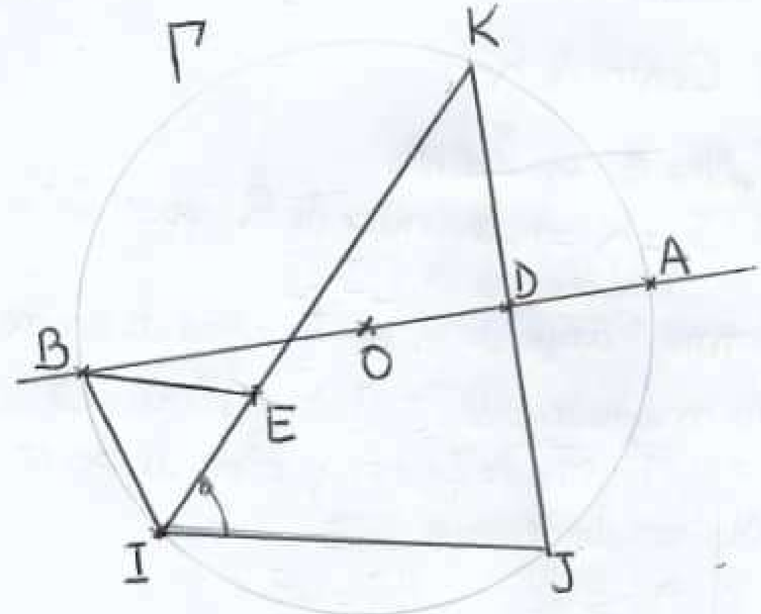
Correction de L'épreuve

Exercice 1

1) a)



b) Ensemble des points M du plan tels que

$$(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$$

L'ensemble des points M du plan est un arc du cercle Γ d'extrémités J et K (J et K exclus) et contenant I puisque $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

2) a) Justifions qu'il existe une unique rotation R tel que

$$R(I) = E \text{ et } R(J) = K$$

E point de $[IK]$ tel que $IJ = KE$

$I \neq J$ et $IJ = KE$ donc il existe un unique déplacement transformant I en E et J en K

Son angle est $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{EK})$

$\overrightarrow{IJ} \neq \overrightarrow{EK}$ (ce déplacement est une rotation)

Suite ①

$\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires et de m̂ sens donc

$$(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{EK}) = (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

R est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) Centre de R

$R(J) = K \Rightarrow$ le centre de R appartient à la médiatrice de [JK]

Comme l'angle de R est $\frac{\pi}{3}$ alors le centre est l'intersection de la médiatrice de [JK] et de l'ensemble des points M tq $(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) = \frac{\pi}{3} (2\pi)$; c'est le point B

c) Nature du triangle BIE

$$R(I) = E \Rightarrow \begin{cases} BI = BE \\ (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BE}) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

d'où BIE triangle équilatéral

3) a) Image de J par $R \circ S_J$

$S_J(J) = J$ et $R(J) = K$

$\Rightarrow R \circ S_J(J) = K$

b) Nature et éléments caractéristiques de $R \circ S_J$

$R \circ S_J$ composée de deux rotations d'angles respectifs $\frac{\pi}{3}$ et π

$\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \neq 2k\pi$ donc $R \circ S_J$ est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$

$R \circ S_J(J) = K \Rightarrow$ le centre Ω est sur la médiatrice de [JK]

$$(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega K}) = \frac{4\pi}{3} (2\pi) = (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) + \pi$$

