en fonction de *x* dans l'une des équations.
- ✓ Substituer à *y* cette expression ainsi obtenue dans l'autre équation.
- ✓ Résoudre l'équation en x ainsi obtenue.
- ✓ Remplace *x* dans l'expression de y trouvée dans la première étape et *x* par sa valeur réelle si elle existe pour obtenir celle de *y*.
- ✓ Vérifier que le couple (*x ; y*) de réels obtenus (s'il existe) est à la fois solution des deux équations.
- ✓ Donner la solution mathématique du système.

Remarque :

On peut appliquer aussi la même démarche en exprimant à la première étape x en fonction de y.

Exemple :

Soit à résoudre dans IR^2 le système suivant en utilisant la méthode de substitution :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 200 & (1) \\ x + y = 1600 & (2) \end{cases}$$

(1) ⇒ y = 1600 – x ; (2) ⇒2x - 3(1600 - x) = 200 ; x = 1000 et y = 600

Donc le couple de réels (1000 ; 600) est la solution du système. On note $S = \{(1000,600)\}$

3) Exercice d'application :

Résous chacun des systèmes suivants dans IR^2 par la méthode de substitution :

a) $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$; $b)$ $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = -4 \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = -3 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$; $d)$ $\begin{cases} 3x + y = -3 \\ -y + x = -1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

B. Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues par comparaison :

1) Activité :

Soit le système : $\begin{cases} 4x + y = 225 \\ x + y = 75 \end{cases}$.

a) Dans chacune de ces deux équations, exprime *y* en fonction de *x*.

b) Compare ces deux expressions de *y*.

c) Résous l'équation en *x* obtenue puis déduis-en *y*.

d) Vérifie que le couple (*x ;y)* obtenu est une solution du système.

2) Méthode :

Pour résoudre dans IR^2 un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par comparaison, il faut :

- ✓ Exprimer *y* en fonction de x dans chacune des équations.
- ✓ Compare les deux expressions de *y* en fonction de *x*.
- ✓ Résoudre l'équation en *x* obtenue.
- ✓ Calculer *y* en remplaçant *x* par sa valeur réelle dans l'une des expressions de *y* en fonction de *x*.
- ✓ Vérifier que le couple de réels (*x ;y*) obtenu (s'il existe) est solution des deux équations du système.
- ✓ Donner la solution mathématique du système.

Remarque :
On peut adopter la même démarche en exprimant x en fonction de y.

Exemple :
Soit à résoudre dans IR² le système suivant en utilisant la méthode de comparaison :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 200\ (1) \\ x + y = 1600\ (2) \end{cases}$$

(1) :x= $\frac{3y+200}{2}$; (2) $\Rightarrow x = 1600 - y$; x=x⇒ $\frac{3y+200}{2} = 1600 - y$; donc y= 600 et x=1000

S= $\{(1000; 600)\}$.

3) Exercice d'application:

Résous dans IR² les systèmes suivants en utilisant la méthode par comparaison :

a) $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ -x - y + 3 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -y + 4 = x - 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = \frac{3}{2} + 4 \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases}$

C. Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues par addition (ou par combinaison) :

1) Activité :

Soit le système $\begin{cases} 4x + y = 225\ (1) \\ x + y = 75\ \ (2) \end{cases}$.

- **a)** Multiplie la deuxième équation par (−) et nomme l'équation obtenue (3).
- **b)** Additionne membre à membre les équations (1) et (3).
- **c)** Résous l'équation en x obtenue, puis déduis-en y.
- **d)** Vérifie que le couple $(x ;y)$ obtenu est solution du système.

2) Méthode :

Pour résoudre dans IR² un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par addition (ou par combinaison), on procède comme suit :

- Pour éliminer les x :
  - ✓ On multiplie les membres de chaque équation par le nombre qui convient afin que les coefficients en x dans les deux équations soient opposés.
  - ✓ On additionne membre à membre les nouvelles équations obtenues.
  - ✓ On résous l'équation en y ainsi obtenue.
- Pour éliminer les y, on procède de la même manière :
  - ✓ On vérifie que le couple $(x ;y)$ obtenu (s'il existe) est la solution du système proposé
  - ✓ On donne la solution mathématique du système.

Remarque :
Après avoir utilisé la méthode par addition pour trouver une valeur, on peut utiliser la méthode par substitution pour trouver l'autre valeur.

Exemple :

Soit à résoudre dans IR^2 le système suivant en utilisant la méthode par addition :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 200 & (1) \\ x + y = 1600 & (2) \end{cases}$$

On multiplie chaque membre de (2) par 3.

On obtient le système $\begin{cases} 2x - 3y = 200 \\ 3x + 3y = 4800 \end{cases}$

On additionne membre à membre les deux équations et on obtient:

$2x - 3y + 3x + 3y = 200 + 4800$

Donc $x = 1000$

On remplace x par cette valeur dans (1) et on obtient : $1000 + y = 1600$, donc $y = 600$

Le couple de réels (1000 ; 600) est la solution du système.

On note $S = \{(1000{,}600)\}$.

D. Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues : Interprétation graphique

1) Activité :

On considère le système suivant : $\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \ (1) \\ -2x + y + 1 = 0 \ (2) \end{cases}$

L'équation (1) est celle de $(\Delta 1)$ et l'équation (2) celle de $(\Delta 2)$.

a) Trace dans un même repère orthonormal les droites $(\Delta 1)$ et $(\Delta 2)$.

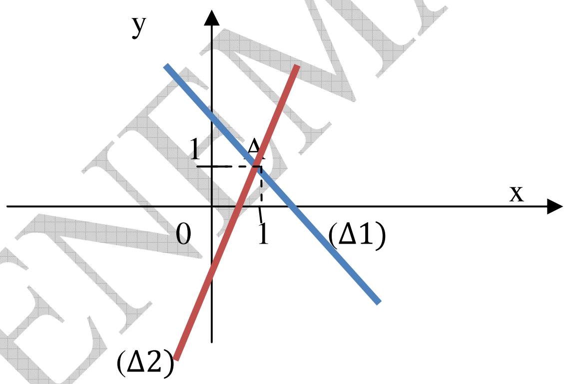
b) Combien ya- t-il de points communs à $(\Delta 1)$ et $(\Delta 2)$?

c) Combien ya-t-il de couples de solutions du système ?

d) S'il ya un seul couple de solution du système, trouve-le.

Solution :

Le couple de solution du système est A(1 ; 1).

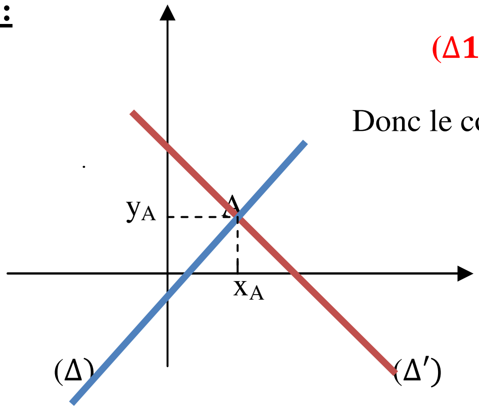


2) Méthode graphique :

Pour trouver graphiquement les solutions d'un système de deux équations (ou plus) du premier degré à deux inconnues, il faut tracer les droites dans un même repère orthonormal.

- ✓ Si les droites sont sécantes, alors il y a une seule solution (coordonnées du point d'intersection).

Exemple :



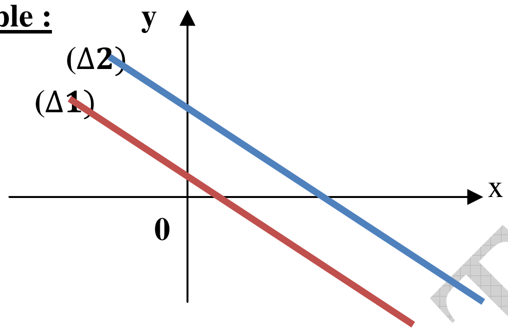
(Δ1) et (Δ2) sont sécantes en A

Donc le couple A(x_A ; y_A) est la solution du système.

S= $\{(x_A;\ y_A)\}$

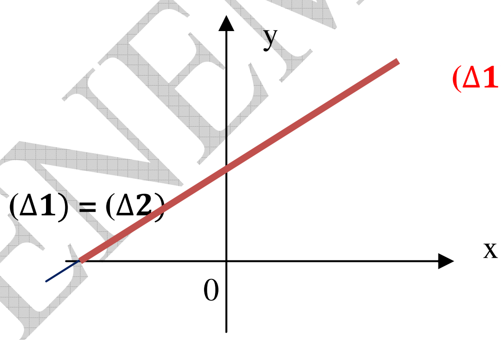
- ✓ Si les droites sont strictement parallèles, alors le système n'admet pas de solution (pas de point d'intersection).

Exemple :



(Δ1) et (Δ2) ne sont pas sécantes (elles sont parallèles). Donc Le système n'admet pas de solution. S=∅

- ✓ Si les droites sont confondues, alors le système admet une infinité de couples de réels solutions (l'ensemble des coordonnées des points de la droite.)



(Δ1) et (Δ2) sont confondues, donc le système admet une infinité de couples solutions.

3) Exercice d'application :

Résous graphiquement dans IR^2 chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$; $b)$ $\begin{cases} x + 1 - y = 0 \\ y - 1 + 2x = 0 \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$; $d)$ $\begin{cases} 6x + 3x - 12 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \frac{-3}{2}x - y + \frac{7}{2} = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$

CHAPITRE 5 : INEQUATIONS ET SYSTÈME D'INEQUATIONS A DEUX INCONNUES

Durée : 4 heures.

Objectifs de la leçon:

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation à deux inconnues du type indiqué.
- Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux inéquations à deux inconnues des types indiqués.
- Vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'une inéquation ou d'un système d'inéquations à 2 inconnues des types indiqués.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré-requis

Régionnement du plan.

Introduction :

Le premier témoignage connu de résolution des problèmes par inéquations et systèmes inéquation se trouve sur une tablette babylonienne datant environ 2000 avant JC. La résolution d'inéquation de systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues apporte des solutions aux problèmes liés à des contraintes tels que les problèmes de dépenses au dessus d'un certain seuil, la maximisation d'un bénéfice…

Déroulement de la leçon :

I. Inéquation à deux inconnues du type : $ax + by + c \leq 0$

1) Activité :

Deux nombres x et y sont tels que le double du premier ajouté au second donne un nombre plus petit que 3.

a) Traduis cette phrase par une inéquation :

b) Trace dans un repère orthonormal la droite d'équation (D) : $2x + y = 3$

c) Prouve que le point O(0 ; 0) vérifie l'inéquation :trouvée à la question a).

d) Hachure le demi-plan de frontière (D) ne contenant pas le point O.

Solution :

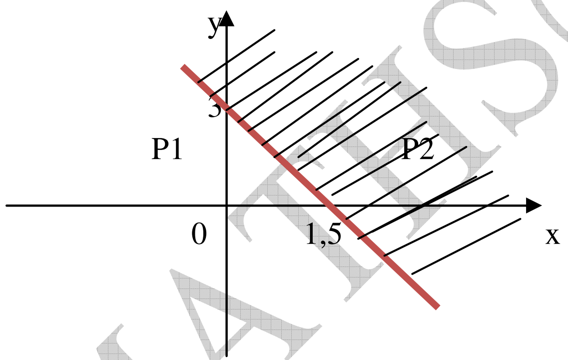
$2x+y<3$

Trace la droite (D) d'équation : $2x + y = 3$. Le plan est alors partagé en demi-plans P_1 et P_2 de frontière (D)

On remplace x et y par les coordonnées (0 ; 0) de l'origine O dans $2x + y$.

On obtiens : $2(0) + 0 = 0$

Or : $0 < 3$, donc le point O vérifie l'inéquation.



2) Méthode :

Pour résoudre graphiquement une inéquation du type $ax + by + c \leq 0$, on procède comme suit :

- ✓ Tracer dans un repère orthonormal la droite d'équation (D) : $ax + by + c = 0$.
- ✓ Considérer un point $M(x_M ; y_M)$ de l'un des demi-plans de frontière (D).
- ✓ Remplacer x_M et y_M dans l'inéquation donnée.

Si x_M et y_M vérifient l'inéquation, alors M appartient au demi-plan représentant l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Si non, l'autre demi-plan représente l'ensemble des solutions de l'inéquation.

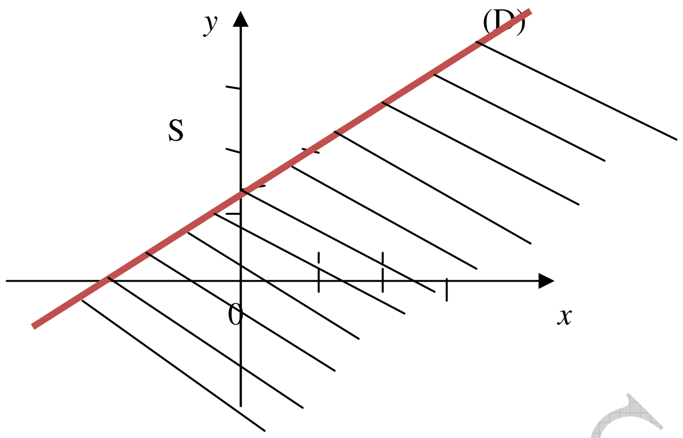
Remarque :

Généralement on choisit le point O de coordonnées (0 ;0) si la droite ne passe par l'origine.

Exemple :

Soit à résoudre graphiquement dans IR^2 l'inéquation suivante : $2x - 3y + 4 < 0$.

(D) : $2x - 3y + 4 = 0$; A(1 ; 2) ; B(0 ; 4/3) ; vérifions 0+0+4< 0 faux



II. Résolution d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues :

1) Activité :

Deux nombres x et y sont tels que le double du premier ajouté du triple au second donne un nombre plus petit que 3.

Ces mêmes nombres sont aussi tels que la somme de l'opposé du premier et du triple du second et de 1 est inférieur ou égale à 2.

a) Traduis ces phrases précédentes par deux inéquations.

b) Trace dans un même repère orthonormal les équations suivantes : $2x+y=3$ et $-x+3y+1=2$

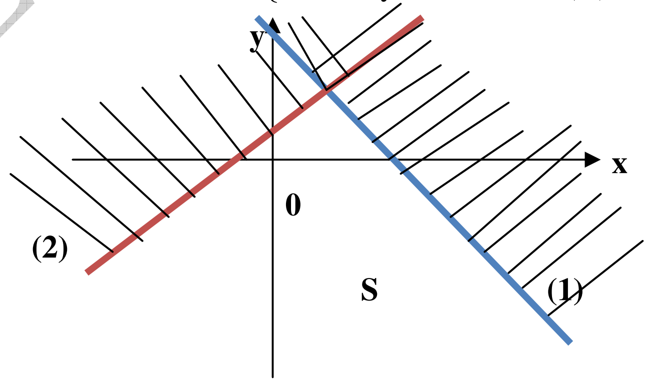
c) Vérifie que O(0.0) appartient aux deux inéquations trouvées à la question a).

d) Hachure les demi-plans ne contenant pas le point O.

Solution :

Les nombres x et y cherchés sont donc ceux qui vérifient à la fois l'inéquation $2x + 3y < 3$ et l'inéquation $-x + 3y + 1 \leq 2$

$$\begin{cases} 2x + y < 3 & (1) \\ -x + 3y + 1 \leq 2 & (2) \end{cases}$$



ibselam85@yahoo.fr

2) Méthode :

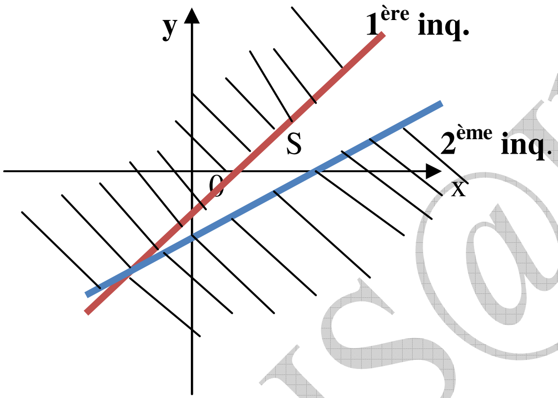
Pour résoudre graphiquement un système d'inéquation du type $\begin{cases} ax+by+c \leq 0 \\ a'x+b'y+c' \leq 0' \end{cases}$

on procède comme suit :

- ✓ Tracer dans un repère la droite (D) d'équation $ax+by+c=0$, puis hachure le demi-plan qui représente pas l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax+by+c\leq 0$.
- ✓ Dans le même repère, trace la (D') d'équation $a'x+b'y+c'=0$, puis hachure le demi-plan qui ne représente pas l'ensemble des solutions de l'inéquation $a'x+b'y+c'\leq 0$.
- ✓ L'ensemble des solutions du système est la partie du plan non hachurée.

Exemple :

$\begin{cases} x-y-1 \geq 0 \\ 2x-3y-4 \leq 0 \end{cases}$;



3) Exercices d'application :

Résous graphiquement chacun des systèmes suivants :

$a) \begin{cases} x-5+y>0 \\ -3x-3y-7<0 \end{cases}$; $b) \begin{cases} 4x+5-y<0 \\ -2x+0{,}5y+1<0 \end{cases}$; $c) \begin{cases} y<3 \\ x>-2 \\ y>2x-1 \end{cases}$

CHAPITRE 6 : STATISTIQUES

Durée : 8 heures

Objectifs de la leçon :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

• Regrouper en classes une série brute.
• Déterminer les tableaux des effectifs et des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes.
• Construire un histogramme
• Interpréter un graphique représentant une série statistique.
• Construire un diagramme cumulatif.
• Déterminer la moyenne, la classe modale.
• Déterminer, graphiquement et par le calcul, la médiane.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré-requis :

Vocabulaire de base.
Organisation des données.
Classement des données statistiques (séries brutes, séries ordonnées).
Calcul des effectifs, fréquences, pourcentages et moyennes.
Détermination de valeurs d'un caractère et des effectifs d'une série statistique à l'aide d'un diagramme, du mode.
Représentation (diagramme en bâtons, à bandes, circulaires, semi-circulaires).
Interprétation de données statistiques.
Projection orthogonale
Thalès

Introduction :

On attribue à l'histoire des statistiques la date de commencement de 1749, bien que l'interprétation du terme « statistique » a changé au cours du temps plus anciens, cette science ne consistait qu'à la collection d'informations sur les états (recensement du bétail, des informations sur son cours et des contrats divers). Plus tard, cette définition est étendue à tout type d'information collectée et, encore plus tard, les sciences statistiques incluent l'analyse et l'interprétation de ces données. En termes modernes, les statistiques incluent les ensembles de données, telles celles de la compatibilité nationale et les registres de températures, ainsi que le travail d'analyse, lequel requiert les méthodes de l'influence statistique.

Déroulement de la leçon :

I. Rappels :

A. Définitions :

1) Population :

Une étude statistique porte toujours sur un ensemble de personnes, d'animaux, de végétaux ou de choses. L'ensemble sur lequel on recueille les données statistiques est appelé population.

2) Individu :

Tout élément de la population est appelé individu.

3) Echantillon :

L a partie de la population effectivement utilisée pour l'étude statistique est appelée échantillon.

Remarque :

Lorsque l'effectif de l'échantillon est n, on dit qu'on a un échantillon de taille n.

