CHAPITRE 1

Raisonner par récurrence

Pour reprendre contact

1 Avec un tableur

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$ **b.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n}$ et $u_0 = -1$

c. $u_{n+1} = 3u_n^2 - (n-1) + 1$; $u_0 = -1$ ($n \in \mathbb{N}$)

2 Calculs de termes d'une suite

a. $u_1 = -3$; $u_2 = -2$; $u_3 = 3$ **b.** $u_1 = 5$; $u_2 = 7$; $u_3 = 11$

c. $u_1 = 6$; $u_2 = -2$; $u_3 = 6$ **d.** $u_1 = 2$; $u_2 = 7$; $u_3 = 12$

3 Listes incomplètes

1. a. 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 **b.** 0, 1, 3, 7, 15, 31, 63 **c.** 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5 040

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$ **b.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$ **c.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = n!$

4 Jeu d'écriture

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 - n + 2$; $u_{n-1} = 2n^2 - 5n + 5$; $u_{n+2} = 2n^2 + 7n + 8$; $u_{2n} = 8n^2 - 2n + 2$.

5 Suite et somme

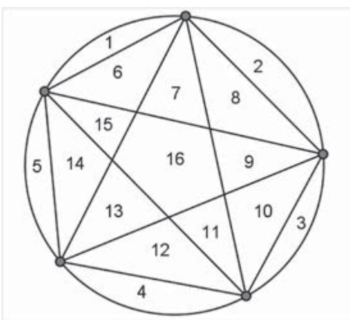
1. $u_1 = 1$; $u_2 = \dfrac{5}{4}$; $u_3 = \dfrac{49}{36}$. **2.** Pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. **3.** Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Activité 1. Des conjectures

A. 1.

n	C_n	S_n
1	0	1
2	1	2
3	3	4
4	6	8

2.



$C_5 = 10$
$S_5 = 16$

3. Il semble que, pour $n \geqslant 1$, on ait :

$C_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

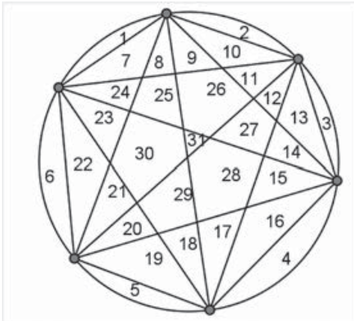
$S_n = 2^{n-1}$.

On aurait :

$C_6 = 15, S_6 = 32$

On a :

$C_6 = 15$ et $S_6 = 31$.



La conjecture portant sur C_n semble se vérifier, celle portant sur S_n est par contre incorrecte.

B. Pour $n \in \mathbb{N}$, $A(n) = n^2 - n + 11$.

1. Pour chaque valeur de n du tableau ($0 \leqslant n \leqslant 10$),
le nombre $A(n)$ ne semble que deux diviseurs à chaque fois : 1 et lui-même.

2. $A(11) = 11^2 - 11 + 11 = 11^2$.
Le nombre $A(11)$ a quant à lui 3 diviseurs : 1, 11, 121 donc la conjoncture précédente est incorrecte.

Activité 2. D'une conjecture à une démonstration

A. 1. $u_6 = \dfrac{1}{1\times 2} + \ldots + \dfrac{1}{6\times 7}$; $u_7 = \dfrac{1}{1\times 2} + \ldots + \dfrac{1}{7\times 8}$

2. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)\times n} + \dfrac{1}{n\times(n+1)}$.

3. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\times(k+1)}$.

B. 1. a. Conjectures : $u_7 = \dfrac{7}{8}$; $u_8 = \dfrac{8}{9}$; $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

On ne peut pas être certain de ces résultats (activités précédentes).

b. Avec $u_6 = \dfrac{6}{7}$, on a : $u_7 = u_6 + \dfrac{1}{7\times 8} = \dfrac{6}{7} + \dfrac{1}{56} = \dfrac{49}{56}$ donc : $u_7 = \dfrac{7}{8}$.

Ainsi, $u_8 = u_7 + \dfrac{1}{8\times 9} = \dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{72} = \dfrac{64}{72}$ donc $u_8 = \dfrac{8}{9}$. On obtient les résultats conjecturés.

2. a. Avec $u_k = \dfrac{k}{k+1}$, on a : $u_{k+1} = u_k + \dfrac{1}{(k+1)\times(k+2)}$ donc $u_{k+1} = \dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)\times(k+2)} = \dfrac{k(k+2)+1}{(k+1)\times(k+2)}$

soit $u_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2}{(k+1)\times(k+2)} = \dfrac{k+1}{k+2}$.

b. Pour $k = 8$, on obtient $u_9 = \dfrac{9}{10}$.

c. Pour $k = 9$, on obtient $u_9 = \dfrac{10}{11}$.

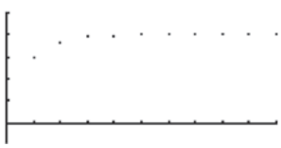
d. De $u_{12} = \dfrac{12}{13}$, on obtient $u_{13} = \dfrac{13}{14}$ et de $u_{99} = \dfrac{99}{100}$ on obtient $u_{100} = \dfrac{100}{101}$.

e. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Activité 3. D'une suite à une autre

$x \in]0\,;6]$, $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x}$; $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a.



b. Il semble que, pour $n \geqslant 0$, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.

2. a. La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;6]$ donc si $2 \leqslant u_k \leqslant 4$, alors $f(2) \leqslant f(u_k) \leqslant f(4)$
soit $3 \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$ donc $2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.

b. L'affirmation est justifiée : en effet, $2 \leqslant u_0 \leqslant 4$ donc $2 \leqslant u_1 \leqslant 4$ donc $2 \leqslant u_2 \leqslant 4$ donc …. Pour $n \geqslant 0, 2 \leqslant u_n \leqslant 4$.

3. L'implication $2 \leqslant v_k \leqslant 4 \Rightarrow 2 \leqslant v_{k+1} \leqslant 4$ reste vraie mais puisque v_0 n'appartient pas à $[2 ; 4]$, elle ne peut pas s'appliquer pour la suite (v_n).

TP1. Déterminer une formule explicite

1. a. Voir fichier sur le site Math'x.

b. Les points obtenus sont situés sur une parabole.

2. a. Pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = f(n) = a(n - n_1)(n - n_2)$ avec $n_1 = 0$ et $n_2 = 12$. $f(1) = -11 \Leftrightarrow a = 1$.
Donc, pour n entier $\geqslant 0$, il semble que : $u_n = n^2 - 12n$.

b. Initialisation : pour $n = 0$, $n^2 - 12n = 0$ et $u_0 = 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0, u_k = k^2 - 12k$ et montrons que $u_{k+1} = (k+1)^2 - 12(k+1) = k^2 - 10k - 11$.
On a : $u_{k+1} = u_k + 2k - 11 = k^2 - 12k + 2k - 11$ donc $u_{k+1} = k^2 - 10k - 11$.
Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = n^2 - 12n$.

TP2. Calculer la somme des cubes d'entiers

1. Voir fichier sur le site Math'x.

2. a. Pour n entier $\geqslant 1$, $V_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b. Conjecture : pour $n \geqslant 1$, $S_n = V_n^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Initialisation : pour $n = 1$, $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = 1$ et $S_1 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 1$, $S_k = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ et montrons que $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.
On a : $S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$ donc $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.
Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

TP3. Étudier une suite de sommes

1. a. $S_3 = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 0$ et $S_4 = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 0$.

b. Attention : il n'y a pas de relation de récurrence immédiate. Cependant, on a :

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (k(n-k) + k) = \sum_{k=1}^{n} k(n-k) + \sum_{k=1}^{n} k = S_n + \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.

```
20
Σ (K(20-K))
K=1
                1330
```

