MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2019	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 3
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE D	

Exercice 1 (3 points)

Soit les deux intégrales définies par :
I = $\int_0^{\pi} e^x cos^2 x dx$ et J = $\int_0^{\pi} e^x sin^2 x dx$.

1- Calculer I + J. (0,75 pt)

2-a/ Montrer que J – I = $\int_{\pi}^{0} e^x cos axdx$ où a est un réel à déterminer. (0,5 pt)

b/ A l'aide d'une double intégration par parties, démontrer que J – I = $\frac{1}{5}(1 - e^{\pi})$. (1 pt)

3- Déterminer les valeurs exactes de I et de J. (0,75 pt)

Exercice 2 (6 points)

I- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O,$\vec{u}$, $\vec{v}$) on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$Z_A = -i$; $Z_B = 1 + i$; $Z_C = -1 + 2i$; $Z_D = -2$.

1- Placer sur une figure les points A, B, C et D. (0,5 pt)

2-a/ Interpréter géométriquement le module et l'argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_D} = Z$. (0,5 pt)

b/ Calculer le nombre complexe Z. (0,25 pt)

3- Déterminer le module et l'argument de Z puis en déduire la nature du quadrilatère ABCD. (0,75 pt)

II- Soit λ un nombre complexe de module 1 différent de 1.
On définit, pour tout entier naturel n la suite (Z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = \lambda Z_n - i \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe Z_n.

1-a/ Calculer Z_1, Z_2 et Z_3. (0,75 pt)

b/ Démontrer que : $\forall\, n \in$ IN* , $Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + ... + \lambda + 1)i$. (0,5 pt)

c/ En déduire que : $\forall\, n \in$ IN , $Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1} i$. (0,5 pt)

2- On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.
Démontrer que pour tout entier naturel, $Z_{n+k} = Z_n$. (0,25 pt)

3- Etude du cas $\lambda = i$.

a/ Montrer que $\forall\, n \in$ IN et $\forall\, k \in$ IN , $Z_k = Z_{4n+k}$. (0,25 pt)

b/ Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation φ dont on précisera le centre et l'angle. (0,5 pt)

c/ Déterminer les images de A, B, C, et D par φ et placer dans le repère précédent ces images. (1 pt)

d/ Montrer que $\forall\, n \in$ IN , $Z_{4n+1} = -i$. (0,25 pt)

Problème (11 points)

Partie A

1- Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' - y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur IR. (0,5 pt)

2- On considère l'équation différentielle (E′) : $2y' - y = (1-x)e^{\frac{x}{2}}$.

a/ Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = (\mathrm{m}x^2 + \mathrm{p}x)\, e^{\frac{x}{2}}$ soit solution de (E′). (1,5 pts)

b/ Soit g une fonction définie et dérivable sur IR.

b1/ Montrer que g est solution de (E′) si, et seulement si, $g - f$ est solution de (E). (0,5 pt)

b2/ Résoudre l'équation (E′). (0,5 pt)

3- Déterminer la solution g_0 de (E′) dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) passe par le point A(1,0). (0,5 pt)

Partie B

Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}$.

On désigne par ($\mathcal{C}$) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). Unité graphique : 1 cm.

1- Déterminer les limites de la fonction h en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 pt)

2- Etudier la dérivabilité de h sur IR, et déterminer la fonction dérivé h' de h. (0,75 pt)

3- Etudier le sens de variation de la fonction h puis dresser son tableau de variation.(1 pt)

4- Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = -\, e^{\frac{x}{2}}$ et par (Γ) sa courbe représentative.

a/ Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}$) et (Γ). (1 pt)

b/ Construire les courbes ($\mathcal{C}$) et (Γ) dans le repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). (1,25 pts)

5-a/ Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction $H : x \longmapsto (\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c})\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ soit une primitive de h sur IR. (0,75 pt)

b/ Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), (Γ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$. (0,5 pt)

Partie C

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$U_n = \int_{n+1}^{n+2} -h(t)dt$.

1- Interpréter géométriquement U_0. (0,25 pt)

2-a/ Démontrer que pour tout entier naturel n, $-h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2)$. (0,5 pt)

b/ En déduire le sens de variation de la suite (U_n). (0,5 pt)

3- La suite (U_n) est-elle convergente ? (0,5 pt)