4) Caractères :

❖ *Un caractère est toute information qu'on peut étudier sur la population.*

Exemple : considérons l'ensemble des élèves d'une classe au CEM Loboudou Doué.

L'ensemble des élèves de la classe est une population.

Chaque élève de la classe est un individu

Un sous ensemble d'élèves de la classe forme un échantillon

Sur cette population, on peut étudier :

- le caractère « âge »
- le caractère «taille »
- le caractère «nationalité »
- le caractère « ethnie »

❖ **Un caractère est quantitatif ou qualitatif :**

✓ **Un caractère est quantitatif,** lorsqu'il est mesurable.

Exemple : Sur une population d'étudiants, les caractères taille en centimètres et poids en kg sont quantitatifs.

✓ **Un caractère est qualitatif,** lorsqu'il n'est pas mesurable

Exemple : Sur une population d'étudiants, les caractères «nationalité » et «situation matrimoniale » sont qualitatifs.

❖ **Un caractère quantitatif est discret ou continu.**

✓ **Un caractère est discret** lorsqu'il prend des valeurs isolées

✓ **Un caractère est continu** lorsqu'il est susceptible de prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

5) Modalité :

On appelle modalité toute valeur possible d'un caractère.

Exemple 1 :

Sur une population d'étudiants, les modalités du caractère « mention obtenue au bac » sont : Passable, Assez Bien, Bien, Très Bien.

Exemple 2 :

Considérons une population formée de quatre enfants d'une même famille, âgés respectivement de 12 ; 8 ; 3 et 1 ans. Chacune de ces valeurs est une modalité du caractère âge.

B. Classement des données statistiques :

1) Définitions :

a) Effectif :

L'effectif d'une modalité représente le nombre de fois qu'on trouve cette modalité.

b) Fréquence :

La fréquence d'une modalité est le rapport de l'effectif de cette modalité par l'effectif total.

$$Fréquence = \frac{Effectif\ partiel}{Effectif\ total}$$

Remarque:

Toute fréquence d'une modalité est un nombre compris entre 0 et 1. La somme des fréquences d'une série est égale à 1.

c) Pourcentage :

Le pourcentage d'une modalité est la fréquence de cette modalité multipliée par 100.

$$Pourcentage = \frac{Effectif\ partiel}{Effectif\ total} \times 100 = Fréquence \times 100.$$

Remarque :

La somme des pourcentages d'une série est égale à 100%.

d) Moyenne :

La moyenne d'une série statistique s'obtient en divisant par l'effectif total la somme des produits des modalités par les effectifs.

$$Moyenne = \frac{Somme\ des\ produits(modalités \times effectifs)}{Effectif\ total}.$$

e) Mode :

Le mode d'une série statistique est la modalité ayant le plus grand effectif.

Remarque :

Dans une série statistique, si on a un seul mode, alors la série est **unimodale** et si on a deux modes, alors elle est **bimodale**.

2) Exercice d'application :

Un professeur d'EPS note les performances de ses élèves dans une course de vitesse. Il note le temps mis (secondes) par chaque élève dans un carnet et obtient les résultats suivants : 9 ; 10 ; 12 ; 10 ; 14 ; 9 ; 14 ; 12 ; 15 ; 12 ; 12 ;9

a) Ordonne cette série statistique brute.

b) Quel est l'effectif total de cette série ?

c) Donne le mode de cette série.

d) Recopie et remplie le tableau ci-dessous :

Modalités						Total
Effectifs						
Fréquences						
Pourcentages						

e) Calcule le temps moyen mis par un élève.

II. Exemples et vocabulaire :

1) Activité :

Après un test de niveaux, les notes de maths d'une classe de 3ème sont les suivantes : 2 ;19 ; 6 ; 8 ; 12 ; 10 ; 8 ; 6 ; 10 ; 12 ; 3 ; 17 ; 10 ; 7 ; 8 ; 13 ; 9 ; 12 ; 2 ;18 ; 1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 0 ; 7

a) Donne le nombre le nombre d'élève ayant une note strictement inférieur à 5.

b) Donne le nombre le nombre d'élèves dont la note est supérieure à 5, mais strictement inférieure à 10.

c) Donne le nombre le nombre d'élèves dont la note est supérieure ou égale à 10, mais strictement inférieure à 15.

d) Donne le nombre le nombre d'élèves dont la note est supérieure ou égale à 15, mais strictement inférieure à 20.

e) Traduis ces résultats dans un tableau d'intervalles.

Solution :

Intervalles	[0; 5[	[5; 10[	[10; 15[	[15; 20[
Effectifs	5	10	7	3

2) Définitions :

- ✓ *Dans le cas d'un caractère continu, les modalités sont appelées des **classes**.*
- ✓ *Une classe est un intervalle de type [a ; b[, il est obtenu par regroupement des valeurs du caractère.*

3) Centre de classe et amplitude :

On admet que le centre d'une classe [a ; b[est $c = \frac{a+b}{2}$ *et son amplitude est égale à* $b - a$.

Remarque :

Le regroupement en classe a pour intérêt de réduire la taille de la série et de faciliter l'exploitation des données.

Exemple :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs	5	10	7	3
Centre de classe	2,5	7,5	12,5	17,5
Amplitude	5	5	5	5

4) Distribution groupée en classes d'égale amplitude :

a) Effectifs cumulés croissants, fréquences cumulées croissantes

Pour construire un tableau des effectifs cumulés croissants, on procède comme suit :

Classes	[a ; b[	[b ; c[	[c ; d[	total
Effectifs	*x*	*y*	*z*	*x+y+z*
ECC	*x*	+ *x+y*	+ *x+y+z*	

De la même manière, on procède pour construire le tableau des fréquences cumulées croissantes.

Exemple :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	total
Effectifs	5	10	7	3	25
ECC	5	15	22	25	
Fréquences	0,2	0,4	0,28	0,12	1
FCC	0,2	0,6	0,88	1	

b) Effectifs cumulés décroissants, fréquences cumulées décroissantes :

Pour construire un tableau des effectifs cumulés croissants, on procède comme suit :

Classes	[a ; b[	[b ; c[	[c ; d[	total
Effectifs	*x*	*y*	*z*	*x+y+z*
ECD	*x+y+z*	*y+z*	*z*	

De la même manière, on procède pour construire le tableau des fréquences cumulées croissantes.

Exemple :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	total
Effectifs	5	10	7	3	25
ECD	25	20	10	3	
Fréquences	0,2	0,4	0,28	0,12	1
FCD	1	0,8	0,4	0,12	

5) Histogramme :

Pour construire un histogramme des effectifs, on procède comme suit :

- ✓ On trace un repère orthonormal.
- ✓ On choisit une échelle convenable pour mettre sur l'axe des abscisses les bornes de classes et sur l'axe des ordonnées les effectifs.
- ✓ On construit des bandes dont les bases sont proportionnelles à l'amplitude des classes et la hauteur, proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante.

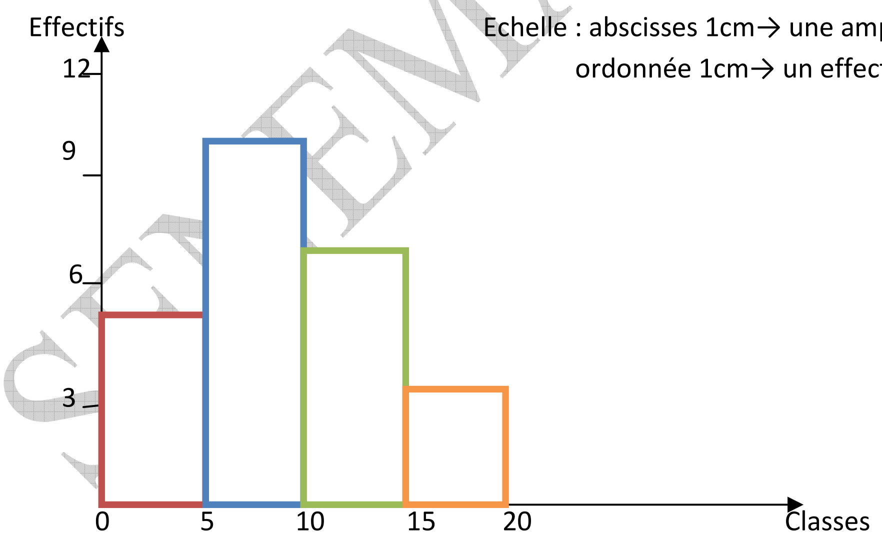
De la même façon, on procède pour construire l'histogramme des fréquences.

Exemple : Soit à construire l'histogramme des effectifs de la série suivante :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	total
Effectifs	5	10	7	3	25

Echelle : abscisses 1cm→ une amplitude de 5

ordonnée 1cm→ un effectif de 3



6) Diagramme des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes :

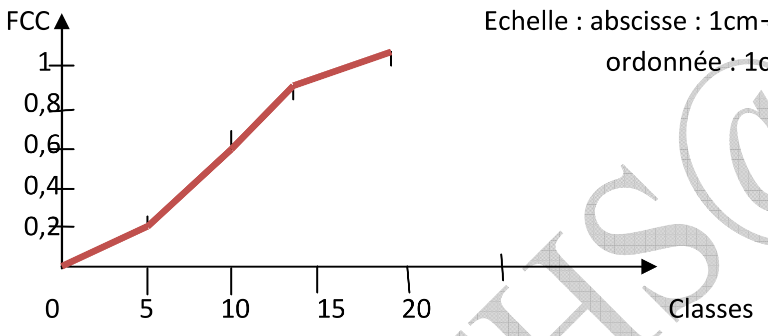
Pour construire un histogramme des effectifs, on procède comme suit :

- ✓ On construit le repère orthonormal en choisissant une échelle convenable pour indiquer en des abscisses les bornes de classes et sur l'axe des ordonnées les effectifs cumulés croissants.
- ✓ On place dans ce repère les points dont les abscisses sont les bornes supérieures des classes et les ordonnées les effectifs cumulés croissants, puis on les relie par des segments.

De la même façon, on procède pour construire l'histogramme des fréquences cumulées croissantes.

Exemple : Soit à construire l'histogramme des fréquences cumulées croissantes de la série suivante :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	total
FCC	0,2	0,6	0,88	1	



Echelle : abscisse : 1cm→une classe d'amplitude 5
ordonnée : 1cm→une FCC de 0,2

On place les points (0 ; 0) ; (5 ; 0,2) ; (10 ; 0,6) ; (15 ; 0,88) ; (20 ; 1)

7) Diagramme des effectifs cumulés décroissants et des fréquences cumulées décroissantes :

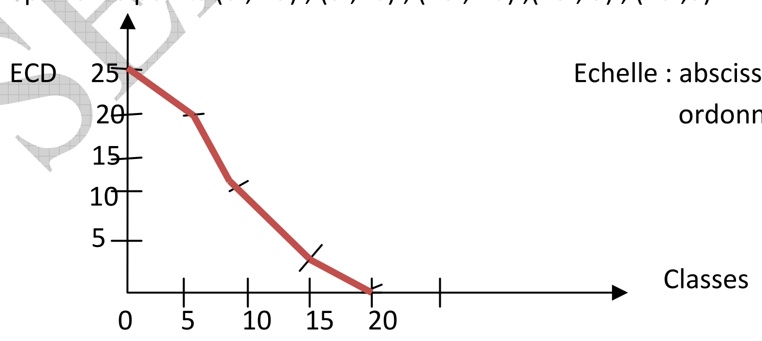
Comme précédemment, les bornes des classes seront placées sur l'axe des abscisses et les effectifs cumulés décroissants sur l'axe des ordonnées. On place les points dont les abscisses sont les bornes inférieures des classes et les ordonnées sont les effectifs cumulés décroissants, puis on les relie par des segments.

De la même façon, on procède pour construire l'histogramme des fréquences cumulées décroissantes.

Exemple : Soit à construire l'histogramme des effectifs cumulés décroissants de la série suivante :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	total
ECD	25	20	10	3	

On place les points (0 ; 25) ; (5 ;20) ; (10 ; 10) ;(15 ; 3) ; (20 ;0)



Echelle : abscisses 1cm→ une amplitude de 5
ordonnées 1cm→un ECD de 5

Remarque :

Dans le cas d'une série discrète, le diagramme cumulatif se présente sous forme de représentations en escaliers ou en bâtons. La variable passe d'une de ses valeurs à la suivante brutalement et non progressivement comme dans le cas d'une variable continue.

Exemple :

Au CEM Loboudou, Madame la surveillante a noté le nombre de livre empruntés par les 50 élèves d'une classe de 3ème.

Nombre de livres empruntés	0	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	5	7	3	4	11	18	2	50
ECC	5	12	15	19	30	48	50	

On place les points (0 ; 5) ; (1 ; 12) ; (2 ; 15) ; (3 ; 19) ; (4 ; 30) ; (5 ; 48) ; (6 ; 50)

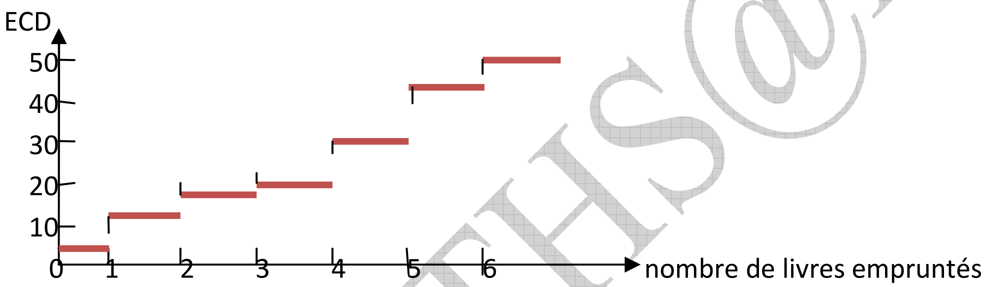


Diagramme cumulatif croissant en escaliers d'une série discrète

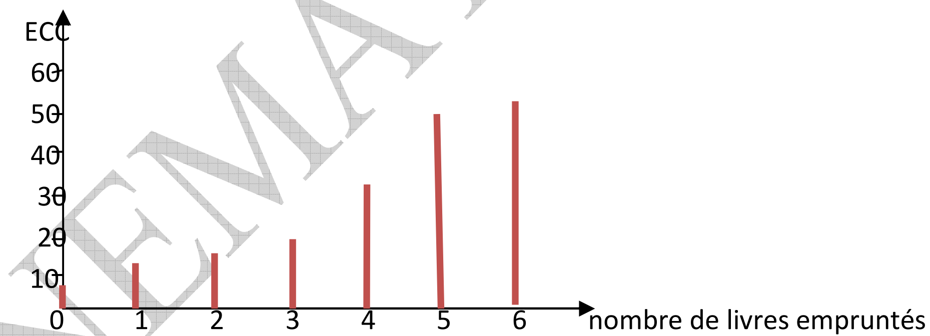


Diagramme cumulatif croissant en bâtons d'une série discrète

8) Diagramme circulaire et semi-circulaire :

Pour construire le diagramme circulaire ou semi-circulaire, on utilise respectivement les formules suivantes pour déterminer chaque angle :

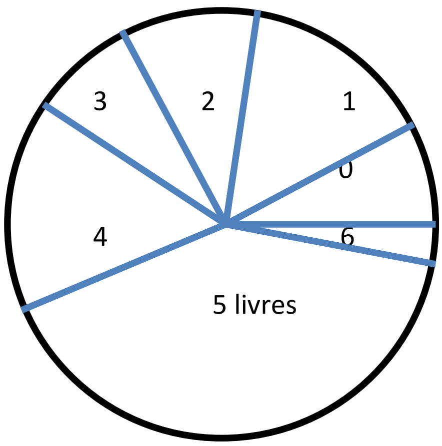
Circulaire : angle = $\frac{Effectif\ partiel \times 360}{Effectif\ total}$; semi-circulaire : angle =$\frac{Effectif\ partiel \times 180}{Effectif\ total}$

Exemple : Soit à construire le diagramme circulaire de la série :

Nombre de livres empruntés	0	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	5	7	3	4	11	18	2	50

0 livre : $\frac{5\times360}{50} = 36°$; 1 livre: $\frac{7\times360}{50} = 50°$; 2 livres : $\frac{3\times360}{50} = 22°$; 3 livres : $\frac{4\times360}{50} = 29°$;

4 livres : $\frac{11\times360}{50} = 79°$; 5 livres : $\frac{18\times360}{50} = 130°$; 6 livres : $\frac{2\times360}{50} = 14°$



III. Paramètres de positions :

1) Le mode :

Le mode d'un caractère est la modalité qui a l'effectif le plus élevé. C'est la valeur qui a la plus grande fréquence.

Dans le cas où les modalités sont des classes, on parle de classe modale et on prend comme mode le centre de cette classe modale.

Remarque

Le mode est facile à déterminer et d'interprétation rapide, mais il n'est pas souvent unique et n'existe même pas parfois.

2) La médiane :

C'est toute valeur qui partage la série statistique ordonnée (ordre croissant ou décroissant) est la valeur qui partage cette série en deux séries de même effectif.

Exemple 1 (Cas d'un caractère discret)

a) Effectif total impair :

$$\underbrace{6; 7; 8; 8; 9; 10; 10;}_{\text{7 notes}}\ 11; \underbrace{12; 12; 15; 16; 17; 19}_{\text{7 notes}}$$

La note 11 qui sépare les autres notes en deux groupes de même effectif est la médiane.

b) Effectif total pair :

$$\underbrace{1; 2; 3; 3; 4; 4; 6;}_{\text{7 notes}}\ \underbrace{7; 7; 8; 9; 10; 10; 16}_{\text{7 notes}}$$; note médiane $= \frac{6+7}{2} = 6{,}5$

Toute note comprise entre 6 et 7 est une note médiane ; $]6; 7[$ est l'intervalle médian. On prend parfois le centre de l'intervalle médian $\frac{6+7}{2} = 6{,}5$ qui est la note médiane.

Remarques :

Les modalités correspondant à N/4, 2N/4 = N/2 et 3N/4 sont appelés les **quartiles** respectivement première quartile, deuxième quartile ou médiane et troisième quartile.

Le premier quartile sépare l'effectif total N en deux parties d'effectifs respectifs $\frac{1}{4}$N et $\frac{3}{4}$N

Le troisième quartile sépare l'effectif total N en deux parties d'effectifs respectifs $\frac{3}{4}$N et $\frac{1}{4}$N

Pour les obtenir, on utilise la même méthode que pour la médiane.

Exemple 2 (Cas d'un caractère continu)

On donne le tableau suivant :

Classes	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10; 12[	[12 ; 14[	Total
Effectifs	10	12	32	40	60	26	180
ECC	10	22	54	94	154	180	

Méthode par interpolation affine :

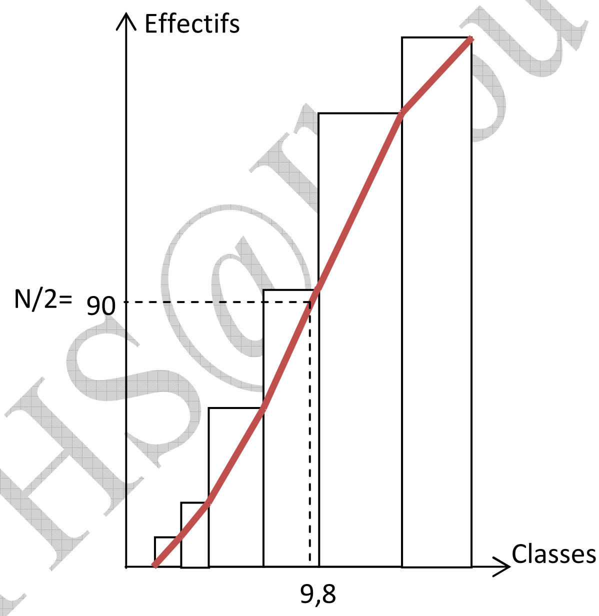
Pour trouver la médiane, on repère d'abord l'intervalle médian. L'intervalle médian est le premier intervalle dont l'effectif cumulé croissant est au moins égal $\frac{N}{2}$, avec N étant l'effectif total.