3. a. b. Voir fichier sur le site Math'x.

```
▼ VARIABLES
   n EST_DU_TYPE NOMBRE
   k EST_DU_TYPE NOMBRE
   S EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
   LIRE n
   S PREND_LA_VALEUR 0
   ▼ POUR k ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      S PREND_LA_VALEUR S+k*(n-k)
      FIN_POUR
   AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

c. Conjecture :
la suite (S_n) semble croissante.

4.
```
▼ VARIABLES
  ├ n EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ k EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ S EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ n PREND_LA_VALEUR 1
  ├ S PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ TANT_QUE (S<=2500) FAIRE
    ├ DEBUT_TANT_QUE
    ├ n PREND_LA_VALEUR n+1
    ├ S PREND_LA_VALEUR 0
    ▼ POUR k ALLANT_DE 1 A n
      ├ DEBUT_POUR
      ├ S PREND_LA_VALEUR S+k*(n-k)
      └ FIN_POUR
    └ FIN_TANT_QUE
  └ AFFICHER n
```

5. a. Voir question **1. b**.

b. On a : pour n entier $\geqslant 1, S_{n+1} = S_n + \dfrac{n(n+1)}{2}$ et on souhaite montrer que $S_n = \dfrac{n^3 - n}{6}$.

Initialisation : pour $n = 1$, $\dfrac{1^3 - 1}{6} = 0$ et $S_1 = 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 1$,

$S_k = \dfrac{k^3 - k}{6}$ et montrons que $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)^3 - (k+1)}{6} = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{6} = \dfrac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}$.

On a : $S_{k+1} = S_k + \dfrac{k(k+1)}{2} = \dfrac{k^3 - k}{6} + \dfrac{k(k+1)}{2}$ donc $S_{k+1} = \dfrac{k^3 - k + 3k^2 + 3k}{6} = \dfrac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n^3 - n}{6}$.

c. Posons $f(x) = \dfrac{1}{6}(x^3 - x)$ pour x réel $\geqslant 1 \cdot f'(x) = \dfrac{1}{6}(3x^2 - 1) \geqslant 0$ sur $[1; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc la suite (S_n) est strictement croissante.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

1 **1.** (I) → (H) → (H) → (H) → (H)

2. Impossibilité de gravir les marches s'il n'est pas capable d'atteindre la première ou s'il n'est pas capable de passer d'une marche à la suivante.

2 (A) et (B).

3 Voir corrigé en fin de manuel.

4 $u_0 = 0$; $u_1 = 2$; $u_2 = 2\sqrt{2}$; $u_3 = 2\sqrt{3}$.

On émet la conjecture : pour n entier naturel, $u_n = 2\sqrt{n}$.

Initialisation : pour $n = 0, u_0 = 0 = 2\sqrt{0}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$,

$u_k = 2\sqrt{k}$ et montrons que $u_{k+1} = 2\sqrt{k+1}$.

On a : $u_{k+1} = \sqrt{4 + u_k^2} = \sqrt{4 + 4k} = \sqrt{4(1+k)}$

donc $u_{k+1} = 2\sqrt{k+1}$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = (n+1)^2$.

5 Initialisation : pour $n = 0$, $(-2)^{0+1} + 3 = 1$ et $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$,

$u_k = (-2)^{k+1} + 3$ et montrons que $u_{k+1} = (-2)^{k+2} + 3$.

On a : $u_{k+1} = -2u_k + 9 = -2\left((-2)^{k+1} + 3\right) + 9$

donc $u_{k+1} = (-2)^{k+2} - 6 + 9 = (-2)^{k+2} + 3$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = (-2)^{n+1} + 3$.

6 **1.** $v_0 = 0$; $v_1 = 2$; $v_2 = 6$; $v_3 = 12$.

2. La formule $v_n = n(n+1)$ semble valable pour les premiers termes. Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 0$ et $0(0+1) = 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$,

$v_k = k(k+1)$ et montrons que

$v_{k+1} = (k+1)(k+2) = k^2 + 3k + 2$

On a : $v_{k+1} = v_k + 2k + 2 = k(k+1) + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = n(n+1)$.

7 **1. a.** Pour la suite (u_n) $(u_0 = 3 \; ; u_{n+1} = 2u_n - 1)$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 3$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $u_k = 2^{k+1} + 1$ et montrons que $u_{k+1} = 2^{k+2} + 1$.

On a : $u_{k+1} = 2u_k - 1 = 2 \times 2^{k+1} + 2 - 1$

donc $u_{k+1} = 2^{k+2} + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

b. Pour la suite (v_n) $(v_0 = 1 \; ; v_{n+1} = 2v_n + 3)$

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ et $2u_0 - v_0 = 6 - 1 = 5$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $2u_k - v_k = 5$ et montrons que $2u_{k+1} - v_{k+1} = 5$.

On a : $2u_{k+1} - v_{k+1} = 4u_k - 2 - 2v_k - 3 = 2(2u_k - v_k) - 5$

$= 10 - 5 = 5$.

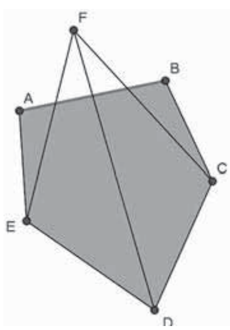
Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $2u_n - v_n = 5$.

2. Pour n entier naturel, $v_n = 2u_n - 5$ donc $v_n = 2^{n+2} - 3$.

8 Voir corrigé en fin de manuel.

9 **1.** $d_4 = 2 \; ; d_5 = 5 \; ; d_6 = 9 \; ; d_7 = 14$.

2. a.



$d_6 = d_5 + 3 + 1$

$d_6 = d_5 + 4$

b. $d_{n+1} = d_n + (n-2) + 1$

$d_{n+1} = d_n + n - 1$

3. Initialisation : pour $n = 4$, $d_4 = 2 = \dfrac{4(4-3)}{2}$ donc la propriété est vraie pour $n = 4$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 4$, $d_k = \dfrac{k(k-3)}{2}$ et montrons que $d_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$.

On a : $d_{k+1} = d_k + (k-1) = \dfrac{k(k-3)}{2} + (k-1)$

$d_{k+1} = \dfrac{k(k-3) + 2k - 2}{2} = \dfrac{k^2 - k - 2}{2} = \dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 4$, $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

10 Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2 \in [1 ; 2]$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $1 \leqslant u_k \leqslant 2$ et montrons que $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.

On a : $1 \leqslant u_k \leqslant 2$ donc $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_k} \leqslant \sqrt{2}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[1 ; 2]$. Ainsi $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

11 Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 \geqslant 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $u_k \geqslant k$ et montrons que $u_{k+1} \geqslant k + 1$.

On a : $u_{k+1} = 2u_k - k + 1 \geqslant 2k - k + 1$ donc $u_{k+1} \geqslant k + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n \geqslant n$.

12 **1.** Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0^2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $u_k > k^2$ et montrons que $u_{k+1} > (k+1)^2$.

On a : $u_{k+1} = u_k + 2k + 3 > k^2 + 2k + 3$.

Puisque $k^2 + 2k + 3 > k^2 + 2k + 1$ alors $u_{k+1} > (k+1)^2$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n > n^2$.

2. $u_0 = 1 \; ; u_1 = 4 \; ; u_2 = 9 \; ; u_3 = 16 \ldots$ Il semblerait que, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = (n+1)^2$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 = (0+1)^2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $u_k = (k+1)^2$ et montrons que $u_{k+1} = (k+2)^2$.

On a : $u_{k+1} = u_k + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$

$= k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = (n+1)^2$.

13 **1.**

X	Y1	Y2
0	1	0
1	2	1
2	4	4
3	8	9
4	16	16
5	32	25
6	64	36
7	128	49

Conjecture : pour $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

2. Dans $\mathbb{R}$, $2x^2 \geqslant (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$.

$\Delta = 8$; racines $x_1 = 1 - \sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Dans $\mathbb{R}$, $2x^2 \geqslant (x+1)^2 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$.

Dans $\mathbb{N}$, $2n^2 \geqslant (n+1)^2 \Leftrightarrow n \geqslant 3$.

3. Initialisation : pour $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ donc la propriété est vraie pour $n = 4$.
Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 4$, $2^k \geqslant k^2$ et montrons que $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.
On a : $2^{k+1} = 2 \times 2^k \geqslant 2k^2 \geqslant (k+1)^2$ car $k \geqslant 3$.
Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 4$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.
4. Non, voir tableau initial.

14 Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3.
Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $u_k = 4^k - 1$ soit un multiple de 3 et montrons que u_{k+1} est un multiple de 3.
On a : $u_{k+1} = 4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1$
$$= 4\Big(\underbrace{4^k - 1}_{\substack{\text{multiple de 3} \\ = 3a,\ a \in \mathbb{N}}}\Big) + 3 = 3(4a+1)$$
donc u_{k+1} est un multiple de 3.
Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, u_n est un multiple de 3.

15 **1.** Pour n entier $\geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n$.
2. Pour n entier $\geqslant 0$, $a_n = n^2 - n + 1$?
Initialisation : pour $n = 0$, $a_0 = 1$ et $0^2 - 0 + 1 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $a_k = k^2 - k + 1$ et montrons que $u_{k+1} = (k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$.
On a : $a_{k+1} = a_k + 2k = k^2 + k + 1$.
Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^2 - n + 1$.

16 Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{-n}{n+3}$ et $v_n = \dfrac{n+3}{3}$.

17 Voir corrigé en fin de manuel.

18 **1.** Voir fichier sur le site Math'x.

n	$u(n)$	$v(n)$
0	2,00	1
1	1,80	1,25
2	1,67	1,5
3	1,57	1,75
4	1,50	2
5	1,44	2,25
6	1,40	2,5
7	1,36	2,75
8	1,33	3
9	1,31	3,25
10	1,29	3,5

La suite (v_n) semble être une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n}{4} + 1$.
2. Puisque $v_n(u_n - 1) = 1$ alors $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$ d'où $u_n = \dfrac{n+8}{n+4}$.
3. Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $\dfrac{0+8}{0+4} = 2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $u_k = \dfrac{k+8}{k+4}$ et montrons que $u_{k+1} = \dfrac{k+9}{k+5}$.
On a : $u_{k+1} = \dfrac{5u_k - 1}{u_k + 3} = \dfrac{4k+36}{4k+20} = \dfrac{4(k+9)}{4(k+5)} = \dfrac{k+9}{k+5}$.
Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+8}{n+4}$.

19 **1.** Voir fichier sur le site Math'x.

n	u_n	v_n
0	2,00	– 1,00
1	2,33	– 0,50
2	2,60	– 0,25
3	2,78	– 0,13
4	2,88	– 0,06
5	2,94	– 0,03
6	2,97	– 0,02
7	2,98	– 0,01
8	2,99	0,00
9	3,00	0,00
10	3,00	0,00

La suite (v_n) semble être une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
Conjecture : pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n(u_n - 1) = u_n - 3 \Leftrightarrow$
$$u_n(v_n - 1) = v_n - 3 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 3}{v_n - 1}$$
donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{-\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}{-\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \dfrac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $\dfrac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^0}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0} = 2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $u_k = \dfrac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k}$ et montrons que $u_{k+1} = \dfrac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}$.

On a : $u_{k+1} = \dfrac{5\dfrac{3+\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^k}-3}{\dfrac{3+\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^k}+1} = \dfrac{2\left(3+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)}{2\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)} = \dfrac{3+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}.$

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = \dfrac{3+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

20 Pour n entier $\geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

1. <u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, $S_1 = 1$ et $1^2 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $S_k = k^2$ et montrons que $S_{k+1} = (k+1)^2$.

On a : $S_{k+1} = S_k + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1$

