

EXERCICE 1 (03,50 points)

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} ; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \text{ et } K = \int_0^1 (\sqrt{x^2+2}) dx.$$

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}), \text{ où } \ln \text{ désigne le logarithme népérien.}$$

a) Montrer que f est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $[0 ; 1]$.

b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

2. a) Sans calculer explicitement J et K , montrer que : $K = J + 2I$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K , montrer que : $K = \sqrt{3} - J$.

3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de J et K .

EXERCICE 2 (04,50 points)

Pour analyser le fonctionnement d'une machine, on note mois par mois, ses pannes et on remarque que :

- Sur un mois, la machine tombe au plus une fois en panne ;
- Si pendant le mois m la machine n'a pas de panne, la probabilité qu'elle en ait une le mois suivant $m + 1$ est 0,24 ;
- Si la machine tombe en panne le mois m (ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant $m + 1$ est 0,04 ;
- La probabilité que la machine tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1.

On désigne par E_n l'événement « la machine tombe en panne le n -ième mois suivant sa mise en service ».

Si A est un événement, \bar{A} représentera son contraire.

On note P_n la probabilité de E_n (on a ainsi $P_1 = 0,1$).

1. a) Donner les valeurs numériques des probabilités de « E_{n+1} sachant E_n » et de « E_{n+1} sachant \bar{E}_n ».

b) Exprimer les probabilités de « E_{n+1} et E_n » et de « \bar{E}_{n+1} et \bar{E}_n » en fonction de P_n .

c) Utiliser les questions précédentes pour montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$P_{n+1} = 0,24 - 0,2P_n.$$

2. a) Résoudre l'équation : $P = 0,24 - 0,2P$.

b) Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $U_n = P_n - P$.

Calculer U_{n+1} en fonction de U_n .

En déduire les expressions de U_n et de P_n en fonction de n .

c) Montrer que la suite (P_n) est convergente et déterminer sa limite.

PROBLEME (12 points)

Soit, pour tout entier naturel k non nul, la fonction f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = x - k - \frac{k \ln x}{x}$.

La représentation graphique de f_k dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormal est notée (C_k) .

Unité graphique : 2 cm.

Partie A

1. Soit pour tout entier naturel k , la fonction g_k définie par : $g_k(x) = x^2 - k + k \ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g_k ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution unique notée α_k et que cette solution appartient à l'intervalle $[1 ; 3]$.

2. Établir que, pour x élément de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'_k(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}$.

Étudier le signe de $g_k(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k .

3. a) Étudier les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = x - k$ est asymptote à la courbe (C_k) .

c) Étudier la position de (C_k) par rapport à (D_k) .

Partie B

Étude des cas particuliers $k = 1$ et $k = 2$.

1- α_k étant le nombre défini en A-1, montrer que : $\alpha_1 = 1$ et $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2. a) Montrer que : $f_2(\alpha_2) = 2\alpha_2 - 2 - \frac{2}{\alpha_2}$.

b) Utiliser l'encadrement de α_2 pour donner un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

3. Donner les tableaux de variation de f_1 et f_2 .

4. Représenter dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2) .

5. Calculer en cm^2 , la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre (C_1) et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = 2$ et $y = x - 1$.

Partie C

1. Pour tout entier k non nul et pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, calculer $f_{k+1}(x) - f_k(x)$.

Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a) Étudier le sens de variation de h ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β et que $\beta \in]0 ; 1[$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $f_k(\beta) = \beta$.

3. a) A l'aide des résultats obtenus dans les questions 1 et 2 de cette partie C, établir que toutes les courbes (C_k) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, préciser les positions relatives de (C_{k+1}) et (C_k) .