| | | |
|---|---|---|
| **Pays** : Togo | **Année** : 2017 | **Épreuve** : Mathématiques |
| **Examen** : BAC, Séries C-E | **Durée** : 4 h | **Coefficient** : 5 |

## EXERCICE 1 (4 *points*)

Le plan P est muni du repère orthonormé (O, I, J), α étant un nombre réel. Soit $f_\alpha$ l'application de P dans P transformant I en A$\binom{\alpha+1}{\alpha+2}$, J en B$\binom{-1}{-2}$ et laissant invariant O.

**1.** *a)* Montrer que $f_\alpha$ est une application affine.

*b)* Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $f_\alpha$ est bijective.

On note $\ell_\alpha$ son application linéaire associée et on pose : $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.

*c)* Déterminer $\ell_\alpha(\vec{\imath})$ et $\ell_\alpha(\vec{\jmath})$. En déduire l'expression analytique de $f_\alpha$ dans le repère (O, I, J).

**2.** Déterminer α pour que l'on ait $f_\alpha o f_\alpha = Id_P$ où $Id_P$ est l'application identique du plan.

**3.** Déterminer l'ensemble des points invariants par $f_\alpha$. (*On discutera suivant les valeurs de* α).

**4.** Quelle est la nature géométrique de $f_1$ ? (α =1). Quels sont ses éléments caractéristiques ?

**5. Étude de $f_0$ (α = 0)**

*a)* Déterminer l'ensemble (Δ) des points M' qui sont images par $f_0$ d'au moins un point M de P.

*b)* Soit s la symétrie de centre O. Montrer que $f_0$ = p o s où p est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

## EXERCICE 2 (4 *points*)

Un sac contient 30 boules indiscernables au toucher dont α noires, $\beta$ blanches et $\gamma$ rouges. On suppose qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur. On tire au hasard et simultanément deux boules du sac. Soit l'événement E « Obtenir deux boules de même couleur ».

**1.** Calculer en fonction de α, $\beta$ et $\gamma$ la probabilité P(α,$\beta,\gamma$) de l'événement E.

**2.** On se propose de déterminer α, $\beta$ et $\gamma$ afin que P(α, $\beta,\gamma$) soit minimale. Pour cela on munit l'espace affine $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on considère les points A(30 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 30 ; 0) et C(0 ; 0 ; 30). Soit le point M(α, $\beta,\gamma$) de $\mathcal{E}$.

*a)* Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 30 = 0$.

*b)* En déduire que M appartient au plan (ABC).

*c)* Démontrer que 870 P(α, $\beta,\gamma$) + 30 = OM$^2$.

*d)* Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
Déterminer les coordonnées du point H.

*e)* En déduire les valeurs de α, $\beta$ et $\gamma$ qui rendent minimale P(α, $\beta,\gamma$), puis calculer la probabilité P(α, $\beta,\gamma$) correspondante.

**3.** Le sac contient désormais 10 boules noires, 10 boules blanches et 10 boules rouges. Soit $n$ et $k$ deux entiers naturels supérieur ou égal à 2.

Un joueur mise $n$ francs et tire simultanément deux boules du sac.

- S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois sa mise et le jeu est terminé.
- S'il obtient deux boules de couleurs différentes, il remet les deux boules tirées dans le sac et tire à nouveau simultanément deux boules.
- S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit ($k$–1) fois sa mise, sinon il perd sa mise et le jeu est terminé.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

*a)* Montrer que la probabilité pour que le joueur ait un gain algébrique égal à $kn - n$ est $\frac{9}{29}$.

*b)* Déterminer la loi de probabilité de X.

*c)* Calculer l'espérance mathématique E(X) en fonction de $k$ et $n$.

**PROBLÈME (12 *points*)**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

**1.** Préciser l'ensemble de définition de $f$.

**2.** Étudier le sens de variation de $f$ puis dresser son tableau de variation.

**3.** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ de $f$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**Partie B**

On considère l'application $T_k$ du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = kx - y + 1 \\ y' = -x - ky + 1 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est un réel.}$$

**1.** $T_k$ est-elle une transformation du plan ?

**2.** En discutant suivant les valeurs de $k$, déterminer l'ensemble des points invariants par $T_k$.

**3.** Déterminer l'écriture complexe associée à $T_k$.

**4.** Caractériser $T_k \circ T_k$ suivant les valeurs de $k$.

**5.** *a)* Caractériser $T_0$ puis déterminer l'équation de la courbe $(\Gamma)$ image de $(\mathcal{C})$ par $T_0$.

*b)* Tracer $(\Gamma)$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

**Partie C**

Pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$ on pose : $g(x) = f(cosx)$.

**1.** Montrer que $g$ est une primitive sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$ de $x \longmapsto \frac{C}{sinx}$ où $C$ est un réel à déterminer.

**2.** $\forall\, a \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-cos^{2n}t}{sint}\, dt$.

Montrer que : $0 \leq I_n(a) \leq \frac{cos^{2n}a}{-sina}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$.

En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a) = 0$.

**3.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on définit la fonction $F_n$ sur $\left[-\frac{\pi}{2} , a\right]$ par :

$F_n(t) = cost + \frac{cos^3t}{3} + \frac{cos^5t}{5} + \dots\dots\dots + \frac{cos^{2n-1}t}{2n-1}$.

*a)* Montrer que $F_n$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2} , a\right]$ et que $\forall\, t \in \left[-\frac{\pi}{2} , a\right]$, $F'_n(t) = \frac{-1+cos^{2n}t}{sint}$.

Calculer $F_n(-\frac{\pi}{2})$.

*b)* En intégrant la relation précédente entre $-\frac{\pi}{2}$ et $a$, montrer que $F_n(a) = \frac{-g(a)}{C} - I_n(a)$, où $c$ est le réel déterminé dans la question **C. 1**. En déduire $\lim\limits_{n\to +\infty} F_n(a)$.

**Partie D**

Dans cette partie $x \in ]0;1[$ ; $t \in ]0,x[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

**1.** Vérifier que : $\sum_{k=0}^{2n-1} x^k = \frac{1-x^{2n}}{1-x}$ (1)

et que $\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k = \frac{1+(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}$. (2)

**2.** *a)* Démontrer que : $1 < \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2}$.

En déduire que : $0 < \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}$.

*b)* Utiliser les relations (1) et (2) pour montrer que : $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}\,dt$

et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n} + (-1)^{2n}\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$.

*c)* En déduire que $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt$.

**3.** Des questions **D.1** et **2**, trouver deux fonctions $U$ et $V$ sans intégrale telles que : $U(x) < f(x) < V(x)$.