donc $S_{k+1} + (k+1)^2$.

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 1$, $u_n = n^2$.

2. Preuve très visuelle puisque les différentes couleurs correspondent aux nombres impairs.

21 **Partie 1**

n	0	1	2	3	4	5
u	1	3	6	11	20	37
S	1	4	10	21	41	78

Partie 2

1. Les valeurs de u_n et S_n pour n entier (de 0 à 5).

2. a.

n	0	1	2	3	4	5
$u_n - n$	1	2	4	8	16	32

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - n = 2^n$ donc $u_n = n + 2^n$.

c. <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 + 2^0 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, $u_k = k + 2^k$ et montrons que $u_{k+1} = k + 1 + 2^{k+1}$.

On a : $u_{k+1} = 2u_k + 1 - k = 2k + 2^{k+1} + 1 - k$

donc $u_{k+1} = k + 1 + 2^{k+1}$.

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 2^n$.

3. a. $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0 + 2^0 + 1 + 2^1 + \ldots + n + 2^n$

donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 2^{n+1} - 1$.

22 **1. a.** $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$(n+1)!(n+2) = 1 \times 2 \times \ldots \times (n+1) \times (n+2) = (n+2)!$

2. a. $S_1 = 1 \times 1! = 1$; $S_1 = 1 + 2 \times 2! = 5$ et $S_1 = 5 + 3 \times 3! = 23$.

b. <u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, $S_1 = 1$ et $(1+1)! - 1 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier $k \geqslant 1$, $S_k = (k+1)! - 1$; montrons que $S_{k+1} = (k+2)! - 1$.

On a :

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$$
$$= (k+1)!(1 + k + 1) - 1 = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$$

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (n+1)! - 1$.

23 **1. a.** Pour N = 4, S = 49 et pour N = 5, S = 129.

b. $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k\ 2^{k-1})$.

c. Pour $n \geqslant 1$, $S_{n+1} = S_n + (n+1)2^n$. ($S_1 = 1$)

2. a.

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR S+k*pow(2,k-1)
    FIN_POUR
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

b. R prend la valeur $(\mathrm{N}-1)2^n$.

Afficher R.

3. a. Pour $n \geqslant 1$, $S_n = (n-1)2^n + 1$.

b. <u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, $S_1 = 1$ et $(1-1)2^0 + 1 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier $k \geqslant 1$, $S_k = (k-1)2^k + 1$; montrons que $S_{k+1} = k2^{k+1} + 1$.

On a : $S_{k+1} = S_k + (k+1)2^k = (k-1)2^k + 1 + (k+1)2^k$

$= 2^k(k - 1 + k + 1) + 1 = k2^{k+1} + 1$.

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour $n \geqslant 1$, $S_n = (n-1)2^n + 1$.

APPROFONDISSEMENT

24 **1.** Supposons que pour un entier $n \geqslant 0$, $10^n - 1$ soit un multiple de 3 (c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $10^n - 1 = 3k$) et montrons que $10^{n+1} - 1$ est un multiple de 3.

On a : $10^{n+1}-1 = 10\times 10^n - 10 + 9 = 10(10^n - 1) + 3^2$
$= 3\times(10k+3)$

donc $10^{n+1}-1$ est un multiple de 3. La proposition « $10^n - 1$ est un multiple de 3 » est donc héréditaire.

De même, supposons que pour un entier $n \geqslant 0$, $10^n + 1$ soit un multiple de 9 (c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $10^n + 1 = 9k$) et montrons que $10^{n+1}-1$ est un multiple de 9.

On a : $10^{n+1}+1 = 10\times 10^n + 10 - 9 = 10(10^n+1) - 9$
$= 9\times(10k-1)$

donc $10^{n+1}-1$ est un multiple de 9. La proposition « $10^n + 1$ est un multiple de 9 » est donc héréditaire.

2. La proposition 1 est vraie pour $n = 0$ mais pas la proposition 2. Donc seule la proposition 1 est vraie pour tout entier naturel n.

25 **1.** Posons, pour $n \geqslant 1$, $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 1$ et $1^3 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 1$, $S_k \leqslant k^3$ et montrons que $S_{k+1} \leqslant (k+1)^3$.

On a : $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 \leqslant k^3 + (k+1)^2$.

$k^3 + (k+1)^2 = k^3 + k^2 + 2k + 1$ et

$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ donc

$k^3 + (k+1)^2 \leqslant (k+1)^3$ et donc $S_{k+1} \leqslant (k+1)^3$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 1$, $S_n \leqslant n^3$.

2. Il a été démontré dans l'exercice résolu 4 page 27 que pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ainsi,

$$S_n - n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1) - 6n^3}{6} = \frac{n(-4n^2+3n+1)}{6}$$

donc $S_n - n^3 = \dfrac{n(n-1)(-4n-1)}{6} \leqslant 0$ puisque $n \geqslant 1$.

Pour n entier $\geqslant 1$, $S_n \leqslant n^3$.

26 Pour $n \geqslant 1$, $S_n = 1 - 3 + 5 - \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1)$.

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 1$ et $1(-1)^0 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 1$, $S_k \geqslant k(-1)^{k-1}$. A-t-on $S_{k+1} \geqslant (k+1)(-1)^k$?

On a : $S_{k+1} = S_k + (-1)^k(2k+1) \geqslant k(-1)^{k-1} + (-1)^k(2k+1)$.

$k(-1)^{k-1} + (-1)^k(2k+1) = (-1)^k(-k+2k+1) = (-1)^k(k+1)$.

Donc $S_{k+1} \geqslant (k+1)(-1)^k$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 1$, $S_n \geqslant n(-1)^{n-1}$.

27 Conjecture émise :

pour n entier $\geqslant 1$, $S_n = \dfrac{1}{6}(n^2-1)$.

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 0$ et $\dfrac{1}{6}(1^2-1) = 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que pour un entier $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{1}{6}(n^2-1)$; a-t-on $S_{n+1} = \dfrac{1}{6}(n^2+2n)$?

On a : $S_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k)\right)$ donc

$$S_{k+1} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)\right) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} k(n-k) + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(nS_n + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{6}(n^3-n) + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$= \frac{(n+1)(n^2+2n)}{6(n+1)}$$

donc $S_{n+1} = \dfrac{1}{6}(n^2+2n)$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour n entier $\geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n^2-1}{6}$.

28 **1.** $(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. Pour p et n entiers tels que $p \leqslant n$, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

$\dbinom{0}{0} = 1$

$\dbinom{1}{0} = 1$ $\dbinom{1}{1} = 1$

$\dbinom{2}{0} = 1$ $\dbinom{2}{1} = 2$ $\dbinom{2}{2} = 1$

$\dbinom{3}{0} = 1$ $\dbinom{3}{1} = 3$ $\dbinom{3}{2} = 3$ $\dbinom{3}{3} = 1$

$\dbinom{4}{0} = 1$ $\dbinom{4}{1} = 4$ $\dbinom{4}{2} = 6$ $\dbinom{4}{3} = 4$ $\dbinom{4}{4} = 1$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

3. Pour $n = 1$, $(a+b)^1 = a + b$ et

$\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a + b$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que pour un entier $n \geqslant 1$,

$(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$; montrons que

$(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$.

On a : $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b)$

$$= \left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{0}b^n\right)(a+b).$$

En multipliant $\dbinom{n}{k}a^{n-k}b^k$ par b, on obtient $\dbinom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$.

En multipliant $\binom{n}{k+1}a^{n-k-1}b^{k+1}$ par a, on obtient $\binom{n}{k+1}a^{n-k}b^{k+1}$.

L'addition des deux nombres et la factorisation donne $\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right)a^{n-k}b^{k+1}$. Or, on démontre en classe de Première que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Le coefficient de b^{k+1} dans $(a+b)^{n+1}$ est donc $\binom{n+1}{k+1}$.

Puisque $\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1$, on a bien :

$(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$.

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour $n \geqslant 1$, $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

29 **1.** On a $u_0 = 2$ et $2^0 + 5^0 = 2$;
$u_1 = 7$ et $2^1 + 5^1 = 7$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

2. Supposons que, pour un entier n fixé $\geqslant 1$, la propriété P_n soit vérifiée, c'est-à-dire que pour tout entier $k \leqslant n$, $u_k = 2^k + 5^k$ et montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$. Il faut donc montrer que $u_{n+1} = 2^{n+1} + 5^{n+1}$.

On a : $u_{n+1} = 7u_n - 10u_{n-1}$ donc

$u_{n+1} = 7(2^n + 5^n) - 10(2^{n-1} + 5^{n-1})$ d'où

$u_{n+1} = 2^{n+1}\left(\frac{7}{2}-\frac{10}{2^2}\right)+5^{n+1}\left(\frac{7}{2}-\frac{10}{2^2}\right)$ soit

$u_{n+1} = 2^{n+1} + 5^{n+1}$.

3. La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour $n \geqslant 0$, $u_n = 2^n + 5^n$.

30 **1.** $A(0,0) = 1$; $A(0,1) = 2$; $A(1,0) = A(0,1) = 2$.

2.

m/n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	5	7	9	11	13
3	5	13	29	61	125	255

3. Pour n entier naturel, il semble que
$A(1, n) = n + 2$ (conjecture 1) et que
$A(2, n) = 2n + 3$ (conjecture 2).

Conjecture 1

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $A(1, 0) = 2$ et $0 + 2 = 2$; la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$,
$A(1, k) = k + 2$; montrons que $A(1, k + 1) = k + 3$.

On a : $A(1, k + 1) = A(0, A(1, k)) = A(0, k + 2)$
donc $A(1, k + 1) = k + 2 + 1 = k + 3$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour $n \geqslant 0$, $A(1, n) = n + 2$.

Conjecture 2

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $A(2, 0) = 3$ et $2 \times 0 + 3 = 3$.
La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$,
$A(2, k) = 2k + 3$; montrons que $A(2, k + 1) = 2k + 5$.

On a : $A(2, k + 1) = A(1, A(2, k)) = A(1, 2k + 3)$
donc $A(2, k + 1) = 2k + 3 + 2 = 2k + 5$.

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour $n \geqslant 0$, $A(2, n) = 2n + 3$.

4. <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $A(3, 0) = 5$
et $2^{0+3} - 3 = 8 - 3 = 5$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

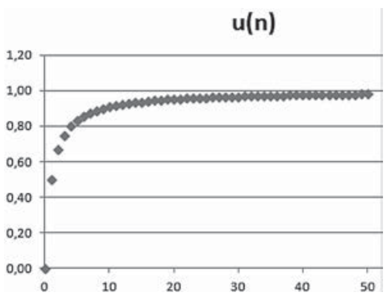
<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$,
$A(3, k) = 2^{k+3} - 3$; montrons que $A(3, k + 1) = 2^{k+4} - 3$
$A(3, k + 1) = A(2, A(3, k)) = A(2, 2^{k+3} - 3)$
donc $A(3, k + 1) = 2 \times (2^{k+3} - 3) + 3 = 2^{k+4} - 3$

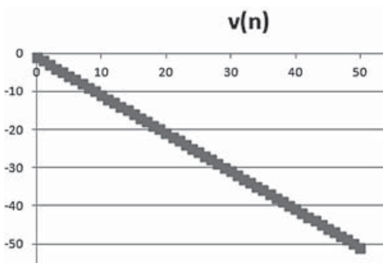
<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour $n \geqslant 0$, $A(3, n) = 2^{n+3} - 3$.

Accompagnement personnalisé

1 Le rôle des exemples et contre-exemples

1. Voir fichier sur le site Math'x.





2. (A) Affirmation fausse (B) Affirmation fausse
(C) Affirmation qui peut être vraie
(D) Affirmation fausse

3. a. Pour n entier $\geqslant 0$, $v_n = -n - 1$.

b. Dans le cas où $N_n = -n - 1$,
$u_n = \frac{1}{v_n} + 1\ v_n(u_n - 1) = 1 \Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{n+1} + 1$.

4. La formule écrite ci-dessus apparaît valable. Pour la démontrer, un raisonnement par récurrence s'impose.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $-\dfrac{1}{0+1}+1 = 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier $k \geqslant 0$,
$u_k = -\dfrac{1}{k+1}+1$ et montrons que $u_{k+1} = -\dfrac{1}{k+2}+1 = \dfrac{k+1}{k+2}$.

On a : $u_{k+1} = \dfrac{1}{2-u_k} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{k+1}-1} = \dfrac{k+1}{k+2}$.

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc, pour $n \geqslant 0$, $u_n = -\dfrac{1}{n+1}+1$.

2 Autour d'une somme

1. a. Si $n = 1$, $S = 1$; si $n = 2$, $S = 5$; si $n = 3$, $S = 17$; si $n = 4$, $S = 49$.

Si $n = 0$, la boucle « pour » ne démarre pas et $S = 0$.

b. $S_5 = S_4 + 5 \cdot 2^4 = 129$.

c. $S_{n+1} = S_n + (n+1) \cdot 2^n$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$.

d. $S_{15} = 458\ 753$.

2.