Pour déterminer la médiane Me où :

[am ; bm [est l'intervalle médian ; Nm-i l'effectif cumulé croissant de la classe [am-i ; bm-i [

Nm l'effectif cumulé croissant de la classe [am ; bm [

Polygone des effectifs cumulés croissants



On applique la formule : $\frac{Me - a_m}{\frac{N}{2} - N_{m-1}} = \frac{b_m - a_m}{N_m - N_{m-1}}$

Dans l'exemple ci-dessus, l'intervalle médian est [8;10[,

$$\frac{Me-8}{90-54} = \frac{10-8}{94-54}$$

$\frac{Me-8}{36} = \frac{2}{40}$, d'où Me =9,8

Méthodes graphiques :

Elles consistent à déterminer la médiane par simple lecture graphique.

Méthode 1

On trace le polygone des effectifs cumulés croissants ou le polygone des effectifs cumulés décroissants, puis la droite d'équation y = $\frac{N}{2}$. L'abscisse du point d'intersection des deux courbes correspond à la médiane.

Méthode 2

On trace le polygone des fréquences cumulées croissantes ou le polygone des fréquences cumulées décroissantes, puis la droite d'équation y = 0,5 . L'abscisse du point d'intersection des deux courbes correspond à la médiane.

Méthode 3

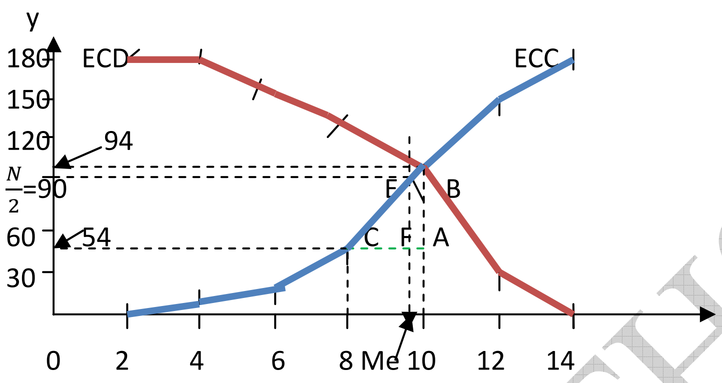
On trace le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants.

L'abscisse du point d'intersection des deux courbes correspond à la médiane.

Méthode 4

On trace le polygone des fréquences cumulées croissantes et le polygone des fréquences cumulées décroissantes. L'abscisse du point d'intersection des deux courbes correspond à la médiane.

Classes	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10; 12[	[12; 14[	Total
Effectifs	10	12	32	40	60	26	180
ECC	10	22	54	94	154	180	
ECD	180	170	158	126	86	26	



Méthode de Thalès :

Les triangles CBA et CEF sont en position de Thalès, donc :

$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA} = \frac{EF}{BA} \Rightarrow$ CF=$\frac{CA \times EF}{BA} = \frac{2 \times 36}{40} = 1{,}8;$ Me=8+1,8; Me= 9,8

Moyenne:

Pour calculer une moyenne dans le cas d'une série groupée en classes, on utilise la formule suivante :

Moyenne = $\frac{\textit{Somme des produits(centres de classes} \times \textit{les effectifs correspondants)}}{\textit{Effectif total}}$

Exemple :

Soit à calculer la moyenne de la série suivante :

Classes	[30 ;40[	[40 ; 50[	[50 ;60[	[60 ;70[	Total
Effectifs	5	10	2	12	29
Centre de classe	35	45	55	65	

$$\boldsymbol{Moyenne = \frac{5 \times 35 + 10 \times 45 + 2 \times 55 + 12 \times 65}{29} = 52,24}$$

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Les origines de la géométrie remontent aux babyloniens et aux égyptiens (2000 ans avant notre ère). Le théorème dit « de Pythagore » est connu dans des cas particuliers. Sur des tablettes babyloniennes, on a retrouvé des problèmes à caractère géométrique (calculs d'aires) dont la résolution passe par l'algèbre.
La géométrie naît des exigences de la vie pratique : architecture, fabrication et décoration d'objets,… Mais c'est aux crues répétées du Nil qu'on attribue les origines de la géométrie. Elles contraignent les arpenteurs égyptiens à retracer régulièrement les limites des propriétés agricoles afin de redistribuer les terrains de façon équitable.
Ces arpenteurs égyptiens déterminent des longueurs, des surfaces divisées en rectangles, carrés et autres triangles. Ils utilisent la corde à 13 nœuds pour marquer les angles droits et sont ainsi nommés les tendeurs de cordes.

CHAPITRE 1 : THEOREME DE THALES

Durée : 9 heures.

Objectifs de la leçon :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

Reconnaître une configuration de Thalès.

Connaître et utiliser le théorème de Thalès pour calculer des longueurs.

Connaître et utiliser la réciproque du théorème de Thalès pour justifier que des droites sont parallèles.

Connaître et utiliser la propriété relative à l'aire.

Connaître et utiliser le théorème de Thalès pour :

- partager un segment dans un rapport donné
- placer un point d'abscisse connue sur une droite graduée.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré-requis :

Signification de l'écriture $\frac{AB}{CD}$.

Droite des milieux.

Deux sécantes coupées par trois droites parallèles et équidistantes.

Introduction :

Le théorème de Thalès apparaît comme une extension des théorèmes de la droite des milieux et aboutit aux homothéties. Thalès de Milet a vécu à Milet (Asie) entre le 7ème et le 6ème siècle avant J.C. Mathématicien, astronome, physicien, géographe et philosophe grec, il séjourna en Egypte d'où il aurait calculé la hauteur d'une pyramide en mesurant la longueur de l'ombre au sol et la longueur de l'ombre d'un bâton de hauteur donnée. La résolution de problèmes sur les calculs de longueur et parallélisme de droites constituera l'objectif principal de ce chapitre.

I. Cas d'un triangle :

A. Théorème de Thalès et sa conséquence

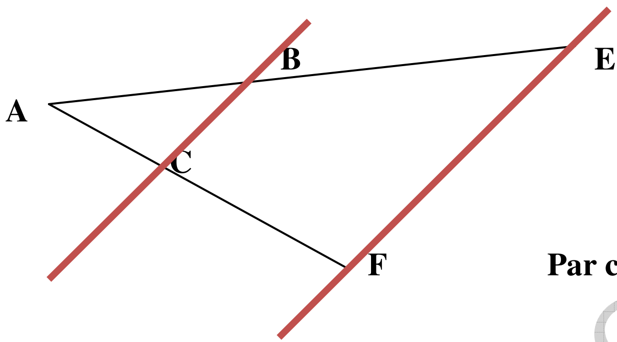
1) Activité :

a) Construis trois points non alignés A, E et F tels que AE=9cm et AF= 6cm.

b) Construis le point B tel que AB=3cm et B∈[AE]. Trace la parallèle à (FE) passant par B. Elle coupe (AF) en C.

c) Mesure le segment [AC], puis calcule et compare les rapports $\frac{AB}{AE}$ et $\frac{AC}{AF}$.

Solution :



$\frac{AB}{AE} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{AC}{AF} = \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$

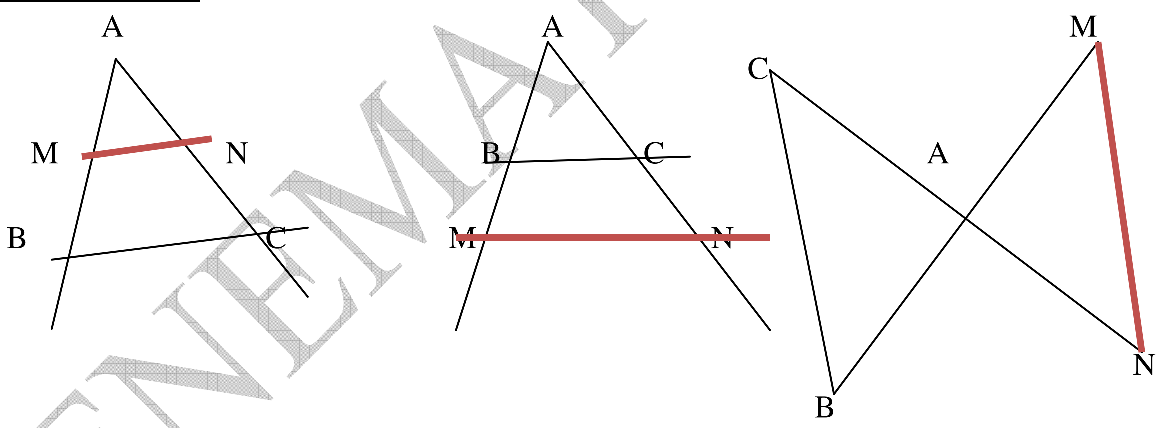
Par comparaisons $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$

2) *Théorème direct :*

Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC).

SI (MN) est parallèle à (BC) alors $\frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{\text{AN}}{\text{AC}}$.

Configurations :



Les triangles ABC et ANM ci-dessus sont en configuration (position) de Thalès, donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Déductogramme :

Si

ABC un triangle

M ∈ (AB), N∈ (AC)

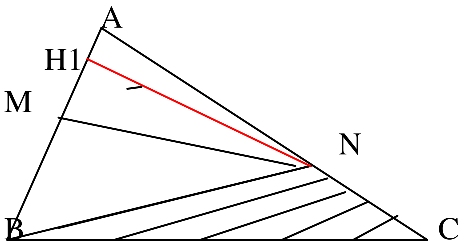
et

(MN) // (BC)

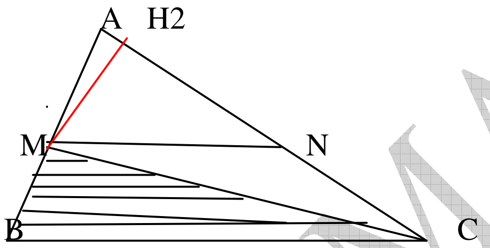
alors

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

3) Démonstration du théorème direct de Thalès :



Aire(ABN)=$\frac{AB\times H1N}{2}$; Aire(AMN)=$\frac{AM\times H1N}{2}$; donc $\frac{Aire(AMN)}{Aire(ABN)}=\frac{AM}{AB}$



Aire(AMN)=$\frac{AN\times MH2}{2}$; $Aire(AMC)=\frac{AC\times M\square 2}{2}$; $donc\ \frac{Aire(AMN)}{Aire(AMC)}=\frac{AN}{AC}$

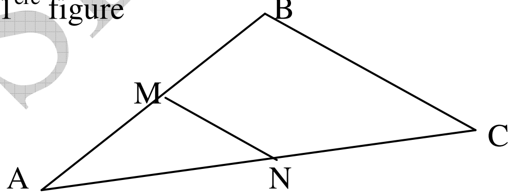
Aire(ABC)= Aire(ABN)+Aire(BNC)=Aire(AMC)+Aire(BMC), or Aire(BNC)=Aire(BMC) car même base et à hauteurs égales.

On a $\frac{Aire(AMN)}{Aire(ABN)}=\frac{aire(AMN)}{Aire(AMC)}; donc\ \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\quad cqfd$

4) Exercice d'application :

Dans chacune des figures suivantes, calcule la longueur inconnue AC :

1ère figure

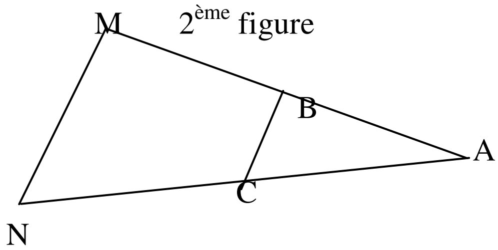


(MN)∕∕(BC)

AM=3 ; AB=6 ; AN=4

AC= ?

2ème figure



(MN)∕∕(BC)

AM=5; AB=1,5; AN=8

AC= ?

5) *Conséquence du théorème de Thalès :*

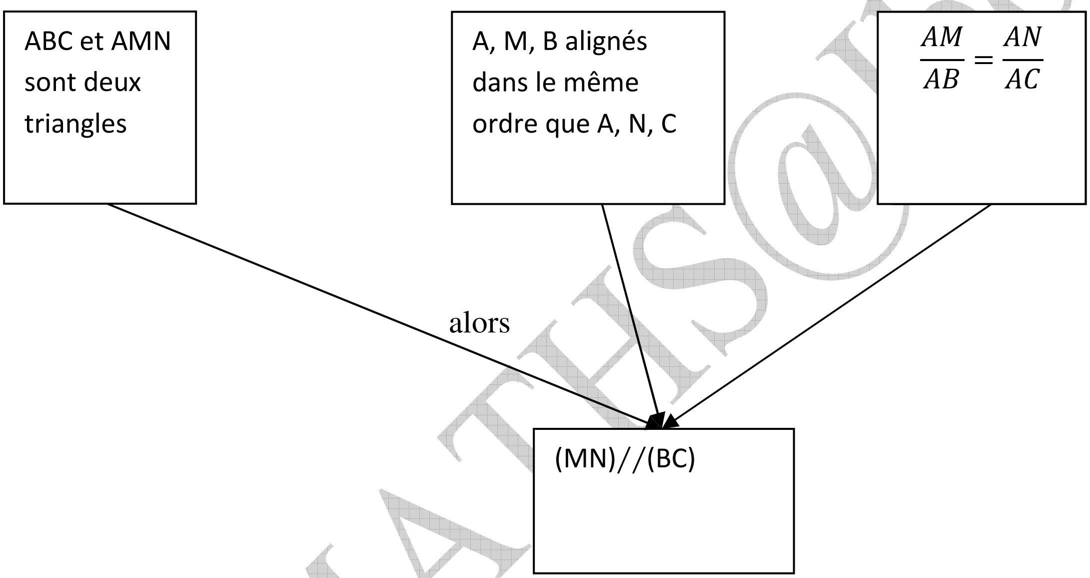
Si deux triangles sont en position de Thalès, alors les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.

Autrement dit, si deux triangles ABC et AMN sont en configuration de Thalès tels que M∈(AB), N∈(AC), alors : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

B. *Réciproque du théorème de Thalès :*

Soient ABC et AMN deux triangles, si les points A, M et B dans le même ordre que les points A, N et C et $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ *,alors (MN) est parallèle à (BC).*

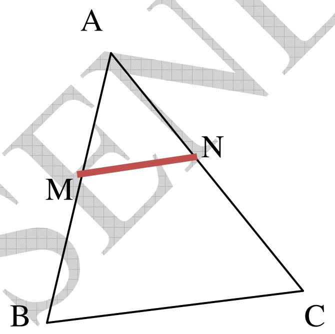
Déductogramme :



Exemples :

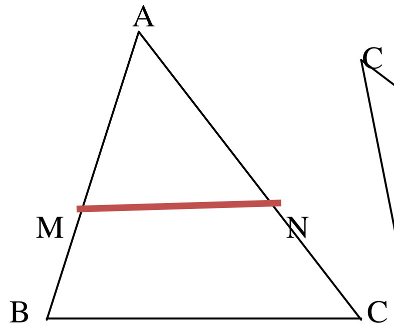
Sur chacune des figures suivantes, a-t-on (MN)∥(BC) ? Justifie les réponses :

1ère f.



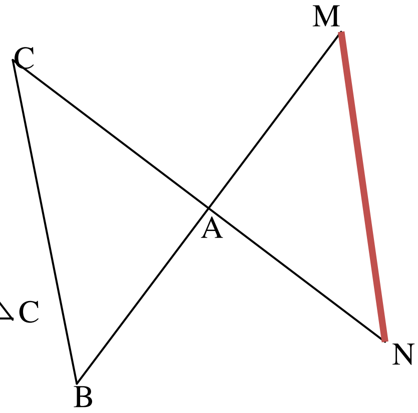
AM=2; AN=3
AB=4; AC=6

2ème f.



AB=10, 5; AC=14, 5
AM=4; AN=6, 3

3ème f.



AN=4,5; AM=3
AB=2; AC=3

II. Cas d'un trapeze:

1) Activité:

a) Construis un trapèze ABCD tel que (AB)//(CD).

b) Place un point M sur [AD] et un point N sur [BC] tel que (MN)//(AB).

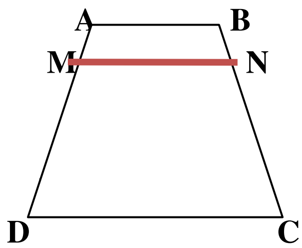
c) Mesure les longueurs des segments [AD], [AM], [BN],[BC].

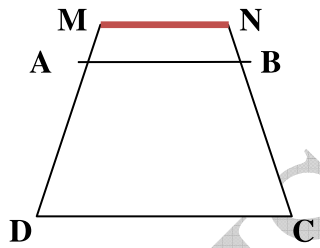
d) Calcule et compare les rapports $\frac{AM}{AD}$; $\frac{BN}{BC}$.

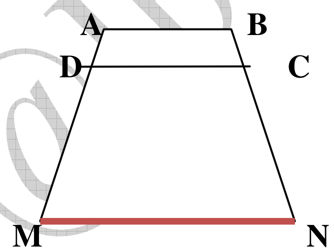
2) *Théorème :*

Soit ABCD un trapèze et M un point de (AD), N un point de (BC) : si (AB)//(MN)//(DC), alors on a : $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$ *ou* $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ *ou* $\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB}$.

Configuration :







3) Exercice d'application :

a) Soit ABDC un trapèze tel que (AB)//(CD) et AC=4,5cm ; BD=3cm.

b) Sur [BD), place un point E tel que DE=2,5cm. La parallèle à (AB) passant par E coupe [AC] en F. Calcule AF et déduis-en CF.

