Exercice 1 4points

Dans le plan orienté , on considère IJK est un triangle tel que $(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$ et $IJ < IK$

On note Γ le cercle circonscrit au triangle IJK et O son centre .Soit D le milieu de $[JK]$ et E le point du segment$[IK]$ tel que $= KE$.

La droite (OD) coupe Γ en A et B, tels que B et I soient sur le même arc de corde $[JK]$ du cercle Γ .

1)a)Faire une figure. **0,5pt**

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MK}) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$ **1pt**

2)a)Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que :$R(I) = E$ et $R(J) = K$.

Déterminer son angle. **0,5pt**

b) Démontrer que son centre est un point de Γ que l'on précisera . **0,5pt**

c)Quelle est la nature du triangle BIE ? **0,5pt**

3)a)Déterminer l'image de J par$R0S_J$ où S_J est la symétrie de centre J **0,5pt**

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $R0S_J$ **0,5pt**

Exercice 2 : 4 points

On a posé à 1000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois » ? Les réponses ont été regroupées dans le tableau ci-dessous:

Retard du 1er mois / Retard du 2ème mois	0	1	2	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1. On choisit un individu de cette population.

Déterminer la probabilité pour que l'individu ait au moins un retard :

a. Le premier mois, **0,5pt**

b. Le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois. **0,5pt**

2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un nombre n de mois (n entier non nul). On fait les synthèses ci-dessous :

- Si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité d'avoir zéro retard le mois n+1 est 0,46.

- Si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas avoir de retard le mois n+1 est 0,66.

- Si l'individu a eu deux retards le mois n, la probabilité de ne pas avoir de retard le mois n+1 est encore 0,66.

On note R_n^0, l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n »,

R_n^1, l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n »,

R_n^2, l'événement « l'individu a eu deux retards le mois n ». Les probabilités des événements R_n^0 ; R_n^1 et R_n^2 sont respectivement notées p_n, $q_n$et r_n.

a. Pour le premier mois (n = 1), les probabilités : $p_1 = p(R_1^0)$, $q_1 = p(R_1^1)$ et $r_1 = p(R_1^2)$ sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités : p_1, $q_1$et r_1. **0,5pt**

b. Monter que $p_{n+1} = 0{,}46\ p_n + 0{,}66\ q_n + 0{,}66\ r_n$. On pourra s'aider d'un arbre. **1pt**

c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0{,}2\ p_n + 0{,}66$. **0,5pt**

d. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}55$.

Démontrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison. **0,5pt**

e. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $u_n$un puis en déduire celle de p_n. **0,5pt**

<u>Problème</u> : 12 points

A) 1) On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=x\ln x-x+1$

Etudier les variations de g puis en déduire le signe de $g(x)$. **1,5pt**

2) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x} \ si\ x\succ 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ Montrer que f est continue en 1.**0,25**

3) a) Montrer que pour tout réel $t\geq 1$ on a : $t-1-(t-1)^2\leq 1-\dfrac{1}{t}\leq t-1$ **0,25pt**

b) Montrer que pour tout réel $x\geq 1$ on a : $\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(x-1)^3}{3}\leq x-1-\ln x\leq \dfrac{(x-1)^2}{2}$ **1pt**

c) En déduire $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$ **0,5pt**

d) En déduire que f est dérivable en 1 à droite et que $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ **1pt**

4) Dresser le tableau de variations de f puis tracer (C_f). On précisera les branches infinies.**1pt**

B) On considère la fonction F définie sur $[1;+\infty[$ par : $\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \\ F(1)=\ln 2 \end{cases}$

1)a) Montrer que pour tout réel $x\geq 1$ on a : $\dfrac{x^2-x}{\ln x^2}\leq F(x)\leq \dfrac{x^2-x}{\ln x}$ **0,25pt**

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ **0,5pt**

2) a) Montrer que pour tout réel $x\geq 1$ et pour tout réel $t\in[x;x^2]$ on a : $\dfrac{x}{t\ln t}\leq\dfrac{1}{\ln t}\leq\dfrac{x^2}{t\ln t}$

1pt

b) En déduire que pour tout réel $x\geq 1$ on a : $x\ln 2\leq F(x)\leq x^2\ln 2$. **0,5pt**

c) Montrer alors que F est continue en 1. **0,25pt**

3) a) En déduire que pour tout réel $x\geq 1$, F est dérivable et que $F'(x)=f(x)$. **1pt**

b) Montrer que pour tout $x\geq 1$ il existe un réel $c\in]1,x[$ tel que $F(x)-F(1)=(x-1)F'(c)$.

0,5 pt

c) En déduire que F est dérivable en 1 à droite et que $F'(1)=1$ **0,5pt**

4) Dresser le tableau de variations de F puis tracer sa courbe (C_F). On précisera la branche infinie. **0,5pt**

C) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$ et $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $y=0,\ \ x=1\ \ et\ \ x=\alpha$.

1) Montrer que pour tout réel $x\geq 1$ on a : $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt+\ln 2$ **1pt**

2) En déduire $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{A(\alpha)}{\alpha}$ *et* $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{A(\alpha)}{\alpha^2}$ **0,5pt**

Bonne Chance !