```
▼ VARIABLES
  ├n EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├k EST_DU_TYPE NOMBRE
  └S EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├S PREND_LA_VALEUR 0
  ├LIRE n
  ▼ POUR k ALLANT_DE 1 A n
    ├DEBUT_POUR
    ├S PREND_LA_VALEUR S+k*k
    └FIN_POUR
  └AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

Pour n entier $\geqslant 0$, $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$.

3 Rédiger une démonstation par récurrence

Le calcul des trois premiers termes amène à la conjecture suivante : pour n entier $\geqslant 2$, $p_n = \dfrac{1}{n}$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 2$, $p_2 = \dfrac{1}{2}$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier $k \geqslant 2$,
$p_k = \dfrac{1}{k}$; montrons que $p_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$.

On a : $p_{k+1} = p_k \times \left(1-\dfrac{1}{k+1}\right) = \dfrac{1}{k} \times \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$.

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire donc, pour $n \geqslant 2$, $p_n = \dfrac{1}{n}$.

4 Conjecturer une formule

A. Pour n entier $\geqslant 0$, $u_n = (n+1)^2$.
Pour n entier $\geqslant 1$, $v_n = 3n - 7$.
Pour n entier $\geqslant 0$, $w_n = 3n - 4$.
Pour n entier $\geqslant 0$, $t_n = \dfrac{1}{2}n + 1$.

B. 1. Le graphique suggère que la fonction f cherchée est une fonction polynôme du second degré.

2. Les valeurs affichées semblent approchées à cause de la terminaison 6667 qui laissent penser que l'entier a cherché est 3.

3. a. Voir fichier sur le site Math'x.

b. Pour n entier $\geqslant 1$, $v_n = n^2 - 1$ et $u_n = \dfrac{n^2-1}{3}$.

c. <u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, $u_1 = 0$ et $\dfrac{1^2-1}{3} = 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour un entier $n \geqslant 0$,
$u_n = \dfrac{n^2-1}{3}$ et montrons que
$u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2-1}{3} = \dfrac{n^2+2n}{3}$.

On a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k(k-1)$. Ainsi

$$(n+1)u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + (n+1)n = n\frac{n^2-1}{3} + (n+1)n$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n}{3} = \frac{n(n^2+3n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} = \dfrac{n(n+2)}{3} = \dfrac{n^2+2n}{3}$.

<u>Conclusion</u> : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^2-1}{3}$.

Pour aller plus loin …

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$d_{n+1} - d_n = a(n+2)^2 + b(n+2) + c - 2a(n+1)^2 - 2b(n+1) - 2c + an^2 + bn + c = 2a.$$

(d_n) est une suite arithmétique de raison $2a$.

La suite (w_n) définie par $w_n = u_{n+1} - u_n$ apparaît arithmétique de raison $\dfrac{2}{3}$. La fonction polynôme du second degré a donc pour coefficient $a = \dfrac{1}{3}$.

Travail en autonomie

Voir fichier sur le site Math'x.

Méthode possible …

• Les différentes valeurs de u_n obtenues laissent d'une part présager que la fonction f recherchée est une fonction polynôme du second degré, d'autre part qu'il serait pratique d'introduire la suite (v_n) telle que $v_n = 6u_n$.

$$\begin{cases} v_1 = 6 \\ v_2 = 15 \\ v_3 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 6 \\ 4a+2b+c = 15 \\ 9a+3b+c = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

• Conjecture : pour $n \geqslant 1$, $v_n = 2n^2 + 3n + 1$ et $u_n = \dfrac{2n^2+3n+1}{6}$.

On peut aussi demander une courbe de tendance polynomiale au tableur.

CHAPITRE 2

Étude de fonctions Continuité et dérivabilité

Pour reprendre contact

① Avec les lectures graphiques

1. $f(1) = 2$ $f(0) = 1$ $f(-1) = 4$

2. a. 3 **b.** 1 **c.** 2

3. $f'(2) = -4$ $f'(0) = 0$

4. $f'(1) > 0$ $f'(-1) < 0$

② Avec les fonctions de degré 2

1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

2. $S = \left\{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3.

x	$-\infty$		$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

③ Avec le calcul des dérivées

1. $f'(x) = -3x^2 + 4x - \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$

2. $y = 2$

④ Avec l'étude des variations

a. g est croissante sur $[-3\,;+\infty[$.

b. g est croissante sur $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

c. g est croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;+\infty[$.

d. g est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

e. g est croissante sur $\left]-\infty\,;-\sqrt{3}\right]$, décroissante sur $\left[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.