4) *Réciproque :*

Soient ABCD et ABNM deux trapèze, si les points A, M, D sont alignés dans le même ordre que les points B, N, C et $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$ *ou* $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ *ou* $\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB}$,

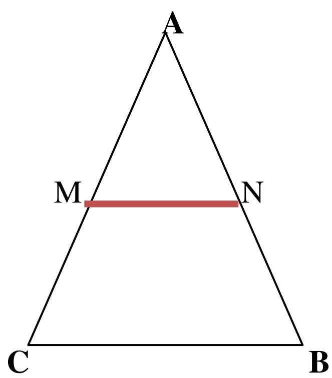
$$alors\ (AB)\ //\ (MN)\ //\ (DC).$$

III. Agrandissement et réduction :

1) Définition :

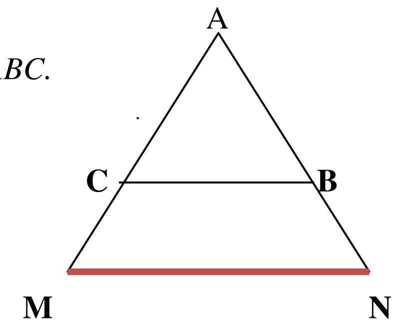
Si deux triangles ou deux trapèzes sont en configuration de Thalès, alors l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

Exemple :

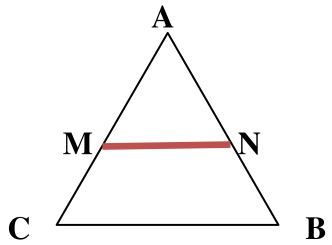


Les triangles AMN et ABC sont en Configuration de Thalès, donc AMN est une réduction de ABC. ABC est un agrandissement de AMN

2) **Propriétés :**



- ✓ $Si\ \frac{AM}{AC} > 1$, *alors AMN est un agrandissement de ABC.*
- ✓ $Si\ \frac{AM}{AC} < 1$, *alors AMN est une réduction de ABC.*



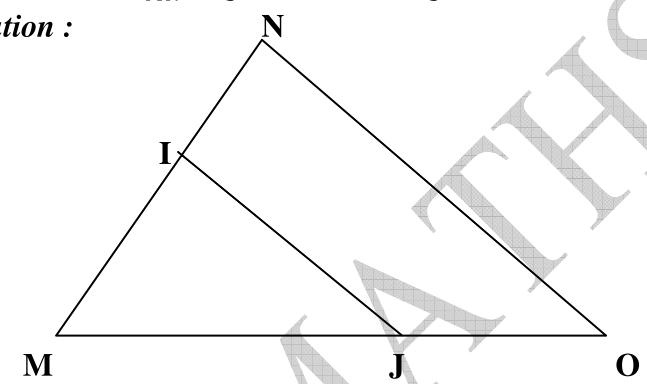
IV. Partage d'un segment dans un rapport donné :

1) Activité :

a) Construis un triangle MON tel que MO=6cm et MN=4cm.
Place le point J sur [MO] tel que MJ=4cm.

b) Trace la parallèle à (ON) passant par J, elle coupe [MN] en I.
Justifie que $\frac{MI}{MN} = \frac{2}{3}$ *et que* $MI = \frac{2}{3}MN$.

Solution :



Justifions :

MON est un triangle, I∈[MN], J∈[MO] et (IJ)∥(NO), donc $\frac{MI}{MN} = \frac{MJ}{MO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$\frac{MI}{MN} = \frac{2}{3}$ *équivaut* $MI = \frac{2}{3}MN$.

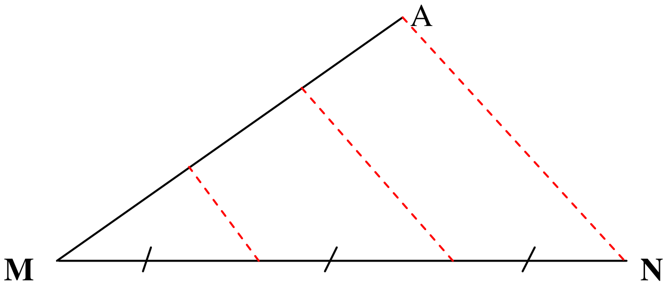
2) Méthodes :

Pour partager un segment [MN] en n parties égales, on procède comme suit :

- ✓ On trace le segment [MN].
- ✓ On trace un segment [MA] tel que A∉(MN) et dont la mesure de sa longueur est un nombre multiple de n.
- ✓ On subdivise [MA] en n parties égales.
- ✓ On trace les parallèles à (NA) passant par les points de la subdivision ainsi obtenue.
- ✓ Le théorème de Thalès nous permet de conclure que le segment [MN] est divisé en n parties égales.

Exemple :

Soit à partager un segment [MN] de longueur 7cm en 3 parties égales :

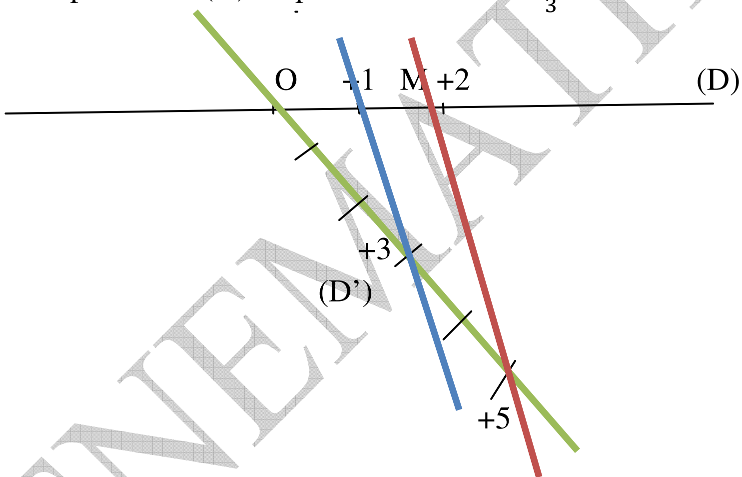


❖ Pour placer sur une droite graduée (D) un point M d'abscisse $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, on procède comme suit :

- ✓ On trace une droite graduée (D') sécante à (D) ayant même origine de graduation.
- ✓ Si $\frac{a}{b} > 0$, on trace une droite passant par le point d'abscisse +1 de (D) et le point d'abscisse +b de (D').
- ✓ On trace la parallèle à cette droite passant par le point de (D') d'abscisse +a. Elle coupe (D) au point recherché d'abscisse $\frac{a}{b}$.

Exemple :

Soit à placer sur (D) un point M d'abscisse $\frac{5}{3}$:

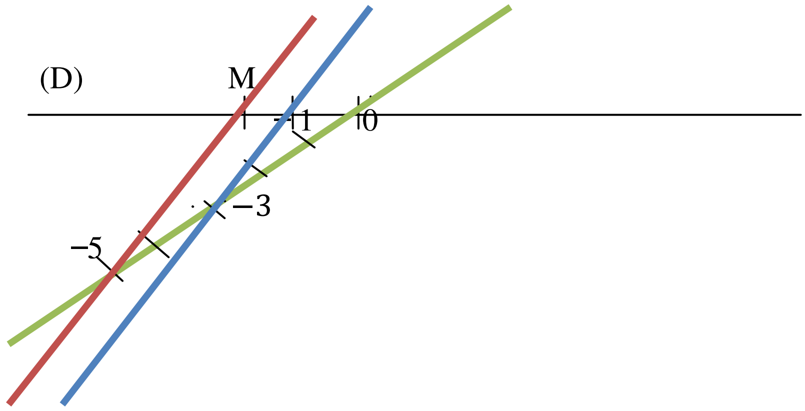


❖ Si $\frac{a}{b} < 0$, on trace une droite graduée (D') sécante à (D) ayant même origine de graduation.

- ✓ on trace une droite passant par le point d'abscisse -1 de (D) et le point d'abscisse $-$b de (D').
- ✓ On trace la parallèle à cette droite passant par le point de (D') d'abscisse $-$a. Elle coupe (D) au point recherché d'abscisse $\frac{a}{b}$.

Exemple :

Soit à placer sur (D) un point M d'abscisse $-\frac{5}{3}$.



3) **Exercice d'application :**

a) Construis un segment [MF] de longueur 8 cm. Divise ce segment en 7 segments de même longueur.

b) Sur une droite graduée (D), place les points I et S d'abscisses respectives :$\frac{-7}{3}$ et $\frac{4}{3}$.

CHAPITRE 2 : RELATIONS TRIGONOMETRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Durée : 7 heures.

Objectifs de la leçon :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être de :

Connaître la définition et la notation du cosinus dans un triangle rectangle.

Calculer le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant un cosinus et une autre longueur

Connaître la définition et la notation du sinus d'un angle aigu d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Calculer le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant un sinus et une autre longueur.

Connaître la définition et la notation de la tangente dans un triangle rectangle.

Calculer la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant une tangente et une autre longueur.

Déterminer une valeur approchée (à l'aide de la machine à calculer ou d'une table trigonométrique) d'un angle aigu d'un triangle rectangle connaissant son sinus ou son cosinus ou sa tangente.

Connaître et utiliser la relation : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Connaître et utiliser la relation entre le cosinus et le sinus d'angles complémentaires.

Connaître et utiliser les cosinus, sinus et tangente d'un angle de mesure 30°, 45° ou 60°.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré-requis :

Théorème de Pythagore; complémentarité des angles aigus d'un triangle rectangle, racines carrées.

Introduction :

Le terme trigonométrie vient des mots grec « trigonôs » qui signifie triangle et « métron » qui signifie mesure. La trigonométrie étudie les relations entre les longueurs des côtés et les mesures des angles d'un triangle. Pendant l'Antiquité et le Moyen âge, les arpenteurs se servaient déjà des relations trigonométriques pour établir leurs calculs sur le terrain.

De nos jours, ces relations sont encore utilisées en astronomie, en cartographie, en architecture, en navigation aérienne et maritime pour déterminer des distances ou des angles.

Déroulement de la leçon :

I. Cosinus et sinus d'un angle aigu :

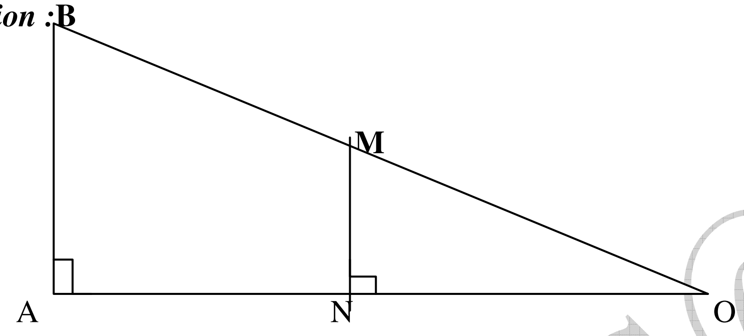
1) Activité :

a) Trace un triangle OAB rectangle en A tel que OA=8cm, AB=6.

b) Calcule OB, puis les rapports $\frac{AB}{OB}$.

c) Place un point M sur la demi-droite [OB] puis construis le projeté orthogonal N de M sur la droite (OA). Calcule les rapports $\frac{ON}{OM}$ et $\frac{NM}{OM}$.

Solution :



(AB)⊥ (OA)

(MN)⊥ (OA), donc (AB)∕∕(MN).

OAB triangle, M∈(BO), N∈(OA) et (AB)∕∕(MN), donc $\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB}$ *équivaut*

$$\frac{ON}{OM} = \frac{OA}{OB} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

OAB triangle rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore BO= 10cm.

Donc $\frac{OA}{OB} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

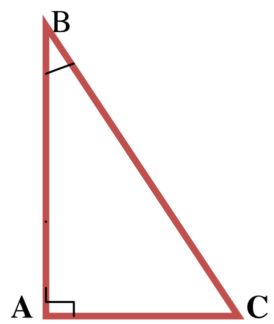
$$\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OB} = \frac{ON}{OA} \Rightarrow \frac{MN}{OM} = \frac{AB}{OB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

2) Définitions et notations :

a) Cosinus d'un angle aigu :

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

Autrement dit, si ABC est n triangle rectangle en A, alors :



$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\textbf{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\textbf{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

Remarque:

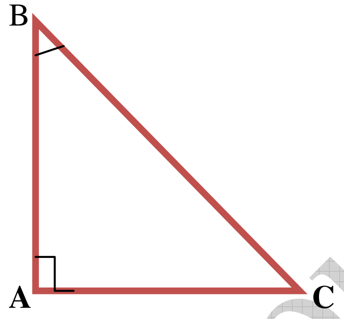
Si $\widehat{ABC}$ est un angle aigu, alors: **$0<\cos\widehat{ABC}<1$.**

b) Sinus d'un angle aigu :

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$



Remarque:

Si $\widehat{ABC}$ est un angle aigu, alors: **$0<\sin\widehat{ABC}<1$.**

3) **Exercice d'application:**

a) Construis un triangle LOB rectangle en L tel que OL=3cm et OB=5cm.

b) Calcule LB, puis cos $\widehat{OBL}$ et sin$\widehat{OBL}$.

II. Tangente d'un angle aigu :

1) **Activité :**

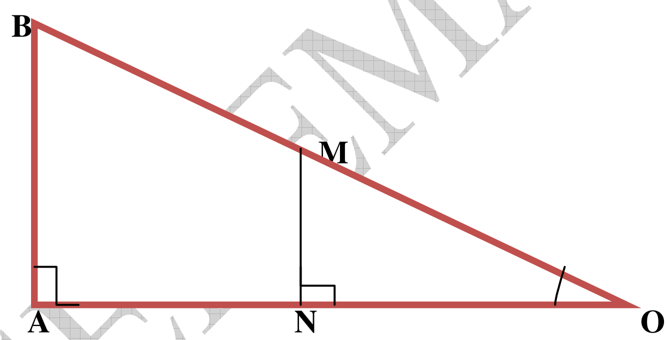
a) Trace un triangle OAB rectangle en A tels que OA=8cm, AB=6cm.

b) Calcule le rapport $\frac{AB}{OA}$.

c) Divise le numérateur et le dénominateur de $\frac{AB}{OA}$ par OB et exprime le rapport obtenu à l'aide du sinus et du cosinus de $\widehat{BOA}$.

d) Place un point M sur la demi-droite [OB) puis construis le projeté orthogonal N de M sur la droite (OA). Calcule le rapport $\frac{MN}{ON}$

Solution :



$\frac{AB}{OA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{AB}{OA} = \frac{\frac{AB}{OB}}{\frac{OA}{OB}} = \frac{\sin\widehat{BOA}}{\cos\widehat{BOA}}$. ;

$\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{ON} = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{4}$

2) **Définition et notation :**

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent.

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueuer du côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}, \text{ ou } \tan\widehat{ABC} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{\cos\widehat{ABC}}.$$

Remarques:

❖ Dans un triangle rectangle, si on connaît la longueur d'un côté, le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu, on peut calculer la longueur des deux autres côtés.

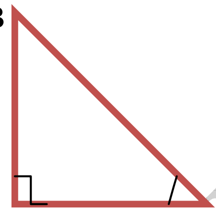
Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

✓ $\cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$, donc $AC = BC \times \cos\widehat{ACB}$ et $BC = \frac{AC}{\cos\widehat{ACB}}$

✓ $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$, donc $AB = BC \times \sin\widehat{ACB}$ et $BC = \frac{AB}{\sin\widehat{ACB}}$

✓ $\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$, donc $AB = AC \times \tan\widehat{ACB}$ et $AC = \frac{AB}{\tan\widehat{ACB}}$

B



A

❖ Dans ce même triangle, si on connaît la mesure d'un angle donné, on peut utiliser une calculatrice ou une table trigonométrique pour déterminer le cosinus, le sinus ou la tangente de cet angle.

❖ On peut faire de même pour déterminer une valeur approchée de l'angle si on connaît son sinus, son cosinus ou sa tangente.

❖ Dans tous les cas, il faut regarder l'affiche de votre écran, si sa correspond à l'unité d'angle que vous voulez utiliser (DEG, RAD ou GRAD)

Exemple :

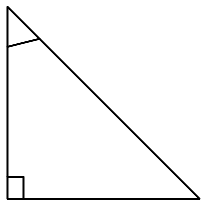
Soit à déterminer la valeur approchée par défaut à $\frac{1}{10}$ près des angles suivants : cosα =0,06 ; sinθ =0,08 et tanβ = 2,9.

3) Exercice d'application :

Soit ABC un triangle rectangle en A tels que $\tan\widehat{ABC}$ =1,5 et AC= 3cm.

Calcule AB puis déduis BC.

B



A C

Solution :

$\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\tan\widehat{ABC}} = \frac{3}{1,5} = 2cm;$

$BC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\ cm$

III. Relation entre le sinus et le cosinus d'un même angle aigu

1) Activité :

Soit OAB un triangle rectangle en A.

a) Ecris l'égalité de Pythagore.

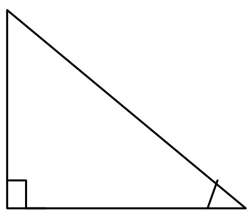
b) Déduis-en la valeur de $\left(\frac{OA}{OB}\right)^2 + \left(\frac{AB}{OB}\right)^2$ en divisant les deux membres par OB^2.

c) Traduis l'égalité obtenue en utilisant le sinus et le cosinus de $\widehat{AOB}$

Solution :

$OB^2 = AB^2 + OA^2$. $\frac{OB^2}{OB^2} = \frac{AB^2}{OB^2} + \frac{OA^2}{OB^2} \Rightarrow 1 = \cos^2\widehat{AOB} + \sin^2\widehat{AOB}$

B



A **O**

2) Propriété :

La somme du carré du cosinus d'un angle aigu et du sinus de ce même angle aigu est égale à 1

Autrement dit, pour tout angle α, on a : $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Remarque : $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$ et $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$.

3) Exercice d'application:

On donne $\cos\alpha = 0{,}6$.

a) Calcule $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$

b) Déduis-en α à 10^{-1} prés par défaut.

III. Relation entre le sinus et le cosinus de deux angles complémentaires :

1) Activité :

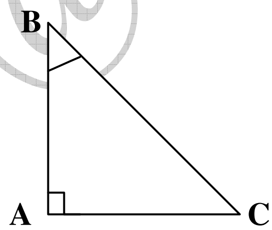
a) Trace un triangle ABC rectangle en A.

b) Exprime $\sin\widehat{ABC}$ *puis* $\cos\widehat{BCA}$ à l'aide des côtés du triangle ABC.

c) Quelle relation existe-t-il entre les mesures de $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{BCA}$?

d) Exprime $\cos\widehat{ABC}$ *et* $\sin\widehat{BCA}$.

e) Quelles égalités peux-tu en déduire ?



Solution :

$mes\widehat{ABC} + mes\widehat{BCA} = 90°$

$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$; $\sin\widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$; $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$; $\cos\widehat{BCA} = \frac{AC}{BC}$;

$\cos\widehat{ABC} = \sin\widehat{BCA}$ et $\cos\widehat{BCA} = \sin\widehat{ABC}$

2) Propriétés :

- ✓ *Lorsque deux angles sont complémentaires, alors le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et réciproquement.*

Autrement dit, si $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$, *alors* $\cos\widehat{ABC} = \sin\widehat{ACB}$ *et* $\sin\widehat{ABC} = \cos\widehat{ACB}$.

- ✓ *Dans un triangle rectangle, les tangentes des deux angles complémentaires sont inverses l'une de l'autre.*
- ✓ *Autrement dit, si* $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$, *alors* $\tan\widehat{ABC} \times \tan\widehat{ACB} = 1$

3) Exercice d'application :

ABC est un triangle rectangle en A. On donne $\cos\widehat{ACB} = 0{,}34$. Détermine $\sin\widehat{ABC}$, puis une valeur approchée de l'angle à 1 degré prés par défaut.

IV. Angles remarquables :

Les valeurs du cosinus, sinus et tangente des angles de mesure : 30°, 45° et 60° sont résumées dans le tableau suivant :

$\widehat{\beta}$	30°	45°	60°
$\sin\widehat{\beta}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\widehat{\beta}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\widehat{\beta}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Remarque :

Lors des calculs, on utilise les valeurs exactes sauf si une valeur approchée est demandée.

