Pays : Togo	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : BAC, Série D	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 3

EXERCICE 1 (3,5 *points*)

1. On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
A tout couple (x, y) de réels, on associe le point M de P de coordonnées x et y, en convenant que 2 cm représentent 5 sur chaque axe.

Représenter dans P l'ensemble G des points M(x, y) satisfaisant aux inéquations (Σ) :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

On hachurera la partie du plan formée des points pour lesquels les contraintes ne sont pas vérifiées.

2. Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes et 240 gants de toilette.

Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants de toilette pour 200 F.

Une deuxième entreprise vend pour 400 F un lot B de 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette.

a) Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots de A et y lots de B.
Exprimer en fonction de x et y la dépense en francs occasionnée par l'achat de x lots de A et y lots de B.

b) Justifier que (Σ) est le système de contraintes lié au renouvellement du linge.

c) Est-il possible de procéder aux achats nécessaires avec 5 000 F ? On justifiera la réponse.

d) Déterminer graphiquement, en précisant la démarche choisie, le nombre de lots A et B à acheter pour avoir une dépense minimale ? Quelle est cette dépense minimale ?

EXERCICE 2 (5,5 *points*)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

On considère les points A, B, et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

1. *a)* Calculer $\frac{a-b}{c-b}$ et en déduire que le triangle ABC est rectangle.

b) Déterminer l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. On note $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de nombres complexes, de premier terme $z_0 = 0$ et A_n, le point d'affixe z_n telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2.$$

a) Déterminer les affixes des points A_3 et A_4, sachant que $A_1 = A$ et $A_2 = B$.

b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c) Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) \text{ où } \omega = 1 + i\sqrt{3}.$$

d) En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e) Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$.
Déterminer l'affixe du point A_{2017}.

3. *a)* Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

PROBLÈME (11 *points*)

<u>Partie A</u>

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln x$.

1. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2. *a)* Montrer qu'il existe un nombre réel unique $\propto$ tel que : $g(\propto) = 0$.
Vérifier que : $0{,}65 < \propto < 0{,}66$.

b) En déduire selon les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{e^{-1}}^{1} g(x)dx$.

<u>Partie B</u>

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1. *a)* Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$, puis en donner une interprétation graphique.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite $(\mathcal{D}) : y = -x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ et étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

2. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
(*On pourra utiliser la fonction g définie dans la partie A*).

3. *a)* Montrer que : $f(\propto) = 1 - 2\propto + \frac{1}{\propto}$.

b) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

c) En déduire que : $f(\propto) < h(0{,}65)$.

d) Montrer que : $f(\propto) > f(0{,}65)$.

e) En déduire un encadrement de $f(\propto)$ à 2×10^{-2} près.

4. Calculer les coordonnées du point A de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à $(\mathcal{D})$.
Donner une équation de cette tangente (T).

5. Tracer $(\mathcal{D})$, (T) et $(\mathcal{C})$.

6. Soit k la restriction de f à $[\propto ; +\infty[$.

a) Montrer que k définit une bijection de $[\propto ; +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de la bijection k^{-1}. Justifier.

c) Donner le sens de variation de k^{-1} puis dresser son tableau de variation.

d) Calculer le nombre dérivé $(k^{-1})'(1)$.

e) Tracer la courbe $\mathcal{C}_{k^{-1}}$ dans le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.