Activité 1. Choisir la bonne représentation graphique

1. La représentation de la fonction p est la courbe en bas à gauche.

2. On peut conseiller au client d'acheter un article pour atteindre 50 € de manière à bénéficier de la réduction.

Activité 2. Nombre de solution d'une équation $f(x) = m$

A. 1. a. 1 **b.** 2 **c.** 1 **d.** 2 **e.** 0 **f.** 0

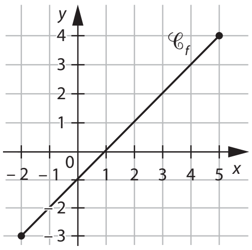
2. Si $k < -2$ ou $k > 2$: aucune solution.

Si $k = -2$ ou $k = 2$ ou $-1 < k < 1$: une seule solution.

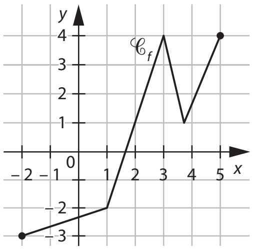
Si $-2 < k < -1$ ou $1 < k < 2$: deux solutions.

B. a. 1 **b.** 0 **c.** 2 **d.** 2

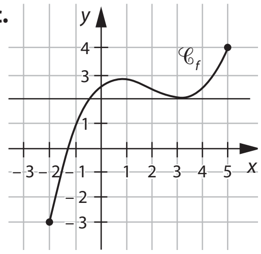
C. 1. a.



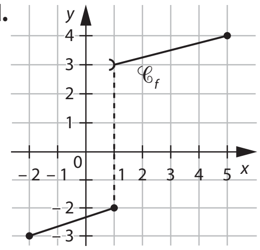
b.



c.



d.



2. a. On peut tracer la courbe de f sans lever le crayon.

b. De plus, la fonction f est croissante sur $[-2\,;5]$.

Activité 3. Vers de nouvelles formules de dérivation

1. a. Soit $g : x \to f(x) \times f(x)$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = f(x)f'(x) + f'(x)f(x) = 2f(x)f'(x)$.

b. Avec les notations précédentes, $g(x) = f(x) \times f(x) = \left(\sqrt{u(x)}\right)^2 = u(x)$ car $u > 0$.

De **a.**, on déduit : $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{2f(x)} = \dfrac{u'(x)}{2f(x)}$ car $f(x) \neq 0$. Ce qui donne ici $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. De même, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2f(x)}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

B. 1. a. u^2 est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I (u l'est) et $(u^2)' = 2uu'$.

b. $u^3 = u^2 \times u$ est aussi dérivable sur I comme produit (u^2 et u le sont) et $(u^3)' = (2uu') \times u + u^2 \times u' = 3u^2u'$.

2. Conjecture (HR(n)) : « u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ».

Initialisation : $n = 2$ voir **1.a.**

Hérédité : on suppose HR(n) vraie. $u^{n+1} = u^n \times u$ donc u^{n+1} est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I (u l'est, u^n l'est par hypothèse de récurrence).

Et $(u^{n+1})' = (nu^{n-1}u') \times u + u^n \times u' = (n+1)u^n u'$: c'est HR($n+1$), l'hérédité est prouvée.

La conjecture est donc démontrée pour tout $n \geqslant 2$.

3. a. $f'(x) = 20(2x+3)^9$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

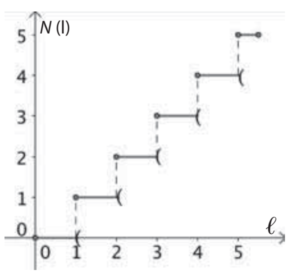
b. $g'(x) = -20(2x+3)^{-11} = -\dfrac{20}{(2x+3)^{11}}$ pour tout $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

TP1. L'éternel problème du rangement

1. $2(\ell + \text{L}) = 22$ et $\ell \leqslant \text{L}$ donc $\ell \leqslant \dfrac{22}{4} = 5{,}5$.

2. Si $\ell = 1{,}2$ cm (respectivement 1,8 cm et 2 cm) : on peut mettre 1 chocolat (resp. 1 et 2 chocolats) dans une couche.

3.



4. On choisit $\ell = 5$ cm et $\text{L} = 6$ cm (30 chocolats).

5. $N(\ell) = E(\ell)\ E(11 - \ell)$ (fonction partie entière) pour tout ℓ compris dans l'intervalle $[0\,;5{,}5]$.

TP2. Raccordement ferroviaire

1. a. En notant f la fonction associée à la courbe $\mathscr{C}$, on doit avoir : $f(60) = 5$.

Une équation de $\mathscr{C}$ est : $y = \dfrac{x^3}{43\,200}$ (soit $p = 30$ *et* $R = 120$) et une équation de T est : $y = \dfrac{1}{4}x - 10$.

b. En supposant le raccord parfait, T a pour vecteur directeur $\vec{u}(4\,;1)$. Soit $\vec{v}\left(1\,;-\dfrac{1}{4}\right)$. Comme $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, on en déduit qu'une équation de $(\mathrm{A}\Omega)$ est $y = -\dfrac{1}{4}x + b$. En remplaçant par les coordonnées de A, on trouve $y = -\dfrac{1}{4}x + 20$.

c. Comme $(\mathrm{A}\Omega) \perp \mathrm{T}$, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega} = 0$ donc $4(x_\Omega - 60) + (y_\Omega - 5) = 0$. Comme, de plus, $\mathrm{A}\Omega = R = 120$, on a aussi $(x_\Omega - 60)^2 + (y_\Omega - 5)^2 = 120^2$. En remplaçant $y_\Omega - 5$ par $-4(x_\Omega - 60)$, on trouve $x_\Omega = \dfrac{1020 - 120\sqrt{17}}{17} \approx 30{,}9$.

On a bien $x_\Omega \approx p$ à 1 m près.

2. L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A est, dans le cas général $y = f'(2p)(x - 2p) + f(2p)$. Comme $f'(x) = \dfrac{x^2}{4pR}$, cela donne : $y = \dfrac{p}{R}(x - 2p) + \dfrac{(2p)^3}{12pR}$ soit encore $y = \dfrac{p}{R}x - \dfrac{4p^2}{3R}$.

T passe-t-elle par $\mathrm{K}\left(\dfrac{4p}{3}\,;0\right)$. La tige matérialise bien la tangente à l'arc de raccordement et donc à la partie circulaire, le raccord étant supposé parfait.

TP3. Excès de vitesse ?

A. 1. b. La tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse x_n a pour équation : $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Cette tangente coupe l'axe des abscisses lorsque $y(x_{n+1}) = 0$ soit $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$. On en déduit la première formule. De plus, $f(x_n) = x_n^2 - 2$ et $f'(x_n) = 2x_n$ d'où la seconde formule.

c. $u_1 = 1{,}50$ et $u_2 \approx 1{,}42$.

2. $f(a_0) < 0$ et $f\left(\dfrac{a_0 + b_0}{2}\right)$. Donc $a_1 = a_0 = 1$ et $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = 1{,}5$. Puis $a_2 = 1{,}25$ et $b_2 = 1{,}5$.

B. 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	xn	2	1,5	1,41666667	1,41421569	1,41421356	1,41421356	1,41421356	1,41421356

2. a. 1^er^ champ : Affecter (a+b)/2 à b. 2^e^ champ : Sinon Affecter (a+b)/2 à a.

Il affiche n le nombre d'étapes, a et b les bornes de l'encadrement final de α.

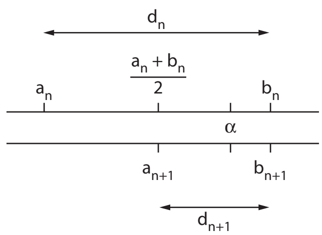
b. On trouve $a_{20} = 1{,}414\,213\,180\,56$ et $b_{20} = 1{,}414\,214\,134\,23$.

3.

	Newton-Raphson	Dichotomie
1 décimale exacte	2 étapes	5 étapes
2 décimales exactes	2 étapes	8 étapes
3 décimales exactes	4 étapes	11 étapes

On en déduit que la méthode de Newton-Raphson converge plus vite que la dichotomie.

4. a. Si $0 \leqslant b_n - \alpha \leqslant 10^{-3}$, alors $0 \leqslant b_{n+1} - \alpha \leqslant \dfrac{10^{-3}}{2}$.



b. $\dfrac{(x_n - \alpha)^2}{2x_n} = \dfrac{x_n^2 - 2\alpha x_n + \alpha^2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} - \alpha + \dfrac{\alpha^2}{2x_n}$. Comme $\alpha^2 = 2$, on retrouve bien le membre de gauche de l'égalité.

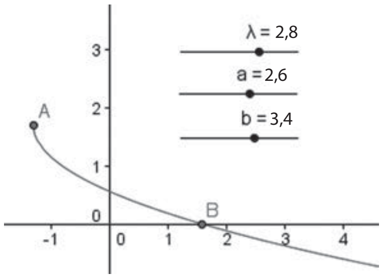
c. L'inégalité de gauche $x_{n+1} - \alpha \geqslant 0$ est admise dans l'énoncé. Pour celle de droite, $x_{n+1} - \alpha = \dfrac{(x_n - \alpha)^2}{2x_n} \leqslant \dfrac{(x_n - \alpha)^2}{2}$ en minorant x_n par 1.