CHAPITRE 3 : ANGLE INSCRIT

Durée : 6 heures.

Objectifs de la leçon:

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

Connaître le vocabulaire : angle inscrit

Reconnaître les configurations de l'angle au centre et de l'angle inscrit interceptant le même arc

Connaître et utiliser la relation entre l'angle au centre et l'angle inscrit interceptant le même arc

Connaître et utiliser les propriétés des angles inscrits interceptant le même arc pour

- justifier une égalité d'angles ;
- déterminer la mesure d'un angle.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré-requis

Le cercle, les angles, les arcs et les secteurs angulaires.

Introduction :

Le mot angle dérive du latin angulus, mot qui signifie « le coin ».

Les notions d'angle au centre et d'angle inscrit sont très utilisées chez les militaires et les sportifs qui s'en servent pour déterminer l'angle de tir optimal par rapport au terrain.

Il s'agit dans ce chapitre, d'introduire la notion d'angle inscrit et d'étudier les relations entre les mesures d'un angle au centre et les mesures d'un angle inscrit.

Déroulement de la leçon :

I. Présentation et définitions :

1) Activité :

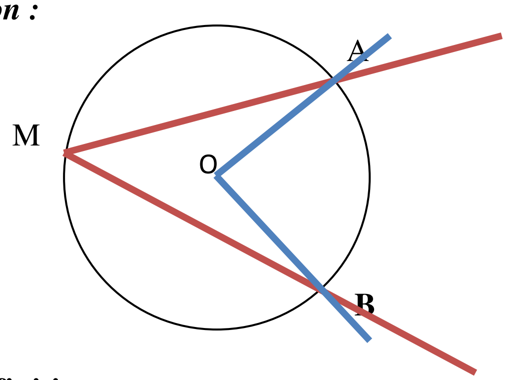
a) Trace un cercle (Ɛ) de centre o et de rayon r=4cm. Marque un point M sur le cercle(Ɛ).

b) Trace deux demi-droites d'origine M qui coupe le cercle en A et B.

c) Trace deux demi-droites d'origine O passant respectivement par A et B.

d) Colore en rouge l'arc $\widehat{AB}$.

Solution :



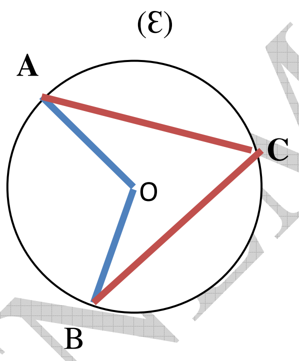
2) Définitions :

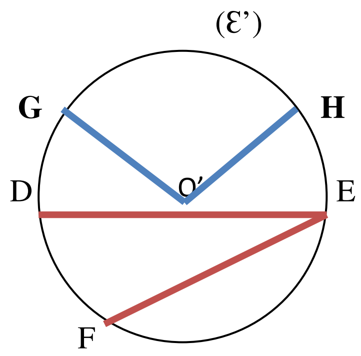
On appelle angle inscrit dans un cercle, un angle qui a pour sommet un point du cercle et dont les côtés coupent ce cercle en deux points distincts.

Un angle inscrit intercepte dans un cercle l'arc ne contenant pas son sommet.

L'angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

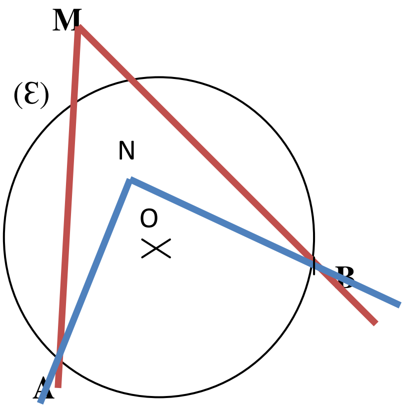
Exemple :

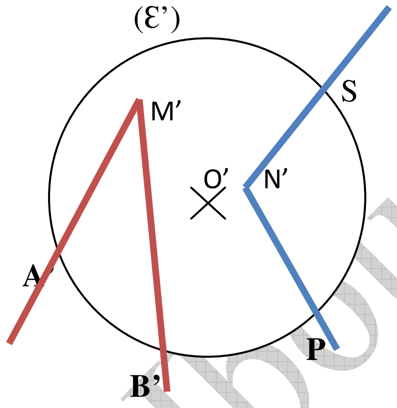




- ✓ L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre interceptant l'arc $\widehat{AB}$.
- ✓ L'angle $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\widehat{AB}$.
- ✓ L'angle $\widehat{DEF}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\widehat{DF}$.
- ✓ L'angle $\widehat{GO'H}$ est un angle au centre interceptant l'arc $\widehat{GH}$.

Contre-exemples :



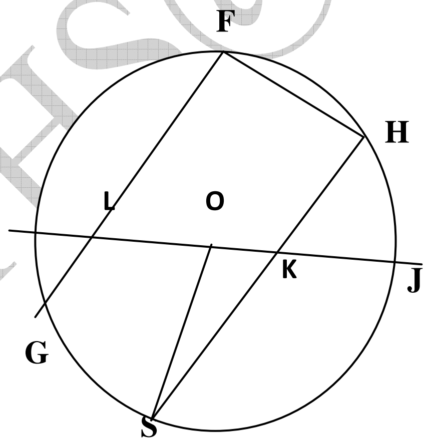


- ✓ Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{A'M'B'}$ ne sont des angles inscrits.
- ✓ Les angles $\widehat{AN'B}$ et $\widehat{PN'S}$ ne sont pas des angles au centre.

3) <u>Exercice d'application :</u>

Pour la figure suivante, donne :

a) Les angles inscrits et leurs arcs.
b) Les angles au centre et leurs arcs.



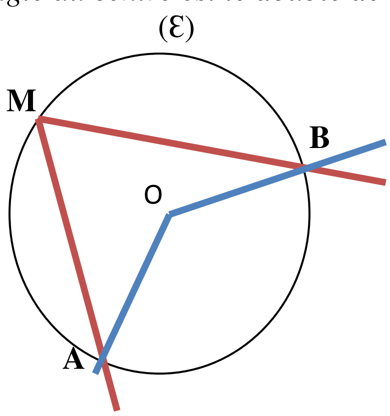
II. <u>Angle inscrit et angle au centre associé :</u>

1) <u>Activité :</u> (voire activité précédente)

2) <u>Théorème :</u>

Tout angle inscrit dans un cercle est la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.
Autrement dit, un angle au centre est le double de tout angle inscrit interceptant le même arc.

<u>Exemple :</u>



Mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ **mes**$\widehat{AOB}$ ou $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

Exercice d'application :

On considère la figure ci-dessous :

a) Que représente [ML] pour le cercle (Ɛ) ?

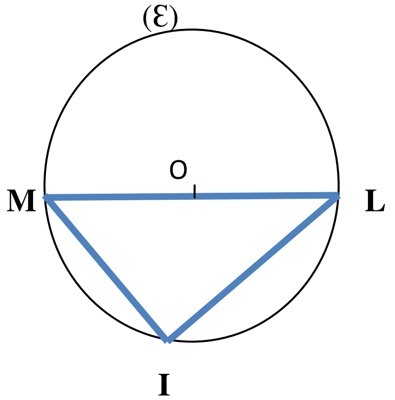
Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{MOL}$

b) Quelle est la nature du triangle MIL ? Justifie ta réponse.

Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{MIL}$.

c) Cite l'angle inscrit et un angle au centre interceptant l'arc $\widehat{ML}$ ne contenant pas le point I.

d) Compare les angles $\widehat{MIL}$ et $\widehat{MOL}$. Conclus.



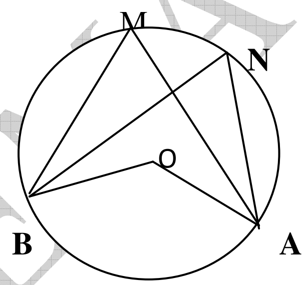
III. Angles inscrits interceptant le même arc :

1) Activité :

On considère deux angles aigus $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ inscrits sur un même cercle.

a) Compare la mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ à celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ puis celle de l'angle inscrit $\widehat{ANB}$ avec celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

b) Quelle relation peux-tu alors écrire entre les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$?



2) Théorème :

Deux angles inscrits d'un même cercle interceptant le même arc sont égaux.

3) Longueur d'un arc de cercle :

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Autrement dit, si A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon r, alors la longueur l de ***l'arc*** $\widehat{AB}$ ***est*** $l = r \times \alpha$ ***avec*** $\alpha = mes\widehat{AOB}$ ***en radians.*** $180° = \pi$ ***radian.***

4) Exercice d'application :

Soit un cercle (Ɛ) de centre o et rayon r. Soit [MN] et [PQ] deux diamètres de (Ɛ).

a) Donne l'angle au centre de la figure interceptant le petit arc $\widehat{MQ}$.

b) Donne tous les angles inscrits de cette figure interceptant le même petit arc $\widehat{MQ}$.

c) Compare l'angle au centre cité à la question a) et chaque angle inscrit cité à la question b).

d) Déduis-en l'égalité des angles $\widehat{MPQ}$ et $\widehat{MNQ}$.

e) Si r=3cm et $\widehat{MOQ} = 100°$, calcule les mesures des arcs $\widehat{MQ}$, $\widehat{MP}$ et $\widehat{PN}$

CHAPITRE 5 : VECTEURS

Durée : 8 heures.

Objectifs de la leçon :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

Construire le vecteur somme de deux vecteurs donnés.

Connaître et utiliser la relation de Chasles.

Connaître et utiliser les propriétés de l'addition des vecteurs

Connaître et utiliser les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.

Utiliser une égalité vectorielle pour démontrer :

- la colinéarité de vecteurs
- le parallélisme de droites
- l'alignement de points

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré- requis

Caractérisation vectorielle du parallélogramme.

Propriétés de la translation.

Propriété de Thalès.

Introduction :

La notion de vecteur est le fruit d'une longue histoire, commencé voici plus de deux mille ans. Deux familles d'idées, d'abord distinctes, sont à l'origine de la formalisation. L'une d'elle est la géométrie, traitant de longueurs, d'angles et de mesures de surfaces et de volumes. L'autre correspond à l'algèbre, qui traite des nombres, de l'addition ou la multiplication et plus généralement d'ensembles munis d'opérations. Un vieux problème d'algèbre nous vient par exemple des Egyptiens et s'explique de la manière suivante : « On doit diviser 100 miches de pain entre 10 hommes comprenant un navigateur, un contremaitre et un gardien, tous trois recevant double part. Que faut-il donner à chacun ? » Ces deux familles d'idées sont développées indépendamment, pour finir par converger vers la notion de vecteur.

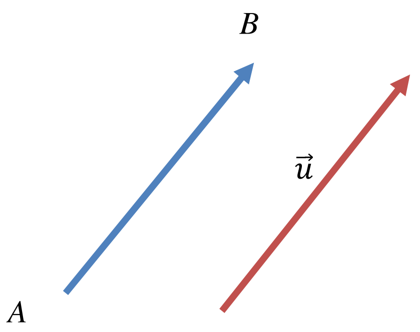
Déroulement de la leçon :

I. Rappels : Translation et vecteurs :

1) Définitions et notations:

Le mot translation vient du mot latin « translario », qui veut dire « transfert ».

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ *l'application transformant A en B, telle que* $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



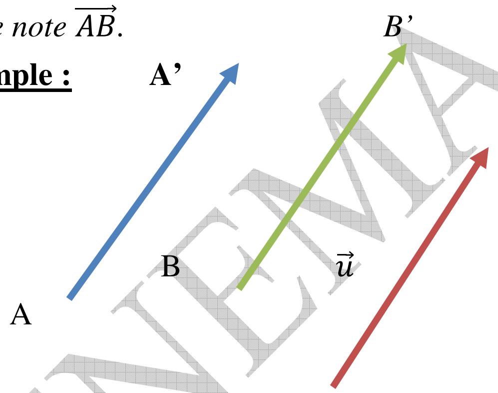
Le mot vecteur est issu du latin « vehere », qui veut dire transporter.

Un vecteur est un objet mathématique, associé à une translation, comportant trois caractéristiques :

- *Son sens (de A cers B).*
- *Sa direction (celle de la droite (AB)).*
- *Sa longueur (celle du segment [AB], c'est-à-dire AB).*

On le note $\overrightarrow{AB}$.

Exemple :



La translation qui transforme A en A', transforme B en B'.

On dit que les couples de points (A ;A') ;(B ;B') sont des représentants d'un même vecteur $\vec{u}$.

On note $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

A est appelé origine, A' extrémité du vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

On dit que B a pour image B' dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ *ou de vecteur* $\vec{u}$.

On note $t_{\vec{u}}: B \to B'$ *ou* $t_{\vec{u}}(B) = B'$.

2) Vecteurs égaux :

✓ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ *signifie que:* $\begin{cases} (AA')//(BB')' \text{ ou les vecteurs ont la même direction} \\ \text{les demi}-\text{droites } [AA') \text{ et } [BB') \text{ sont de même sens.} \\ AA' = BB' \end{cases}$

✓ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BA}$ *sont opposés.* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$ (*vecteur nul*).

3) Vecteurs et parallélogramme :

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors on peut affirmer que :

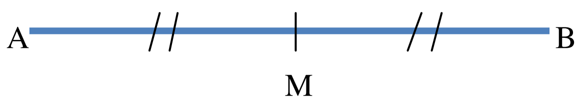
- ✓ ABDC est un parallélogramme.
- ✓ Les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.
- ✓ L'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est D.

Réciproquement : Si ABDC est un parallélogramme, alors on a les quatre égalités vectorielles :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.

4) Caractérisation du milieu d'un segment :

- ✓ Si le point M est le milieu du segment [AB], alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.
- ✓ **Réciproquement :** Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MD}$, alors M est le milieu du segment $[AB]$.



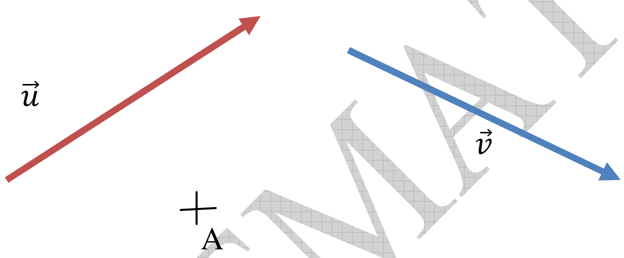
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

II. Addition vectorielle :

1) Activité:

On considère la figure suivante où $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs et A un point du plan.



Les points B et C sont tels que $t_{\vec{u}}: (A) = B'$ *et* $t_{\vec{v}}(B) = C$.

a) Sachant que $t_{\vec{u}}: (A) = B$ signifie que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, complète : $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, signifie que $t_{\vec{...}}(...) = \cdots$

b) Reproduis la figure et construis les points B et C.

c) Sur la même figure, place un point E différent de A. Construis les points F et G tels que :

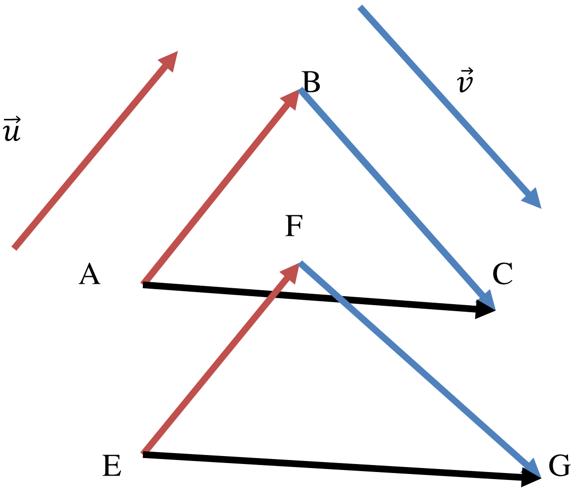
$t_{\vec{u}}: (E) = F$ *et* $t_{\vec{v}}(F) = G$.

d) Compare les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{EG}$ (sens, longueur et direction).

Solution :

$\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ *signifie que* $t_{\vec{v}}(B) = C$

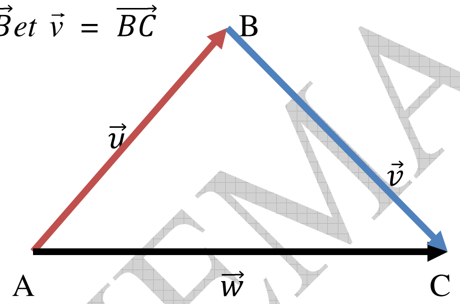
$\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{EG}$ *ont même sens, même longueur et même direction*



2) Définition

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *du plan. Soit B est l'image de A obtenue par la translation de vecteur* $\vec{u}$ *et C l'image de B obtenue par la translation de vecteur* $\vec{v}$ *.*
Le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ *est le vecteur somme de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *. On note* $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$



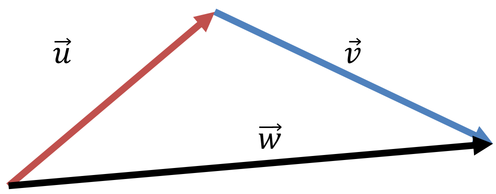
3) Relation de Chasles

Des points A, B et C étant donnés on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Cette égalité traduit la relation de Chasles.

4) Méthodes :

- Pour construire le vecteur somme de deux vecteurs dont l'origine de l'un coïncide avec l'extrémité de l'autre, on joint le bout du premier vecteur à l'extrémité du deuxième vecteur.

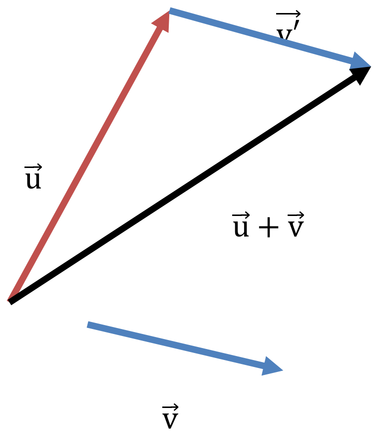
Exemple :



$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

- Pour construire le vecteur somme de deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
  - ✓ On trace à partir de l'extrémité de $\vec{u}$ un vecteur $\vec{v'}$ est égal à $\vec{v}$.
  - ✓ On applique $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v'}$.

Exemple :



5) Propriété de l'addition vectorielle :

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs :

a) **Commutativité** :

L'addition des vecteurs est une opération commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

b) **Associative :**

L'addition des vecteurs est une opération associative : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

c) Le vecteur nul

Par définition, le vecteur nul est le vecteur de longueur nulle. Il est noté $\vec{0}$, *et ce symbole se lit « vecteur nul ».*

Pour tous les points M du plan, on a : $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$

Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens.

La translation de vecteur nul ne déplace aucun point du plan. On a toujours : $t_{\vec{0}}(M) = M$

d) Vecteurs opposés :

Si la somme de deux vecteurs distincts est nulle, alors ces vecteurs sont opposés.