Ω est donc sur l'arc de cercle ne contenant pas I

$\Omega = A$

Exercice 2

1) Probabilité pour que l'individu ait au moins un retard

a) le premier mois

Soit A cet événement

$$p(A) = \frac{212+73}{1000} = \frac{285}{1000} = 0{,}285$$

b) le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois

$$p(B) = \frac{250+60}{572} = \frac{310}{572} = 0{,}54$$

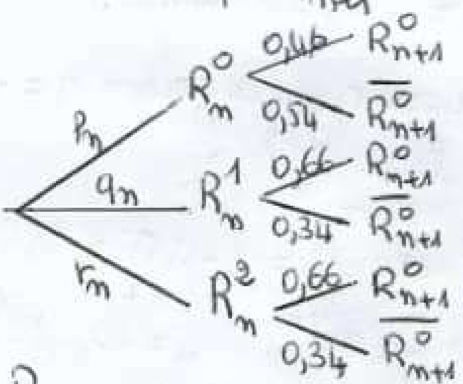
2) a) Détermination de P_1, q_1, r_1

D'après le tableau

$$P_1 = \frac{572}{1000} = 0{,}572 \; ; \; P_2 = \frac{318}{1000} = 0{,}318$$

$$P_2 = \frac{110}{1000} = 0{,}11$$

b) Montrons que $P_{n+1} = 0{,}46P_n + 0{,}66q_n + 0{,}66r_n$



$$P_{n+1} = p(R_n^0) \times p(R_{n+1}^0 / R_n^0) + p(R_n^1) \times p(R_{n+1}^0 / R_n^1) + p(R_n^2) \times p(R_{n+1}^0 / R_n^2)$$

$$P_{n+1} = 0{,}46P_n + 0{,}66q_n + 0{,}66r_n$$

c) Montrons que $P_{n+1} = -0,2 P_n + 0,66$

$P_{n+1} = 0,46 P_n + 0,66 q_n + 0,66 r_n$

$P_{n+1} = 0,46 P_n + 0,66 (q_n + r_n)$ avec $q_n + r_n = 1 - P_n$

$P_{n+1} = 0,46 P_n + 0,66 (1 - P_n)$

$\Rightarrow \boxed{P_{n+1} = -0,2 P_n + 0,66}$

d) $(u_n)_{n \geq 1}$ / $u_n = P_n - 0,55$

Montrons que (u_n) suite géométrique.

$u_{n+1} = P_{n+1} - 0,55 = -0,2 P_n + 0,66 - 0,55$

$\Rightarrow u_{n+1} = -0,2 P_n + 0,11$

$\Rightarrow u_{n+1} = -0,2 (P_n - 0,55)$

$\Rightarrow u_{n+1} = -0,2\, u_n$

(u_n) suite géométrique de raison $q = -0,2$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$? $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$?

$u_n = u_1 q^{n-1}$ avec $u_1 = P_1 - 0,55 = 0,022$

$u_n = 0,022 (-0,2)^{n-1}$, $P_n = (0,022)(-0,2)^{n-1} + 0,55$

$-1 < -0,2 < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (-0,2)^{n-1} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 0,55$

Problème:

A) 1) g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=x\ln x-x+1$

Variations de g.

* g dérivable sur $[1,+\infty[$

$g'(x)=\ln x \geq 0 \; \forall x\in[1,+\infty[$

donc g est croissante sur $[1,+\infty[$

* g croissante sur $[1,+\infty[$ et $g(1)=0$ donc

$\forall x\in[1,+\infty[\quad g(x)\geq 0$

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si } x>1 \\ f(1)=1 \end{cases}$

Continuité en 1

$D_f=[1,+\infty[$

$1\in D_f \quad \lim\limits_{1^+} f=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\frac{\ln x}{x-1}}=1=f(1)$

$\Rightarrow f$ continue en 1

3) a) Mq $\forall t\geq 1 \quad t-1-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq t-1$

on a $t-1-(t^2-t)=-t^2+2t-1=-(t-1)^2\leq 0$

$\Rightarrow t-1\leq t^2-t$

$\Rightarrow 1-\dfrac{1}{t}\leq t-1$ ①

on a

$t^2-t-t(t-1)^2-(t-1)=-t^3+3t^2-3t+1=-(t-1)^3\leq 0$

$\Rightarrow t^2-t-t(t-1)^2\leq t-1$

$\Rightarrow t-1-(t-1)^2\leq 1-\dfrac{1}{t}$ ②

① et ② $\Rightarrow t-1-(t-1)^2\leq 1-\dfrac{1}{t}\leq t-1 \quad \forall t\geq 1$