Si x_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près, x_{n+1} est une valeur approchée de α à $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ près.

d. On retrouve le résultat expérimental de la question **3.** : l'algorithme de Newton-Raphson est beaucoup plus rapide que la dichotomie.

TP4. Une rampe de skate

A. 1.



2. λ influe sur la position verticale de la courbe (plus λ augmente, plus la courbe se translate vers le haut).
b influe sur la position horizontale de la courbe (plus b augmente, plus la courbe se translate vers la gauche).
a influe sur la « taille » de la courbe (plus a augmente, plus la courbe se dilate). De plus, la courbe change de « sens » en $a = 0$.

3. a. b. Il semble que la courbe démarre d'un point A situé à une hauteur de 2 m lorsque λ vaut 2 (sauf dans le cas où $a = 0$: la courbe est alors une droite horizontale) et il semble que la courbe descende du point A au point B lorsque $a > 0$.

4. On trace la tangente à la courbe en B et on observe sa pente. a semble alors compris entre 0 et 0,4.

B. 1. a. Pour que la rampe descende de A en B, il faut et il suffit que la fonction f soit décroissante. Or, le sens de variation de f le sens inverse de la fonction $x \to \sqrt{ax+b}$ qui, en étudiant le signe de $\sqrt{u}$, dépend du signe de a.
a doit donc bien être strictement positif.

b. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow ax + b \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{b}{a}$. Donc $D_f = \left[-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$. A a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{a};\lambda\right)$.

c. Les conditions sont : $-\dfrac{b}{a} = 0$, soit $b = 0$, et $f(0) = 2$, soit $\lambda = 2$.

2. a. $f(x_B) = 0$ donc $2 - \sqrt{ax_B} = 0$ puis $x_B = \dfrac{4}{a}$. On en déduit : $B\left(\dfrac{4}{a};0\right)$.

b. La pente n'excède pas 10 % si et seulement si $f'(x_B) \geqslant -0{,}1$. On résout l'inéquation $-\dfrac{a}{2\sqrt{a\times\left(\dfrac{4}{a}\right)}} \geqslant -0{,}1$ soit $0 < a \leqslant 0{,}4$. On retrouve la conjecture de **A.4**.

Exercices

SANS CRAYON SANS CALCULATRICE

1 $[-2;+\infty[$

2 $g(1) \approx -0{,}5$ et $g(2) = 2$

3 $g'(0) = 0$ et $g'(-1) = -1{,}5$

4 $[-2;2[, [2;3[$ et $]3;+\infty[$

5 3 solutions

6 2 solutions

7 Aucune solution

8 $[-2;2[$ et $[2;+\infty[$

9 **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. $f'(x) = 8(2x-3)^4$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c. $f'(x) = -\dfrac{4}{(x+3)^5}$ pour tout $\in \mathbb{R} - \{-3\}$.

10 $f'(-1) = 40 \times (-1)^4 - 2 = 38$.

11 **a.** La fonction est décroissante sur $]-\infty;1]$.

b. La fonction est croissante sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$.

12 Une solution.

13 **1.** Non, la fonction ne semble pas dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, sur $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$, la fonction est continue et la courbe ne présente ni pointe ni tangente verticale. Mais en -1, les demi-tangentes à droite et à gauche ne sont pas confondues, f n'est donc pas dérivable en -1.

2. On lit : $f'(-3) \approx 2$; $f(-1) \approx 0$; $f'(1) \approx 1$ et $f'(2) \approx 0{,}6$.

14 **a.** $y = 8x - 17$

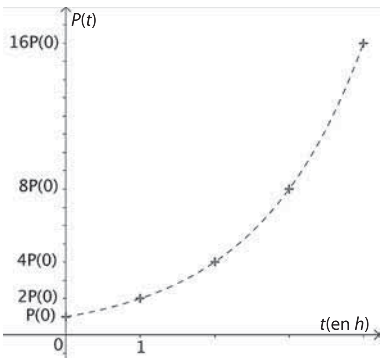
b. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-3) + \left(\sqrt{3}+1\right)$

c. $y = -\dfrac{3}{2}\left(x - \sqrt{2}\right) + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

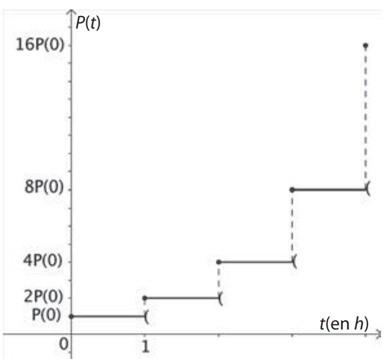
15 **1. a.** f semble définie sur $\mathbb{R}$.
b. f semble continue sur $\mathbb{R}$.
c. f semble dérivable sur $]-\infty\,;-2[$ et $]-2\,;+\infty[$.
2. a. f semble définie sur $\mathbb{R}$.
b. f semble continue sur $]-\infty\,;1]$ et $]1\,;+\infty[$.
c. f semble dérivable sur $]-\infty\,;1]$ et $]1\,;+\infty[$.
3. a. f semble définie sur $\mathbb{R}$.
b. f semble continue sur $\mathbb{R}$.
c. f semble dérivable sur $]-\infty\,;1[$, $]1\,;6[$ et $]6\,;+\infty[$.
4. a. f semble définie sur $]-\infty\,;-0{,}5]$ et $]1{,}5\,;+\infty[$.
b. f semble continue sur $]-\infty\,;-0{,}5]$ et $]1{,}5\,;+\infty[$.
c. f semble dérivable sur $]-\infty\,;-0{,}5]$ et $]1{,}5\,;+\infty[$.

16 **1. a.** f semble définie sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
b. f semble continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
c. f semble dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
2. a. f semble définie sur $\mathbb{R}$.
b. f semble continue sur $]-\infty\,;2[$ et $[2\,;+\infty[$.
c. f semble dérivable sur $]-\infty\,;-2[$, $]-2\,;2[$ et $[2\,;+\infty[$.
3. a. f semble définie sur $]-\infty\,;0[$ et $[1\,;+\infty[$.
b. f semble continue sur $]-\infty\,;-2]$, $]-2\,;0[$ et $[1\,;+\infty[$.
c. f semble dérivable sur $]-\infty\,;-2]$, $]-2\,;0[$ et $[1\,;+\infty[$.
4. a. f semble définie sur $]-3\,;3[$.
b. f semble continue sur $]-3\,;-2]$, $]-2\,;2[$ et $[2\,;3[$.
c. f semble dérivable sur $]-3\,;-2]$, $]-2\,;2[$ et $[2\,;3[$.

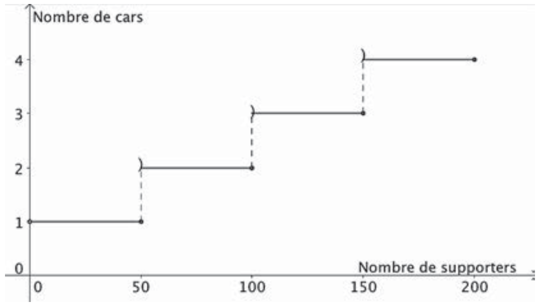
17 **1. a.**, **1. b.** et **2.**



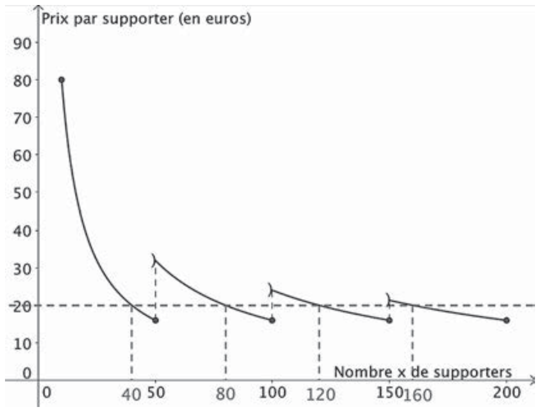
3.



18 **1.**



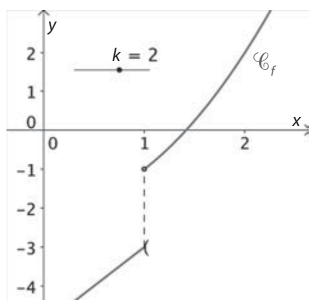
2.



3. Voir graphique précédent. L'organisateur peut accepter entre 40 et 50 supporters, entre 80 et 100 supporters, entre 120 et 150 supporters ou entre 160 et 200 supporters.

19 Voir corrigé en fin de manuel.

20 **1.**



2. On trouve $k = 4$.

21 **2.** La fonction f est discontinue en $-0{,}5$; $0{,}5$ et $1{,}5$.