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ *est l'opposé du vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Remarques:

Soient A, B, C trois points quelconques du plan. On a avec la relation de Chasles :

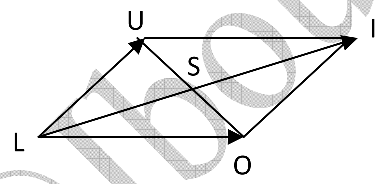
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC})\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

6) Exercice d'application :

L, O, U sont trois points non alignés du plan. S est le milieu du segment [OU].

a) Construis le point I tel que : $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU}$

b) Démontre que $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU} = 2\overrightarrow{LS}$



Solution :

$\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{LU}$ or [LI] est un diagonale S son milieu, donc

$$\overrightarrow{LS} = \overrightarrow{SI} \text{ et } \overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LS} + \overrightarrow{SI}, \text{donc } \overrightarrow{LI} = 2\overrightarrow{LS}$$

III. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel :

1) Définitions :

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Le vecteur $k\vec{u}$ est appelé vecteur produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k.

- ✓ *Si k=0, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.*
- ✓ *Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.*
- ✓ *Si k>0, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens.*
- ✓ *Si k<0, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont des sens contraires.*

2) Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs et k et k' deux réels :

- ✓ $\vec{u} = 1\vec{u}$.
- ✓ $k(k'\vec{u}) = (k\times k')\vec{u}$.
- ✓ $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- ✓ $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Exemples :

Soit à exprimer plus simplement en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, chacun des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, $\overrightarrow{w_3}$, $\overrightarrow{w_4}$, définis par :

$\overrightarrow{w_1} = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 2(\vec{u} - \vec{v})$

$\overrightarrow{w_2} = \vec{u} + 2(\vec{v} - \vec{u}) - 3(\vec{u} - \vec{v})$

$\overrightarrow{w_3} = 3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 5(\vec{v} - \vec{u})$.

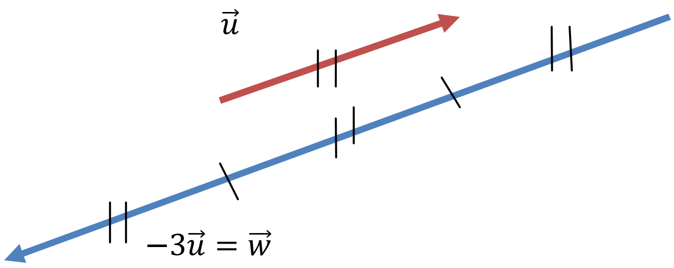
$\overrightarrow{w_4} = 3(-\vec{u} + \vec{v}) - 2(2\vec{u} + \vec{v}) + 3\vec{u} + \vec{v}$

3) Méthode :

Pour construire le vecteur produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, on procède comme suit :

- ✓ Construire le vecteur $\vec{u}$.
- ✓ Tracer un segment de support ayant la même direction que celui de $\vec{u}$ et de longueur égale à $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.
- ✓ Orienter le segment de même sens que $\vec{u}$ si k>0 et dans le sens contraire si k<0.

Exemple :
Soit à construire un vecteur $\vec{w}$ *tel que* $\vec{w} = -3\vec{u}$.



IV. Vecteurs colinéaires

1) Définition :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils sont tous deux de même direction ou si l'un d'eux est nul.

2) Propriétés :

Soit k un réel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :

- ✓ *Si $\vec{u} = k\,\vec{v}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*
- ✓ *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et non nuls, alors $\vec{u} = k\vec{v}$ (avec $k \neq 0$)*

Remarque : Le vecteur nul n'a pas de direction, donc il est colinéaire à tout vecteur.

3) Méthodes :

- ✓ Pour démontrer que deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires, on exprime l'un d'eux en fonction de l'autre. Autrement trouver un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- ✓ Pour démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, on peut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

4) Exercice d'application :

Soit ABC un triangle rectangle en A. E, K et F sont trois points du plan tels que :

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$;

$2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF}$; $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}$.

a) Construis le triangle ABC puis place les points E, K et F.

b) Trouve une relation vectorielle entre les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{KF}$. Déduis-en que les points, E, F et K sont alignés.

Solution :

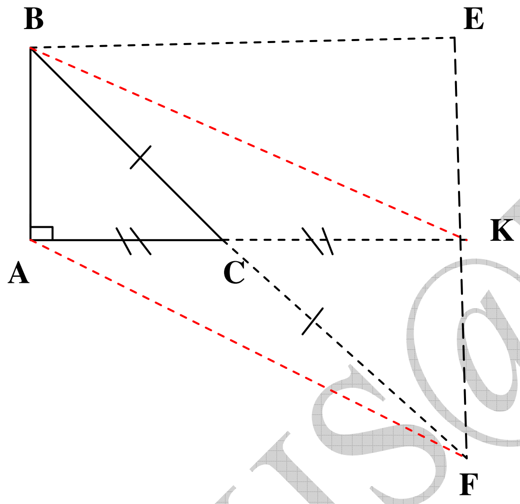
$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$;

$2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF}$; $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}$.

(1) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AK}, donc\ ABEK\ parallélograme \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EK}$

(2) ABKF parallélogramme car ses diagonales se coupent en leurs milieux, donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{KF}$

(1) et (2) $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{KF}$, d'où E, K et F sont alignés



CHAPITRE6: REPERAGE DANS LE PLAN

Durée : 12 heures.

Objectifs de la leçon :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

Calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormal.
Calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs.
Reconnaître, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal, le vecteur nul, deux vecteurs égaux, deux vecteurs opposés.
Calculer les coordonnées du vecteur produit d'un vecteur par un réel.
Montrer à l'aide de leurs coordonnées que deux vecteurs sont :
-Colinéaires.
-Orthogonaux.
Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées.
Donner une équation générale d'une droite connaissant les coordonnées de deux de ses points.
Reconnaître l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées.
Déterminer l'équation réduite d'une droite.
Passer de l'équation réduite à l'équation générale si possible et inversement.
Donner une équation générale d'une droite connaissant les coordonnées d'un point et son coefficient directeur.
Représenter une droite dans un repère orthonormal à partir :
-de deux de ses points,
-d'un point et de son coefficient directeur,
-d'un point et d'un vecteur directeur ou d'une équation.
Donner une équation générale d'une droite connaissant :
-les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur
-les coordonnées d'un point et le coefficient directeur de la droite.
Reconnaître deux droites parallèles, perpendiculaires à partir de :
-leurs équations réduites,
-leurs coefficients directeurs,
-leurs vecteurs directeurs.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.
Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.
-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Plan du cours : **(Voire le cours)**

Introduction :

Le repérage est le fait de représenter la position d'un point par une série de nombres. Il fait ainsi le lien entre le calcul et la géométrie. Descartes est à l'origine du repère du plan. Une anecdote raconte qu'observant une mouche qui se promenait sur les carreaux d'une fenêtre, il aurait pensé à définir, à l'aide des carreaux, des coordonnées du plan. Il explique ainsi qu'il est possible de traiter les problèmes de géométrie en problèmes numériques. Pour étudier les propriétés d'une courbe, il passe par une équation déterminée par une relation liant ses coordonnées. Celle-ci contient implicitement toutes les propriétés de la courbe.

Déroulement de la leçon :

I. Coordonnées d'un vecteur :

1) Activité :

a) Dans un repère orthonormal (O, I, J), place les points A(2 ;1), B(3 ;4).

b) Place les points E et F tels que $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OF}=-3\overrightarrow{OI} - 4\overrightarrow{OJ}$.

c) Ecris $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

d) Donne le couple de coordonnées de chacun des points E et F.

2) Définition et notation:

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on appelle coordonnée ou composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le couple de réels ***($x_B - x_A$; $y_B - y_A$).***

$x_B - x_A$ est la première composante (ou première ordonnée) de $\overrightarrow{AB}$.

$y_B - y_A$ est la deuxième composante (ou deuxième ordonnée) de $\overrightarrow{AB}$.

On note ***$\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$)*** *ou* ***$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.***

3) Propriétés :

i. Vecteurs égaux :

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{u'}(x'; y')$ dans un repère orthonormal (O, I, J).

$\vec{u} = \vec{u'}$ équivaut à ***(x=x' et y=y').***

ii. Somme de deux vecteurs :

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{u'}(x'; y')$ dans un repère orthonormal (O, I, J).

Si $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{w}$, alors $\vec{w}$ a pour coordonnées ***(x+x' ; y+y').***

Exemple :

Soient $\vec{u}(2; 1)$ *et* $\vec{u'}(4; 3)$. $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{w}(2 + 4; 1 + 3)$; $\vec{w}(6; 4)$

iii. Vecteur nul :

Le vecteur nul $\vec{O}$ a pour coordonnées ***(0 ;0).***

iv. *Vecteurs opposés :*

Dans un repère (O ;I ;J), deux vecteurs sont opposés si et seulement si leurs abscisses et leurs ordonnées sont opposées.

Autrement dit, soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{u'}(x'; y')$, $\vec{u} = -\vec{u'}$ si et seulement si ***x=x' et y=y'***

Exemple : $\vec{u}(2; -1)$ *et* $\vec{u'}(-2; 1)$ sont opposés.

v. Produit d'un vecteur par un réel :

Etant donné un vecteur $\vec{u}(x; y)$ et nombre réel k. Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont ***(kx ; ky).***

Exemple : $\vec{u}(2; 3)$, donc $4\vec{u}(8 ; 12)$.

vi. Vecteurs colinéaires :

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{u'}(x'; y')$,

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires équivaut à : ***xy'−x'y=0***

Exemple :

$\vec{u}(2; 1)$ *et* $\vec{u'}(1; \frac{1}{2})$: $2\times\frac{1}{2} - 1 \times 1 = 1 - 1 = 0$; *donc* $\vec{u}$ *et* $\vec{u'}$ sont colinéaires.

vii. Vecteurs orthogonaux :

Soient (O ;I ;J) un repère orthonormal et deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ *et* $\overrightarrow{u'}(x'; y')$.

$\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{u'}$ *sont orthogonaux équivaut à :* ***xx'+yy'=0****.*

Exemple :

$\vec{u}(2; 1)$ *et* $\overrightarrow{u'}(-1; 2) : 2\times(-1) + 1\times 2 = -2 + 2 = 0;$ *donc* $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux.

4) Exercice d'application :

a) On trouve dans un repère les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{-1}{2}; 3\right)$ *et* $\vec{v}(2; 4)$. Calcule les coordonnées $\vec{u} + \vec{v};\ \vec{u} - \vec{v};\ 2\vec{u};\ -3\vec{v}$.

b) On donne les vecteurs $\vec{r}(2; 3)$, $\vec{s}\,(3; 4{,}5)$ *et* $\vec{t}(7{,}5\,; -5)$. Les vecteurs $\vec{r}$ *et* $\vec{s}$ sont-ils colinéaires ? Les vecteurs $\vec{s}$ *et* $\vec{t}$ sont-ils orthogonaux ?

II. Distance de deux points :

1) Activité :

a) Place les points A(1 ; 4) et B(−3 ; 1) dans un repère orthonormal (O ;I ;J).

b) Calcule $(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2$.

c) Mesure la distance AB dans le repère, puis compare le résultat obtenu avec le résultat trouvé à la question b).

2) Définition :

Dans un repère orthonormal, la distance de deux points A $(x_A\,; y_A)$ *et B*$(x_B\,; y_B)$ *est :*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple:

Soit à calculer la distance entre les points A(2 ;1) et B(4 ; 3).

$$AB=\sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

3) Exercice d'application :

a) Dans un repère orthonormal (O ;I ;J), place les points A(4 ;3) ; B(−2 ;5) et C(−3 ;−1).

b) Calcule les distances AB ;BC et AC.

III. Equation et représentation d'une droite :

1) Activité :

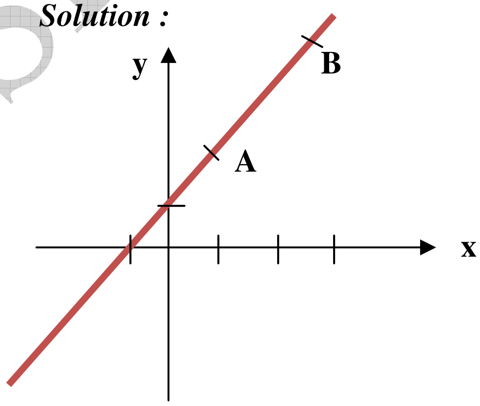
a) Place dans un repère orthonormal les points A(1 ;2) et B(3 ;4) et trace la droite (AB).

b) Soit M(x ;y) un point de la droite (AB). Exprime en fonction de *x* et *y* les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et celles de $\overrightarrow{AB}$.

c) Déduis-en la relation traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$.

d) Ecris cette relation sous la forme *ax+by+c=0.*

Solution :



$\overrightarrow{AM}$**(x−1 ;y−2)**

$\overrightarrow{AB}$**(3−1; 4−2)**

$\overrightarrow{AB}$ **(2; 2)**

(x−1)×2− 2(y−2)=0

x− y+1=0

2) Equation générale : *ax+by+c = 0*

a) Propriété :

Dans un repère orthonormal (O ;I ;J) un point M(x ;y) appartient à une droite (D) si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation du type ax+by+c=0, avec a ;b ;c étant des réels. Ce type d'équation est appelé équation générale de la droite (D). On note (D) : ax+by+c=0.

b) Méthode :

Pour déterminer une équation générale (ou équation cartésienne) d'une droite passant par deux points A et B du plan muni d'un repère orthonormal (O ;I ;J), on peut procéder comme suit :

- ✓ Considérer un point M(x ;y) quelconque de la droite (AB).
- ✓ Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et exprimer celles de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
- ✓ Traduire la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de leurs coordonnées.
- ✓ Ecrire cette relation sous la forme *ax+by+c=0* qui est l'équation générale de la droite (AB).

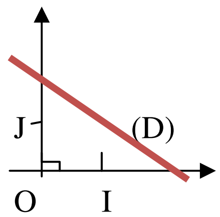
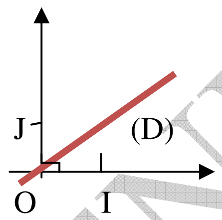
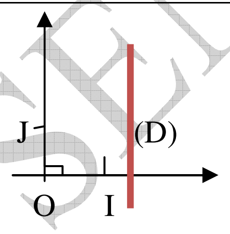
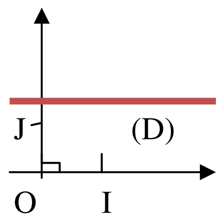
Exemple :

Soit à déterminer l'équation générale de la droite (D) passant par A(3 ;1) et B(2 ;3).

$\overrightarrow{AB}\,(-1;2)$ $et\overrightarrow{AM}\,(x-3;y-1)$; $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires si et seulement si

$-1\times(y-1)-(x-3)\times 2=0$; (D) :− 2x− y+7=0

c) Configuration générale :

Configuration	Equation	Coefficients	Position par rapport aux axes
	*ax+by+c=0* Exemple : *2x+3y− 1=0*	a≠ 0; $b\neq 0$; $c\neq 0$	(D): *ax+by+c=0* est sécante aux axes.
	*ax+by+=0* Exemple : *2x+3y =0*	a≠ 0; $b\neq 0$; $c=0$	(D): *ax+by+c=0* passe par l'origine.
	*ax+c=0* Exemple : *2x − 1=0*	a≠ 0; $b=0$; $c\neq 0$	(D): *ax+by+c=0* est parallèle à (OJ).
	by+c=0 Exemple : *3y− 1=0*	a= 0; $b\neq 0$; $c\neq 0$	(D): *ax+by+c=0* est parallèle à (OI).

3) Equation réduite d'une droite :

a) Propriétés :

✓ *Une équation réduite d'une droite est de la forme y=mx +p ; m et p étant deux réels fixés.*

Exemple :

Soit à donner l'équation réduite de la droite d'équation $2x+3y-1=0$

y= $\frac{-2}{3}x+\frac{1}{3}$ équation réduite.

✓ *Toute droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation réduite de la forme y=k (k ∈IR).*

Exemple :

y= -2 est parallèle à l'axe des abscisses.

✓ *Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite de la forme x=k (k∈IR).*

Exemple :

x=3 est parallèle à l'axe des ordonnées.

✓ *Toute droite passant par l'origine des axes a une équation réduite de la forme y=kx (k∈IR).*

Exemple :

y=2x passe par l'origine des axes.

b) Exercice d'application :

i. Donne si possible l'équation réduite de chacune des droites (D1), (D2), (D3) et (D4) d'équations générales respectives suivantes : $6x-2y+10=0$; $2x+4y-8=0$; $3x-5=0$; $4y+6=0$.

ii. Donne équation générale de chacune des droites (L1) ;(L2) et (L3) d'équation réduites respectives suivantes : $y=-x-1$; $y=\frac{1}{2}x+2$; $x=5$.

iii. Précise la position de chacune de ces droites par rapport aux axes.

4) Coefficient directeur et vecteur directeur :

a) Définitions :

(D) étant une droite d'équation y=mx +p ; A et B, deux points quelconques de (D) :

✓ *Le réel* $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ *est appelé coefficient directeur de la droite (D) avec* $x_B-x_A\neq 0$ *(m ne dépend pas du choix des points A et B sur (D)).*

✓ *Le vecteur* $\vec{u}$ *(1 ; m) est appelé directeur de la droite ('D). Tout vecteur ayant même direction que la droite (D) est aussi appelé vecteur directeur de (D).*

Exemple :

Soit à déterminer le coefficient directeur, puis le vecteur directeur de la droite(D) passant par A(3 ;1) et B(2 ;3) :

Coefficient $m=\frac{3-1}{2-3}=-2$ et vecteur directeur $\vec{u}(1;-2)$.

b) Exercice d'application :

i. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on donne les points A(6 ;1) ; B(2 ;3) et C(1 ;3). Calcule le coefficient directeur de chacune des droites (AB) ;(BC) et (AC).

ii. (R) et (S) sont deux droites d'équations réduites respectives $y=\frac{1}{3}x-3$; $y=5x+2$. Détermine un vecteur directeur de chacune de ces droites.

5) Equation d'une droite dont on connaît le coefficient directeur et un point (ou un vecteur directeur et un point) :

a) Méthodes :

- Pour déterminer une équation réduite $y= mx+p$, d'une droite (D) dont on connaît un point A(x_A ; y_B) et le coefficient directeur m :
  - ✓ On remplace m par sa valeur dans l'équation, de même que x et y respectivement par x_A et y_A dans l'équation qu'on vient d'obtenir.
  - ✓ On calcule la valeur de p.
  - ✓ On écrit une équation de la droite (D) en remplaçant m et p par leurs valeurs.

Exemple :

Soit à déterminer l'équation réduite de la droite (D) passant par S(1 ;2) et coefficient directeur m=3.

$y=mx+p$; $y=3x+p$; $2=3\times 1+p \Rightarrow p= -1$, donc $y=3x-1$ est l'équation réduite (D).

- Pour déterminer une équation générale d'une droite (D) dont on connaît un vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A(x_A ; y_A) :
  - ✓ On considère un point M(x ;y) de (D).
  - ✓ On exprime les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
  - ✓ On traduit la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ à l'aide de leurs coordonnées pour en déduire une équation générale de (D).