3) b) Montrons que $\forall x \geq 1$, $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \leq x-1-\ln x \leq \frac{(x-1)^2}{2}$

on a $t-1-(t-1)^2 \leq 1-\frac{1}{t} \leq t-1 \quad \forall t \geq 1$

$\Rightarrow \int_1^x t-1-(t-1)^2 dt \leq \int_1^x (1-\frac{1}{t})dt \leq \int_1^x (t-1)dt \quad \forall x \geq 1$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \leq x-1-\ln x \leq \frac{(x-1)^2}{2} \quad \forall x \geq 1$

c) Determination de $\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$

$\forall x \geq 1 \quad \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \leq x-1-\ln x \leq \frac{(x-1)^2}{2}$

Si $x > 1 \quad \frac{1}{2} - \frac{x-1}{3} \leq \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \leq \frac{1}{2}$

on $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2} - \frac{x-1}{3} = 2$

donc $\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$

d) Dérivabilité en 1 à droite

$1 \in D_f \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}\right)\left(\frac{x-1}{\ln x}\right) = \frac{1}{2}$

donc f est dérivable à droite en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

4) Tableau de variation et tracer (C_f)

f dérivable sur $[1, +\infty[$ et on a

$f'(x) = \frac{x\ln x - x + 1}{(\ln x)^2} = \frac{g(x)}{(\ln x)^2} \geq 0$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$1 \nearrow +\infty$

Suite ③

Suite ④

B) 1) b)

$$\frac{x-1}{2\ln x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{x-1}{\ln x} \quad \forall x \geq 1$$

De même $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

2) a) Montrons que $\forall x \geq 1$ et $\forall t \in [x, x^2]$

on a $\frac{x}{t\ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t\ln t}$

$x \leq t \leq x^2$ et comme $x \geq 1$ $\ln t \geq 0$

on a $\frac{x}{\ln t} \leq \frac{t}{\ln t} \leq \frac{x^2}{\ln t}$

$\Rightarrow \frac{x}{t\ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t\ln t}$

b) Mq $\forall x \geq 1$ on a $x\ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$

$$\frac{x}{t\ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t\ln t} \Rightarrow x\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} \leq F(x) \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}$$

$$\Rightarrow x\left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2} \leq F(x) \leq x^2\left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2}$$

$$\Rightarrow x\ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2 \quad \forall x \geq 1$$

c)

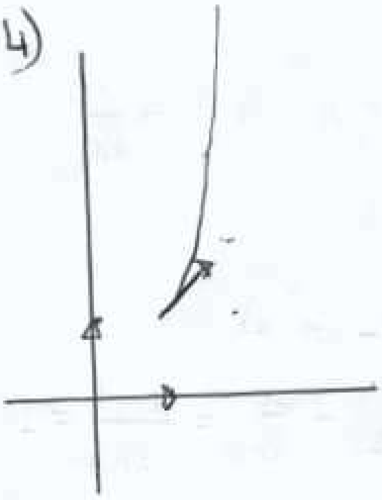
$\forall x \geq 1$ $x\ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$ $\quad 1 \in D_F$

$\lim\limits_{x \to 1^+} x\ln 2 = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 \ln 2 = 1 = F(1)$

$\Rightarrow F$ continue en 1

Suite ⑤

B) 4)



C)

1) Montrons que $\forall x \geq 1$ $F(x) = \int_1^x f(t)dt + \ln 2$

$\forall x \geq 1$ $F'(x) = f(x)$

$\Rightarrow \int_1^x F'(t)dt = \int_1^x f(t)dt$

$\Rightarrow F(x) - F(1) = \int_1^x f(t)dt$ avec $F(1) = \ln 2$

$\Rightarrow F(x) = \int_1^x f(t)dt + \ln 2$

2) $A(\alpha) = \int_1^\alpha f(t)dt$ or $F(x) = \int_1^x f(t)dt + \ln 2$

$\Rightarrow A(\alpha) = F(\alpha) - \ln 2$

$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{F(\alpha)}{\alpha} - \frac{\ln 2}{\alpha} = +\infty$

$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{F(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{\ln 2}{\alpha^2} =$

on montre d'après B1.b) que $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x^2} = 0$