3. $f(x) = \begin{cases} -2x \text{ si } -1{,}5 \leqslant x < -0{,}5 \\ -x \text{ si } -0{,}5 \leqslant x < 0{,}5 \\ 0 \text{ si } 0{,}5 \leqslant x < 1{,}5 \\ x \text{ si } 1{,}5 \leqslant x < 2{,}5 \end{cases}$

22 Voir corrigé en fin de manuel.

23 On résout l'exercice avec la précision qu'autorise la lecture.
1. a. $S = \{-6{,}8\,;-4\,;3{,}8\}$ **b.** $S = \{-7\,;-3{,}5\,;2{,}5\,;4{,}8\}$

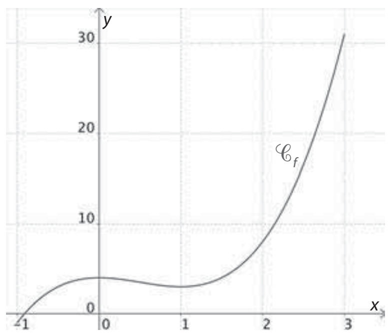
c. $S = \{-7{,}5\,;-1{,}8\,;0{,}6\,;5{,}4\}$ **d.** $S = \{-7{,}1\,;-3\,;2\,;5\}$

2. Si $m < -140$ ou $m > 100$: aucune solution.
Si $-140 \leqslant m < -100$ ou $m = 100$: une solution.
Si $-100 \leqslant m < -70$ ou $50 \leqslant m < 100$: deux solutions.
Si $m = -70$ ou $m = 50$: trois solutions.
Si $-70 < m < 50$: quatre solutions.

24 Voir corrigé en fin de manuel.

25 **1. a.** 1 solution **b.** 3 solutions **c.** 1 solution
2. Si $m < -4$ ou $m > 2$: aucune solution.
Si $m = -4$ ou $m = 2$ ou $-1 < m < 1$: une solution.
Si $-4 < m \leqslant -1$ ou $m = 1$ ou $\sqrt{2} < m < 2$: deux solutions.
Si $1 \leqslant m \leqslant \sqrt{2}$: trois solutions.

26 **1.**



L'équation $f(x) = 0$ semble avoir une unique solution sur $[-1\,;3]$.

2. a. f est continue sur $[-1\,;3]$ car fonction polynôme.

b. f est dérivable sur $[-1\,;3]$ et $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ pour tout x de $[-1\,;3]$.

x	-1		0		1		3
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	4	↘	3	↗	31

c. D'après le tableau de variations, sur $[0\,;3]$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.
Sur $[-1\,;0]$, f est continue, strictement croissante et de plus $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-1\,;0]$ donc sur $[-1\,;3]$.

d. $-0{,}911 < \alpha < -0{,}910$.

27 **1.** Graphique : voir calculatrice. L'équation (E_1) semble avoir trois solutions sur $\mathbb{R}$.

2. a. On pose $f : x \to x^3 - 2x + 1$.
On étudie les variations de f.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2 = 3\left(x - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

avec $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \simeq 0{,}82$. D'où :

x	-2		$-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$		1
$f(x)$	-3	↗	$\approx 2{,}09$	↘	$\approx -0{,}09$	↗	0

On applique ensuite le théorème des valeurs intermédiaires sur $\left[-2\,;-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$ et $\left[-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,;1\right]$.

b. $\alpha \simeq 0{,}62$ et $\beta \simeq -1{,}62$.

28 **1.** L'équation semble avoir deux solutions.

2. a. f est continue sur $[-3\,;3]$ en tant que fonction polynôme.

b. Pour tout x de $[-3\,;3]$,
$f'(x) = 4x^2 + 2x - 2 = 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x+1)$.
f' est donc négative sur $\left[-1\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et f est décroissante sur cet intervalle, croissante sur $[-3\,;-1]$ et $\left[\dfrac{1}{2}\,;3\right]$.

c. Comme $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}02 > 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une unique solution α sur $[-3\,;3]$ avec $-1{,}76 < \alpha < -1{,}75$.

29 L'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β, γ sur $[-2\,;2]$ avec $-0{,}64 < \alpha < -0{,}63$, $\beta = 1$ et $1{,}14 < \gamma < 1{,}15$.

31 **1.** On étudie les variations de f. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. f est donc strictement croissante sur $[0\,;1]$, continue (comme polynôme) et 0 est bien compris entre $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$.

2. Lorsque $k = 1$, l'algorithme renvoie 0. Lorsque $k = 3$, l'algorithme renvoie 0,6. Lorsque $k = 1$, l'algorithme renvoie 0,68. Il nous donne les troncatures à $10^{-(k-1)}$ près de α.

3. On remplace la condition $f(a + 10^{-p}) < 0$ par $f(a) \times f(a + 10^{-p}) < 0$.

32 Voir corrigé en fin de manuel.

33 **1.** Même correction que l'exercice 32.

2.

VARIABLES :	x_n, x_{n+1} nombres
INITIALISATION :	x_0 prend la valeur 2
	x_1 prend la valeur $x_0 = \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
TRAITEMENT :	Tant que $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert > 10^{-6}$ Faire
	x_n prend la valeur x_{n+1}
	x_{n+1} prend la valeur $x_{n+1} - \dfrac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})}$
	FinTantque
SORTIE :	Afficher x_{n+1}

3. Le logiciel nous donne $\alpha \approx 0{,}543\,689$.

35 **1.** On exprime r^2 grâce au théorème de Pythagore : $r^2 = 8^2 - h^2$ d'où $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(64 - h^2)h$ $(0 \leqslant h \leqslant 8)$.

2. On résout l'équation $V(h) = 150$. On étudie les variations de $\widetilde{V} : h \to -\frac{h^3}{3} + \frac{64}{3}h$ $(V = \pi\widetilde{V})$. $\widetilde{V}$ est dérivable sur $[0\,;8]$ comme polynôme et pour tout h de $[0\,;8]$, $\widetilde{V}'(h) = -h^2 + \frac{64}{3} = -\left(h - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)\left(h + \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$.

D'où le tableau de variations de $\widetilde{V}$ sur $[0\,;8]$:

h	0		$\frac{8\sqrt{3}}{3}$		8
$V(h)$	0	$\nearrow$	$\simeq 65{,}7$	$\searrow$	0

On résout ensuite l'équation $V(h) = \frac{150}{\pi}$ $\left(\frac{150}{\pi} \approx 47{,}7\right)$ et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $\left[0\,;\frac{8\sqrt{3}}{3}\right]$ et $\left[\frac{8\sqrt{3}}{3}\,;8\right]$, on montre que deux hauteurs h_1 et h_2 permettent d'atteindre un volume maximal de 150 cm^3. La calculatrice nous donne : $h_1 \approx 2{,}5$ cm et $h_2 \approx 6{,}5$ cm.

36 **a.** $f'(x) = 2$ **b.** $f'(x) = -6x - 6$

c. $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$ **d.** $f'(x) = \frac{12x^3}{5} + \frac{32}{x^9}$

37 Voir corrigé en fin de manuel.

38 **a.** $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x^5 - \sqrt{x} \times 5x^4}{x^{10}} = -\frac{9\sqrt{x}}{2x^6}$

b. $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} \times \left(1 + \sqrt{x}\right) + 2\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} + 2$

c. $f'(x) = \frac{-3x^2 + 24x - 27}{(x-4)^2}$

d. $f'(x) = \frac{8x}{(x^2+1)^2}$

39 Voir corrigé en fin de manuel.

40 **a.** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

b. $f'(x) = \frac{14x^3 - 1}{\sqrt{7x^4 - 2x - 1}}$

c. $f'(x) = 8 \times \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} = -\frac{4\sqrt{x}}{x^2}$

d. $f'(x) = 2 \times \sqrt{3x-1} + 2x \times \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{(9x-2)\sqrt{3x-1}}{3x-1}$

41 Voir corrigé en fin de manuel.

42 Voir corrigé en fin de manuel.

43 **a.** $f'(x) = (0{,}2x - 1)^4$ **b.** $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

c. $f'(x) = \frac{4}{(6-x)^5}$ **d.** $f'(x) = -\frac{5\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}x - 4\right)^6}$

44 **a.** $g'(x) = 2 \times f'(2x-3)$ **b.** $h'(x) = -f'(-x)$

45 **a.** $y = -13x - 7$ **b.** $y = -\frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$

46 Voir corrigé en fin de manuel.

47 **1.** La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}$ en a a pour équation $y = \frac{a}{\sqrt{a^2+3}}(x-a) + \sqrt{a^2+3}$ (a réel).

2. a. T_a est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ si et seulement si $f'(a) = \frac{1}{2}$.

On résout l'équation : $\frac{a}{\sqrt{a^2+3}} = \frac{1}{2}$. En remarquant que a ne peut être négatif et en élevant au carré, on trouve pour unique solution $a = 1$.

b. Les coordonnées de P doivent vérifier l'équation de T_a, ce qui donne l'équation :

$1 = \frac{-a^2}{\sqrt{a^2+3}} + \sqrt{a^2+3}$ ce qui donne $1 = \frac{3}{\sqrt{a^2+3}}$.

D'où les deux solutions $a = \pm\sqrt{6}$.

48 **1.** Voir fichier sur le site Math'x.

2. T_n semble avoir pour équation $y = nx + 1$.

Démonstration : f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et pour tout x réel, $f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$.

Par conséquent, $f'(0) = n$.

T_n a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit ici $y = nx + 1$.