Exemple :

Soit à déterminer l'équation générale de la droite (D) passant par T(2 ;5) et vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; 3)

Soit M(x ;y) un point de (D) ; $\overrightarrow{TM}(x-2\ ;y-5)$. $\vec{u}$ *colinéaire* à $\overrightarrow{AM}$ équivaut à

$1\times(y-5)-3\times(x-2)=0$

y−5− 3x+6=0, donc (D) :3x− y− 1=0 équation générale (D).

b) Exercice d'application :

i. Détermine une équation réduite de la droite (D) passant par le point A(1 ; 3) et de coefficient directeur 2.

ii. Détermine une équation générale de la droite (D') passant par B(−1 ; 1) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}$ $(1\ ;\frac{1}{3})$

6) Propriétés

a) Propriété1 :

Soient (D) et (D') deux droites d'équations respectives y=mx+p et y=m'x+p'

- ✓ *Si m=m', alors (D) est parallèle à (D').*
- ✓ *Si (D) est parallèle à (D'), alors m=m'.*

b) Propriété2 :

Soient (D) et (D') deux droites d'équations respectives y=mx+p et y=m'x+p' :

- ✓ *Si $m\times m'=-1$, alors (D) et (D) sont perpendiculaires.*
- ✓ *Si (D) et (D') sont perpendiculaires, alors $m\times m'=-1$.*

c) Exercice d'application :

Dans un plan muni d'un repère orthonormal (O ;I ;J), on donne les droites (D), (D') et (D'') d'équations respectives : $2x-3y+5=0$; $\frac{3}{2}x+y+1=0$ *et* $4x-6y+7=0$.

Sans faire la représentation graphique, justifie que (D) est parallèle à (D'') et que (D) est perpendiculaires à (D').

CHAPITRE7 : LES TRANSFORMATIONS

Durée : 08 heures.

Objectifs de la leçon:

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

Reconnaître la transformation résultant de :
-deux symétries orthogonales successives
-deux symétries centrales successives
-deux translations successives.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.

Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Documents stagiaires, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre.

-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons.

Pré-requis

Isométries vues en 6è, 5è et 4è : translation, symétrie centrale, symétrie axiale, rotation.
Action successive de deux translations.

Plan du cours : (Voire le cours)

Introduction :

La notion de transformation, étrangère à la géométrie grecque, est en germe dans la création au quattrocento (le quinzième siècle italien) des méthodes de dessin en perspective. Ces méthodes permettaient d'engendrer de façon réglée des formes à partir d'autres : un cercle donnait une ellipse ou une parabole ou …selon les cas. C'est à partir de ces méthodes que Desargues a élaboré un outil conceptuel qui permet de transporter des propriétés d'une configuration simple(le cercle) à une configuration plus complexe (une conique). Après plusieurs décennies d'abandon, ces méthodes seront remises en usage par G. Monge dans les dessins architecturales, les coupes des pierres et du bois, la charpenterie, les dessins des machines, vaisseaux…

Déroulement de la leçon :

I. Exemples de transformations :

- ❖ Une transformation du plan est une application du plan dans lui-même telle que :
  - ✓ Tout point du plan admet une image et une seule.
  - ✓ Les images de deux points distincts sont toujours deux points distincts.

Exemples : la translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale (orthogonale), la rotation sont des transformations.

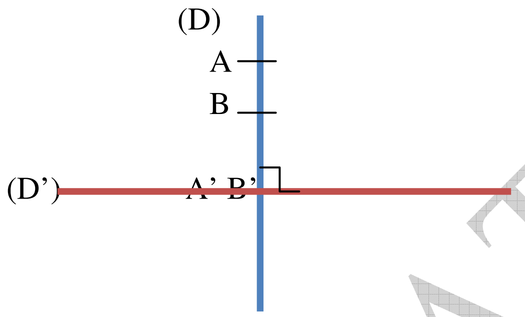
- ❖ Une transformation i est une isométrie signifie que si i(A)=A’ et i(B)=B’, alors A’B’

Remarque :

A’ est l’image de A par l’isométrie i et A est l’antécédent de A’ par l’isométrie i.

Contre-exemple : la projection orthogonale n’est pas une transformation car elle ne vérifie pas la deuxième affirmation.

Pour cela il suffit de considérer deux droites (D) et (D’) perpendiculaires, prenez deux points A et B de (D). Soient A’ et B’ les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur (D’). On constate A’ et B’ sont confondus, alors qu’une transformation, l’image de deux points distincts sont toujours deux points distincts.



- ❖ Une isométrie est une transformation qui conserve la distance :

La translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale (orthogonale) et la rotation sont des isométries.

II. Etude de deux translations successives :

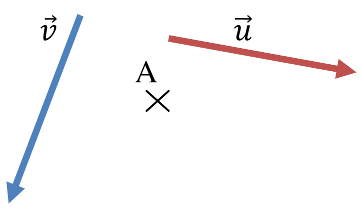
1) Activité :

a) Reproduis la figure ci-dessous où $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs distincts et A, un point du plan.

b) Construis l’image A’ de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, puis construis l’image de A’’ de A’ par la translation de vecteur $\vec{v}$.

c) Recopie et complète : $t_{\vec{u}(A)=A'}$ signifie $\overrightarrow{A\ldots}=\vec{u}$; $t_{\vec{v}(A')=\cdots}$.signifie $\overrightarrow{A'\ldots}=\vec{v}$

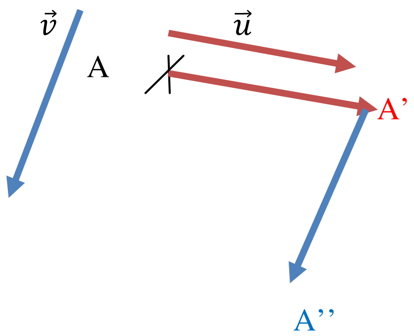
$\overrightarrow{AA'}' = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \vec{u} + \cdots.$; $\overrightarrow{AA''} = \vec{u} + \cdots$ *signifie* $A'' = t_{(\vec{u}+\vec{v})}(A)$



Solution

Recopie et complète : $t_{\vec{u}}(A)=A'$ signifie $\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$; $t_{\vec{v}}(A')=A''$ signifie $\overrightarrow{A'A''}=\vec{v}$

$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{AA''} = \vec{u} + \vec{v}$ $signifie$ $A'' = t_{(\vec{u}+\vec{v})}(A)$



2) **Propriété :**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts. Faire la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ revient à faire la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

3) **Exercice d'application :**

a) Marque trois points A, B et C non alignés et construis deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes.

b) Construis les images des points A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.

c) Compare les figures obtenues avec les images et le triangle ABC.

III. Etude de deux symétries centrales successives :

1) **Activité :**

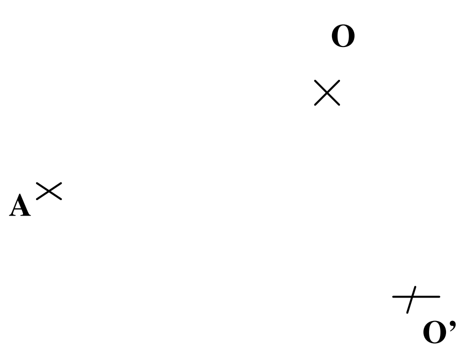
a) Reproduis la figure ci-dessous où O et O' sont deux points du plan et A, un point quelconque.

b) Construis l'image A' de A par la symétrie centrale de centre O.

c) Construis l'image A'' de A' par la symétrie centrale de centre O'

d) Recopie et complète $\overrightarrow{AA''} = \cdots + \cdots$

e) Montre que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO'}$.

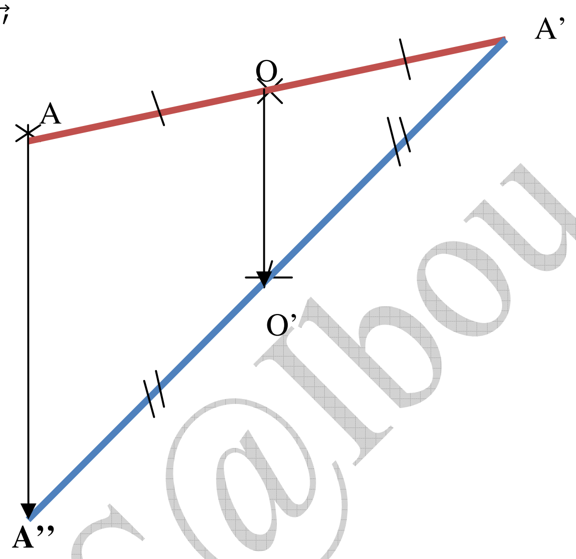


Solution :

Recopions et complétons $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$

Montrons que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO'}$.

$\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OA'} + 2\overrightarrow{A'O}$, *donc* $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO'}$



2) Propriété :

Soient O et O' deux points distincts du plan. Faire une symétrie centrale de centre O suivie d'une symétrie centrale de centre O' revient à faire la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

3) Exercice d'application :

Soit ABC un triangle quelconque.

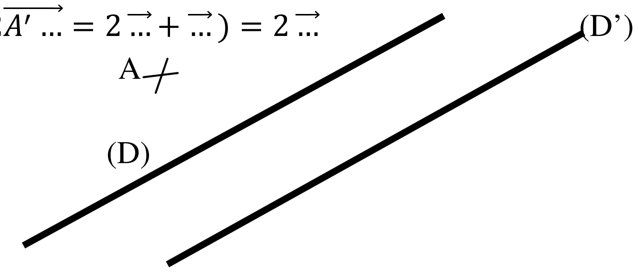
a) Construis le point A' image du point A par la symétrie centrale de centre B.
b) Construis le point A'' image du point A' par la symétrie de centre C.
c) Justifie que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{BC}$.

IV. Etude de deux symétries orthogonales successives :

1) Activité :

a) Reproduit la figure ci-dessous où (D) et (d') sont deux droites parallèles et A, un point du plan.
b) Construis le point A' symétrique de A par la symétrie orthogonale d'axe (D) et construis le point A' symétrique de A par la symétrie orthogonale d'axe (D').
c) Construis les points I et J tels que (I)=(D)∩(AA') ; (J)=(D')∩(A'A'').
d) Recopie et complète en remplaçant les pointillés par la lettre qui convient :

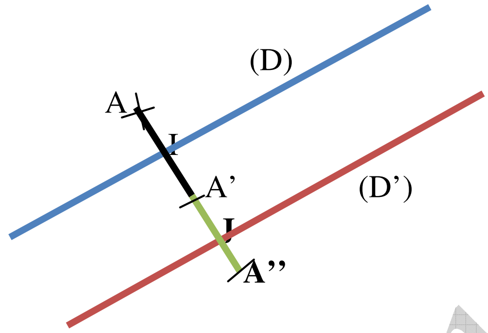
$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{\ldots A'}$; $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{\ldots A'} + 2\overrightarrow{A'\ldots} = 2(\overrightarrow{\ldots} + \overrightarrow{\ldots}) = 2\overrightarrow{\ldots}$



Solution :

Recopions et complétons en remplaçant les pointillés par la lettre qui convient :

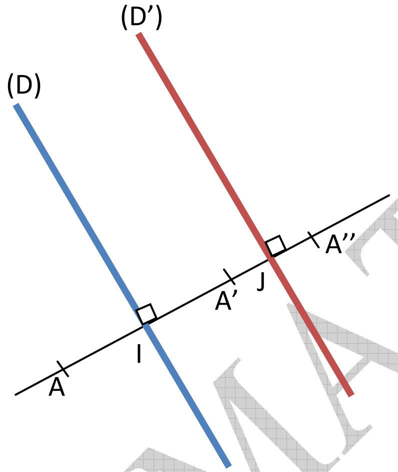
$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{IA'};\ \ \overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IA'} + 2\overrightarrow{A'J} = 2(\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'J}) = 2\overrightarrow{IJ}$$



2) Propriétés :

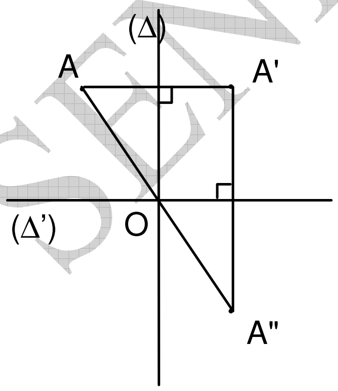
✓ *Soit (D) et (D') deux droites parallèles, faire la symétrie orthogonale d'axe (D) suivie d'une symétrie orthogonale d'axe (D'), revient à faire une translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$. IJ étant la distance des deux droites (D) et D').*

Exemple :



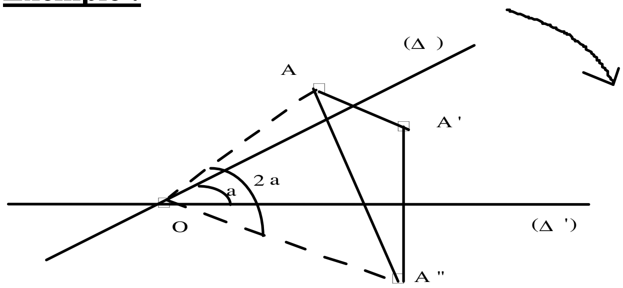
✓ *Soit (Δ) et (Δ') deux droites perpendiculaires en un point O, faire la symétrie orthogonale d'axe (Δ) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (Δ'), revient à faire la symétrie centrale de centre O.*

Exemple :



✓ *Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O et formant un angle aigu α, faire la symétrie orthogonale d'axe (Δ) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (Δ'), revient à faire la rotation de centre O et d'angle de mesure 2α.*

Exemple :



Remarque :

La symétrie où (D) est perpendiculaire à (D) est un cas particulier de la symétrie où (D) et (D') sont sécantes.

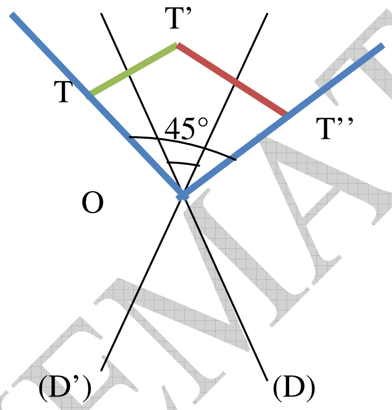
3) **Exercice d'application :**

a) Place un point T dans le plan.

b) Trace les droites (d) et (d') sécantes en o et formant un angle aigu de 45°.

c) Construis le point T' image de T par la symétrie d'axe (d) puis construis le point T'' image de T' par la symétrie d'axe (d'). Que représente T'' pour T ?

Solution :



T'' est l'image de T par la rotation de centre O et d'angle 90° (2×45°)

CHAPITRE 8 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Durée : 12 heures.

Objectifs de la leçon :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :
-reconnaître une pyramide et cône de révolution,
-faire une représentation plane d'une pyramide et celle d'un cône de révolution,
-réaliser le patron d'une pyramide et celui d'un cône de révolution,
-calculer l'aire d'une pyramide ou d'un cône de révolution obtenu par agrandissement ou par réduction,
-calculer l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide ou d'un cône de révolution,
-calculer le volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution,
-calculer le volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution obtenu par agrandissement ou par réduction,
-reconnaître la section par un plan parallèle à sa base d'une pyramide ou d'un cône de révolution,
-utiliser la section par un plan parallèle à sa base d'une pyramide d'un cône de révolution,
-utiliser le théorème de Thalès dans le plan et la section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base pour calculer des longueurs dans l'espace.

Sources et supports pédagogiques :

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, éditions du Renouveau Pédagogique, Inc., Montréal, 1973.
Guides pédagogiques 3ème, Guide d'usage 3ème, CIAM, Collection Excellence, Internet.

Matériel et supports didactiques :

-Pour le professeur, il lui faut le matériel géométrie complet, craie, éponge et tableau propre, des solides : cube, prisme droit, cylindre, cône, pyramide.
-Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice et des maquettes d'une pyramide et d'un cône de révolution.

Plan du cours : (Voire le cours)

Pré requis :

Patron de solides : pavé droit, cube, cylindre, prisme droit, sphère
Cercle, arc de cercle, longueur d'un arc de cercle
Parallélisme et orthogonalité dans l'espace.
Position relative de droites et plans dans l'espace.

Introduction :

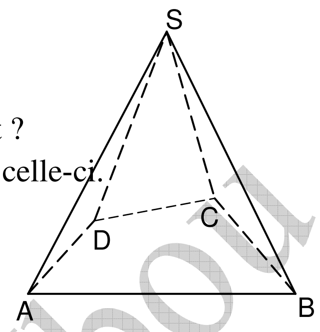
La géométrie dans l'espace consiste à étudier les objets définis dans la géométrie plane dans un espace à trois dimensions. L'étude de la géométrie dans l'espace entamée dans les classes précédentes sera poursuivie en classe de troisième avec l'étude de la pyramide et du cône de révolution. Ces deux notions sont très utilisées dans la vie courante. Par exemple, les patrons seront utilisés dans la confection des habits et la notion de réduction est utilisée en architecture pour les maquettes.

Déroulement de la leçon :

I. Pyramide :

1) Activité :

On donne le solide ci-contre :



a) Donne la position à partir de laquelle ce solide est observé

b) Donne le nombre de sommets, d'arêtes, de faces, de bases.

c) Quel est le sommet qui est joint à chacun des autres par un arrêt ?

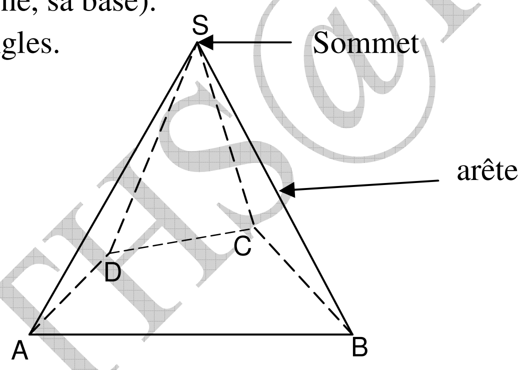
d) Ce sommet est opposé à une face et n'appartient pas au plan de celle-ci. Quelle figure est représentée par cette face ?

2) Présentation :

Une pyramide comprend :

- ✓ une base qui est un polygone.
- ✓ un sommet n'appartenant pas au plan contenant ce polygone (ce sommet représente le sommet de la pyramide et le polygone, sa base).
- ✓ des faces latérales qui sont des triangles.

Exemples

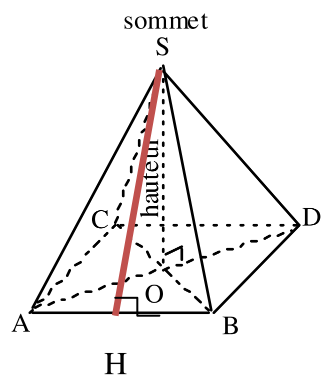


Pyramide régulière :

Le polygone ABCD est la base de la pyramide SABCD.

Le triangle SAB est une **face latérale**.

S est le sommet de la pyramide. [AS] est une arête. [AS], [SB], [SD], [SC] sont **des arêtes latérales**. [SO] est la hauteur de la pyramide. [SH] est un **apothème** de la pyramide.



a) Définitions:

- ✓ *Si la base d'une pyramide est un polygone régulier (qui a tous ses cotés égaux et tous ses angles égaux) et si sa hauteur passe par le centre de ce polygone régulier, alors cette pyramide est dite régulière.*
- ✓ *Si la base est un triangle, alors cette pyramide est appelé un tétraèdre.*
- ✓ *Si la base est un triangle équilatéral et la hauteur passe par le centre de ce triangle, alors cette pyramide est appelé un tétraèdre régulier.*

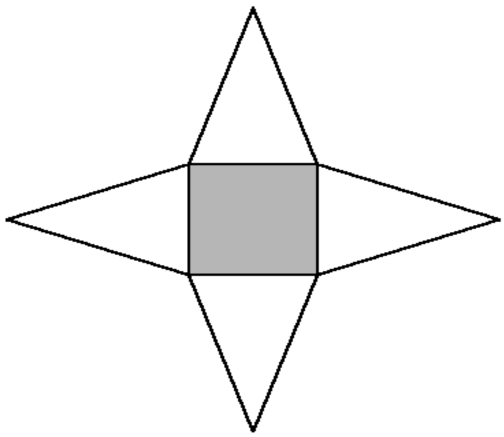
b) Propriété :

Si une pyramide est régulière alors chacune de ses faces est triangle isocèle de sommet s(s sommet de la pyramide).

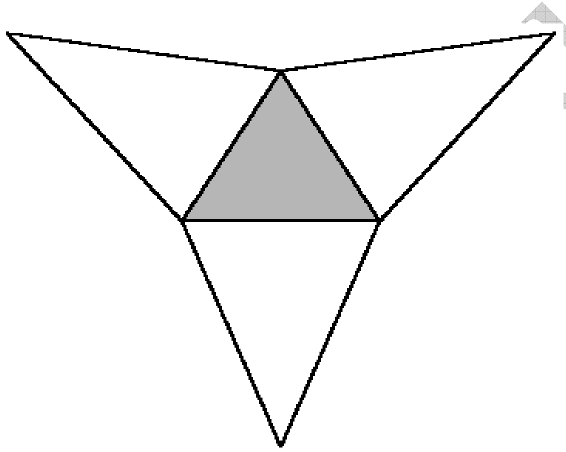
3) Patron d'une pyramide(ou développement d'une pyramide)

On appelle patron d'un pyramide un dessin aplati qui pliage donne le solide géométrique de départ.

Pour représenter le patron d'une pyramide, on représente la base puis les faces latérales



Patron d'une pyramide à carré



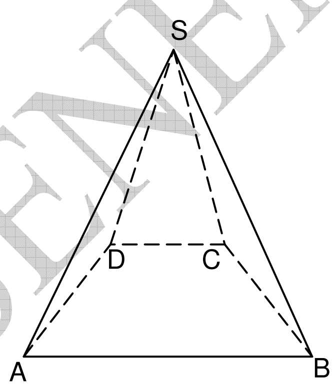
patron d'un tétraèdre

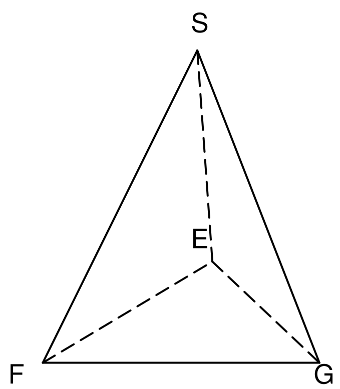
4) Exercices d'application :

a) Décris chacun des solides suivants :

b) Représente une pyramide SABCD de base rectangulaire ABCD.

c) Dessine le patron d'une pyramide SABC ayant pour base le triangle équilatéral de côté 4 cm pour faces latérales des triangles équilatéraux.





II. Cône de révolution :

1) Activité :

Voici représenté sur la figure 1, un triangle ABC rectangle en A

.

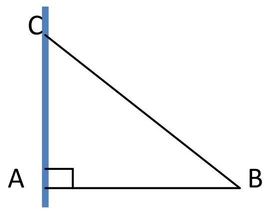


fig 1

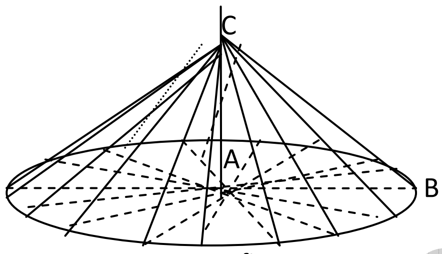


fig 2

On fait tourner le triangle ABC d'un tour complet autour de la droite (AC) qui reste fixe (voir fig. 1)
Le résultat de ce déplacement est représenté sur la figure 2

a) Le point B décrit quelle figure ?
b) Le segment [AB] engendre quelle surface ?

Solution :

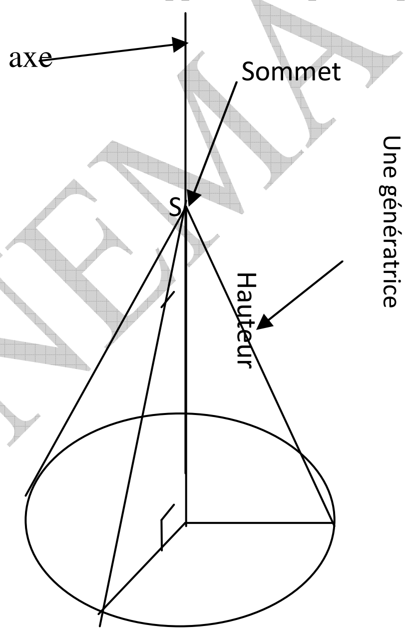
Lorsque l'on fait tourner le triangle rectangle autour d'un de ses côtés de l'angle droit, on obtient un cône de révolution.

a) Le point B décrit le cercle.

b) Le segment [AB] engendre le disque de base *D*.

2) Présentation :

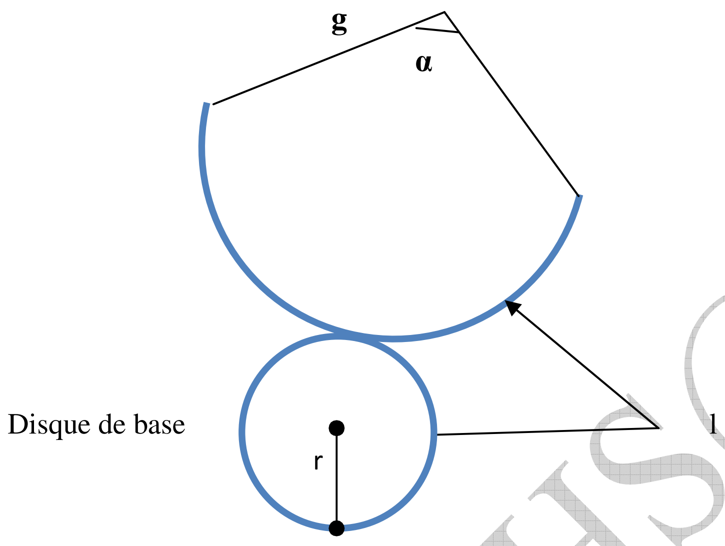
Un cône est un solide dont la base est un disque, les points du cercle de base sont reliés à un point fixe appelé sommet n'appartenant pas au plan du disque.



3) Patron d'un cône :

Le patron d'un cône de révolution est formé de deux parties :

- Un secteur circulaire d'angle α et de rayon g (qui deviendra la génératrice du cône)
- Un disque de rayon r qui deviendra la base du cône.



4) Exercice d'application :

Fait la représentation plane d'un cône de révolution de rayon de base 3cm et de hauteur 4cm. Représente son patron.

III. Aire et volume d'une pyramide et du cône de révolution :

1) Aire de la pyramide :

a-Activité :

Soit une pyramide SABCD dont la base ABCD est un carré de côté AB = 12 cm, les faces sont des triangles isocèles en S superposables tels que SA = 10 cm.

a) Calcule l'aire de la surface latérale de la pyramide.
b) Calcule l'aire de la base.
c) Calcule l'aire totale St de la pyramide.

b) Définition :

L'aire latérale d'une pyramide est égale à la somme des aires des faces latérales.
L'aire totale d'une pyramide est égale à la somme de l'aire latérale et de l'aire de la base.

c) Exercice d'application :

SABCD est une pyramide régulière à base le carré ABCD de côté 4 cm .SA = 10 cm.
i) Calcule l'aire latérale de cette pyramide.
ii) Calcule l'aire totale de cette pyramide.

1) Aire du cône de révolution :

a) Définition :

L'aire du cône est la somme de l'aire du disque et l'aire de la surface latérale :

Démonstration :

Soit A la surface latérale.

Appelons g la longueur d'une génératrice, r le rayon du disque de base, h la hauteur et α l'angle au sommet du cône.

La longueur l d'un arc étant proportionnelle à l'angle au centre qui l'intercepte.

Angle au centre	360°	α°
Longueur de l'arc	2π g	l

On a : $l = \dfrac{2\pi g \alpha}{360}$ (1)

La longueur de l'arc étant égale au périmètre du disque de base, on a :

$l = 2\pi\mathbf{r}$ (2)

De (1) et (2) on tire la relation :

$\dfrac{r}{g} = \dfrac{\alpha}{360}$ d'où $\alpha = \dfrac{360 r}{g}$.

$$l = \begin{cases} -\,longueur\ de\ l'arc\ (surface\ latérale) \\ -\,périmètre\ du\ disque\ de\ base \end{cases}$$

$A = \dfrac{\alpha g^2}{2}$ en remplaçant α par sa valeur on obtient $A = \pi r g$.

L'aire du disque de base est πr^2 et l'aire latérale est πrg

Donc l'aire totale est égale à : $\pi rg + \pi r^2$

b) Exercice d'application

Soit un cône de révolution de rayon de base 4cm et de génératrice 12cm

a) Fait la figure

b) Calcule le périmètre du disque de base.

c) Que représente ce périmètre pour la surface latérale ?

d) Déduis-en la mesure en degré de l'angle au sommet S du secteur circulaire définissant la surface latérale de ce cône.

e) Calcule la hauteur h de ce cône.

f) Calcule la surface totale de ce cône.

IV. Volume de la pyramide et du cône de révolution :

1) Définition :

*Le volume **V** d'une pyramide ou d'un cône de révolution d'aire de base **B** et de hauteur **h** est égale à* $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h.$

2) Exercice d'application :

- ✓ SABCD est une pyramide régulière à base le carré ABCD de côté 12 cm SA = 15 cm. Calcule l'aire de la base, puis le volume de cette pyramide
- ✓ Un flacon a la forme d'un cône de 18 cm de rayon de base et 25 cm de hauteur. Détermine la contenance de ce flacon.

V. Section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base :

A. Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base :

1) Activité :

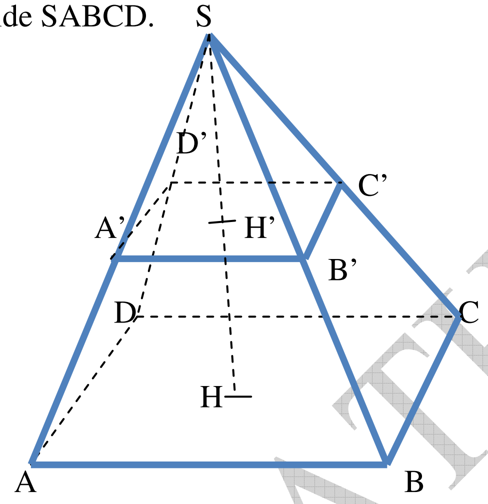
SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD. La section de cette pyramide par un plan parallèle à sa base est A'B'C'D'. Le point H est le centre de la base ABCD et [SH] est la hauteur. On donne SA' = $\frac{1}{3}$ SA.

a) Reproduit cette figure.

b) Utilise Thalès pour démontrer SH' = $\frac{1}{3}$ SH et A'B' = $\frac{1}{3}$ AB et déduis-en que A'B'C'D' est un carré.

c) Exprime l'aire L' de A'B'C'D' en fonction l'aire L de ABCD

d) Exprime le volume V' de la pyramide SA'B'D' en fonction du volume V de la pyramide SABCD.



2) Propriétés :

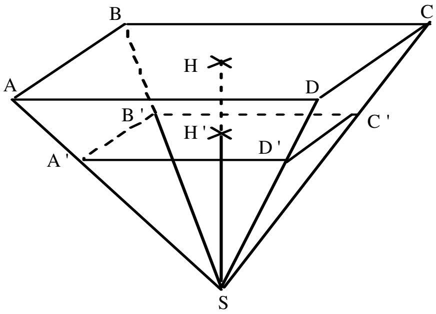
- ✓ *La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que celle de la base.*
- ✓ *Dans le cas où la pyramide est régulière, le centre de la section appartient à la hauteur de la pyramide.*
- ✓ *Si on multiple par un nombre k strictement positif, les longueurs d'une pyramide P d'aire A et de volume V, on obtient une pyramide P' d'aire A' et de volume V' telle que :* ***$A' = k^2 \times A$*** *et* ***$V' = k^3 \times V$.***
- ✓ *Lorsque k > 1, on dit que P' est un agrandissement de P. Dans ce cas k est appelé échelle d'agrandissement ou coefficient d'agrandissement.*
- ✓ *Lorsque 0 < k < 1, on dit que P' est une réduction de P. Dans ce cas k est appelé échelle de réduction ou coefficient de réduction.*

Remarque :

La partie de la pyramide comprise entre sa base et le plan de section est appelée tronc de pyramide.

3) Exercice d'application :

Une boîte de chocolats a la forme d'une pyramide tronquée (figure ci-dessous) Le rectangle ABCD de centre H et le rectangle A'B'C'D' de centre H' sont des plans parallèles. On donne AB = 6 cm ; BC = 18 cm ; HH' = 8 cm ; SH = 24 cm.



a) Calcule le volume V_1 de la pyramide SABCD de hauteur SH.

b) Quel est le coefficient k de la réduction qui permet de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SA'B'C'D' de hauteur SH' ?

c) Déduis en le volume V_2 de la pyramide SA'B'C'D' puis le volume V_3 de la boîte de chocolats ?

Solution :

a) $V1 = \frac{1}{3} \times$(aire de base) $\times$hauteur

Aire de base= $6\times18= 108cm^2$. La hauteur est SH=24cm donc $V_1=\frac{1}{3}\times 1O8\times24=864cm^3$

b) Le coefficient de réduction est $k=\frac{SH'}{SH}=\frac{2}{3}$

c) Le volume la pyramide SA'B'C'D' est $V_2=k^3V_1$ soit $V_2 = 256cm^3$

Le volume V_3 de la boite est $V_3 = V1 - V_2$, soit $V_3 = 608cm^3$

Autre exercice d'application

Une pyramide régulière a pour base un carré de côté 2 cm et une hauteur de 4 cm.

a) Calcule le volume de cette pyramide.

On réduit cette pyramide à l'échelle $\frac{2}{3}$; on obtient une pyramide régulière à base carrée

b) Quel est le côté de son carré de base ?

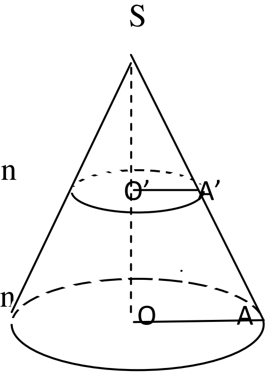
c) Quelle est sa hauteur ?

d) Calcule le volume V' de cette pyramide.

B. Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base:

1) Activité :

On coupe le cône ci- contre en A' par un plan parallèle au disque de base. Le rayon est [OA] et [SA] la hauteur. On donne $SA' = \frac{1}{3}SA$.



a) En utilisant le théorème de Thalès entre les triangles $SO'A'$ et SOA, montre que $SO'=\frac{1}{3}SO$ et $O'A'=\frac{1}{3}OA$.

b) Exprime l'aire b du disque de base du grand cône en fonction de OA.

c) Montre que $b=\pi\times(3O'A')^2$

d) Exprime l'aire b' du disque de base du petit cône en fonction de $O'A'$ puis déduisant une relation entre b et b'.

2) Propriétés :

- *La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un cercle dont le centre appartient à la hauteur du cône d'origine*
  - *Si on multiple par un nombre k strictement positif, les longueurs d'un cône C d'aire A et de volume V, on obtient un cône C' d'aire A' et de volume V' telle que :*

$A' = k^2 \times A$ *et* $V' = K^3 \times V$

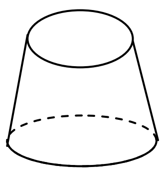
  - *Lorsque k > 1 on dit que c'est un agrandissement de C. Dans ce cas k est appelé échelle d'agrandissement ou coefficient d'agrandissement.*
  - *Lorsque 0< k <1 on dit que c'est une réduction de C. Dans ce cas k est appelé échelle de réduction ou coefficient de réduction.*
  - *La section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à sa base est un polygone régulier de même nature que celui de la base. Le centre de la section appartient à la hauteur de la pyramide.*

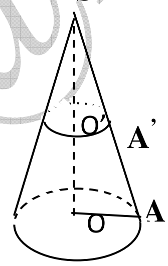
Remarque

La partie ayant la forme ci- dessous obtenue par section d'un cône suivant un plan parallèle est appelée un **tronc** de cône.

.

Tronc de cône





$$K = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA}$$; ***K est appelé coefficient ou échelle***

3) Exercice d'application :

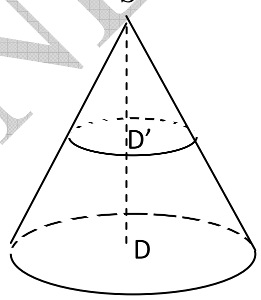
Un cône de révolution de sommet S a pour hauteur 15 cm et pour base un disque D de rayon 4 cm.

D' est la section de ce cône par un plan parallèle à la base; ce disque D' a pour rayon 3 cm.

a) Fais la figure.

b) D' est-il une réduction de D ? À quelle échelle ?

c) Calcule le volume du cône de base D, puis déduis-en le volume du cône de base D'.



FIN.

Progression des enseignements :

CONTENU	DATES
Chapitre1- AN : Racine Carré	20 au 31 Octobre
Chapitre 1 – AG : Propriétés de Thalès	3 Novembre au 12 Novembre
Intégration – Evaluation (Devoir 1 – 1er Semestre)	13 Novembre au 17 Novembre
Chapitre 2 – AN Applications affines	18 Novembre au 26 Novembre
Chapitre 2 – AG : Relations trigonométriques dans un triangle	27 Novembre au 10 Décembre
Intégration – Evaluation (Devoir 2 – 1er Semestre)	10 Décembre au 13 Décembre
Chapitre 3 – AG : Angles au centre – Angles inscrits	15 Décembre au 20 Décembre
Noël	
Chapitre 3 – AN : Equations et systèmes d'équations à deux inconnues	5 Janvier au 10 Janvier
Chapitre 4 – AN : Inéquations et systèmes à deux inconnues	12 Janvier au 14 Janvier
Intégration – Evaluation (Devoir 3 – 1er Semestre)	15 Janvier au 17 janvier
Chapitre 4 – AG : Transformations planes	19 Janvier au 21 Janvier
Chapitre 5 AG : Vecteurs	22 Janvier au 29 Janvier
Intégration – Evaluation (Composition 1er Semestre)	2 Février au 7 Février
Chapitre 6 : Repérage dans le plan	16 Février au 7 Mars
Chapitre 5 – AN : Statistique	9 Mars au 21 Mars
Intégration – Evaluation (Devoir 1 – 2ème Semestre)	23 Mars au 26 Mars
Pâques	
Chapitre 7 – AG: Géométrie dans l'espace	13 Avril au 4 Mai
Intégration – Evaluation (Devoir 2 – 2ème Semestre)	4 Mai au 6 Mai
Remédiation, Travaux dirigés, Révisions	8 Mai au 25 Mai
Evaluation : Composition 2ème Semestre- BFEM BLANC	26 Mai au 15 Juin

Prochainement, nous ferons mieux encore « Incha Allah ».