49 **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = -\frac{8x}{(x^2+1)^5}$, qui est du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et pour tout x réel, $f'(x) = -20(-4x+7)^4 \leqslant 0$.

f est décroissante sur $\mathbb{R}$ (en $x = \dfrac{7}{4}$, la courbe admet un « point d'inflexion » : tangente horizontale traversée par la courbe).

50 **a.** f est dérivable sur $\left[\dfrac{4}{5};10\right]$ et pour tout x de $\left[\dfrac{4}{5};10\right]$, $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-4}} > 0$. f est strictement croissante sur $\left[\dfrac{4}{5};10\right]$.

b. f est dérivable sur $[-3;3]$ (racine carrée d'une fonction polynôme) et pour tout x de $[-3;3]$, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ du signe de $-x$. f est strictement croissante sur $[-3;0[$ et strictement décroissante sur $]0;3]$.

51 Voir corrigé en fin de manuel.

52 **1.** $t(x) = t_{A\to H} + t_{H\to B}$.

On utilise la formule : durée $= \dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$.

Ainsi, $t_{A\to H} = \dfrac{AH}{V_{\text{mer}}} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{4}$ (théorème de Pythagore) et $t_{H\to B} = \dfrac{HB}{V_{\text{terre}}} = \dfrac{6-x}{5}$.

On retrouve bien l'expression proposée.

2. Pour $0 \leqslant x \leqslant 6$, $t'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{1}{5}$.

On résout directement l'inéquation $t'(x) \geqslant 0$:

$5x \geqslant 4\sqrt{x^2+1}$ et en élevant au carré (quantités positives) : $25x^2 \geqslant 16(x^2+1)$ soit $x \geqslant \dfrac{4}{3}$. Au final, t est décroissante sur $\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$ et croissant sur $\left[\dfrac{4}{3};6\right]$.

3. D'après **2.**, le trajet atteint son minimum pour $x = \dfrac{4}{3}$.

Le canot doit donc accoster au point H de la côte situé à 1,333 km de O.

53 **1.** La longueur x variant dans l'intervalle $[0;1]$,

$f(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} = \left(2+\dfrac{x}{2}\right)\sqrt{1-x^2}$.

2. f est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout x de $[0;1]$,

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{1-x^2} + \left(2+\dfrac{x}{2}\right)\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-2x^2-4x+1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

La dérivée s'annule lorsque $x = -1 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire maximale est donc atteinte pour $x = -1+\dfrac{\sqrt{6}}{2} \approx 0{,}22$ et vaut environ 2,1 unités d'aire.

54 **1. a.** g est dérivable sur $[-3;3]$ (polynôme) et pour tout x de $[-3;3]$, $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

x	-3		0		1		3
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-82	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	26

b. D'après le tableau de variations, l'équation $g(x) = 0$ ne peut admettre de solutions que sur l'intervalle $[1;3]$. Sur cet intervalle, g est continue (polynôme), strictement croissante et 0 est bien compris entre $g(1)$ et $g(3)$.

On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α, on trouve $\alpha \approx 1{,}7$.

Par conséquent, g est négative sur $[-3;\alpha]$ et positive sur $[\alpha;3]$.

2. a. On utilise la dérivée du quotient.

b.

x	-3		0		α		3
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^3+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\simeq -0{,}15$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\simeq -0{,}12$	$\nearrow$	$\simeq -0{,}07$

55 **1.** (A) Oui, une fonction polynôme par exemple.

(B) Oui, une fonction présentant une discontinuité en un point.

(C) Non, la dérivabilité entraîne la continuité.

(D) Oui, par exemple la fonction valeur absolue sur $[-3;3]$.

2. (A) f est non continue ou non dérivable sur I.

(B) f est continue ou dérivable sur I.

(C) f n'est pas dérivable sur I ou continue sur I.

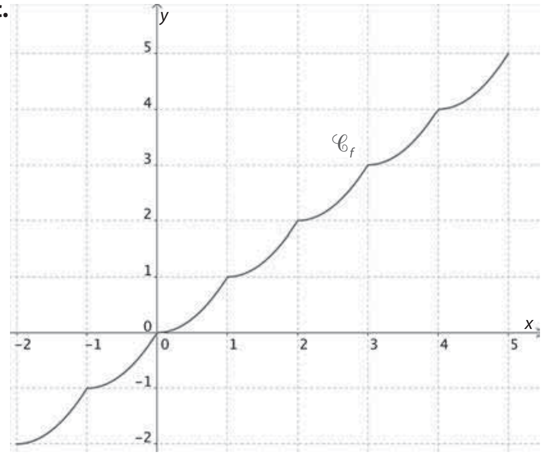
(D) f n'est pas continue sur I ou dérivable sur I.

56 **1.** Oui, la fonction semble continue sur $[-2;6]$, il semble que l'on puisse tracer la courbe sans lever le crayon.

2. a. $f(x) = \dfrac{x^2-x-12}{x-4}$. f n'est pas définie en $x = 4$ donc *a fortiori* non continue sur $[-2;6]$.

b. $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \dfrac{(x-4)(x+3)}{x-4} = x+3$ mais seulement lorsque $x \neq 4$. On ne peut donc voir la « discontinuité » en 4 (la fonction est prolongeable par continuité en 4 à gauche et à droite).

c.



4. Oui, la fonction semble continue sur $\mathbb{R}$.

APPROFONDISSEMENT

80 **1.** $f'(x) = \dfrac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}}$ $\qquad g'(x) = nw'(x)w(x)^{n-1}$

$h'(x) = a \times w'(ax+b)$

2. a. $f(x) = v(u(x))$ avec $v(x) = \sqrt{x}$ et $u(x) = w(x)$

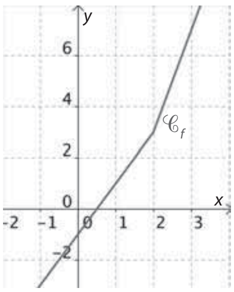
$g(x) = v(u(x))$ avec $v(x) = x^n$ et $u(x) = w(x)$

$h(x) = v(u(x))$ avec $v(x) = w(x)$ et $u(x) = ax+b$

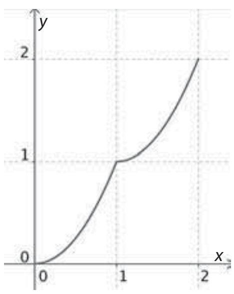
b. $f'(x) = w'(x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{w(x)}}$ $\qquad g'(x) = w'(x) \times n\, w(x)^{n-1}$

$h'(x) = a \times w'(ax+b)$

81 f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x-1 \text{ si } x \leqslant 2 \\ 4x-5 \text{ si } x > 2 \end{cases}$, est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.



82 **1.**



2. Par définition, $\mathrm{E}(x)$ est l'unique entier tel que $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.

En ajoutant 1 à l'inégalité, $\mathrm{E}(x)+1 \leqslant x+1 < (\mathrm{E}(x)+1)+1$.

En revenant à la définition, on a donc bien

$\mathrm{E}(x+1) = \mathrm{E}(x)+1$.

3. a. Pour tout x réel,

$f(x+1) = \mathrm{E}(x+1) + [x+1-\mathrm{E}(x+1)]^2$

$\qquad = \mathrm{E}(x)+1+[x+1-\mathrm{E}(x)-1]^2 = f(x)+1.$

b. Pour obtenir la courbe $\mathbb{R}$ en entier, on procède par translations successives de vecteur $\vec{u}(1\,;1)$.

84 **1.** La cellule A0 peut contenir :

x^2-2x, x^2-2x+1, x^2-2x+1 et plus généralement toute expression de la forme x^2-2x+c ($c \in \mathbb{R}$).

2. Les contenus possibles pour A0 sont :

$-x^3/4 - x^2 + 3x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

85 **1.** Dans chaque cas, f semble décroissante sur $]-\infty\,;2]$. En utilisant le sens de variation de $\sqrt{u}$, on en déduit que $m < 0$.

2. On en déduit que, dans tous les cas, $f(2) = 0$, *i.e.* $2m + p = 0$.

3. On peut conjecturer que toutes les tangentes à ces courbes en leur point d'abscisse 0 passent par A(4 ; 0).

Démonstration : soient m, p donnés.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 a alors pour équation

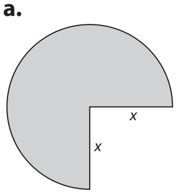
$y = \dfrac{m}{2\sqrt{p}}x + \sqrt{p}$.

Or, lorsque $x = 4$, $y = \dfrac{m}{2\sqrt{p}} \times 4 + \sqrt{p} = \dfrac{2(2m+p)}{\sqrt{p}} = 0$ d'après 2.

La conjecture est démontrée.

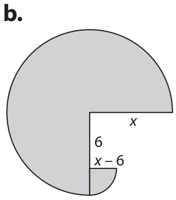
86 **1.** Dans chaque question, on doit déterminer le périmètre $P(x)$ de la surface circulaire en additionnant le périmètre du (ou des) secteur(s) angulaire(s) et la longueur des côtés de la maison concernés par la course du chien.

a.



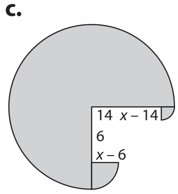
$P(x) = \left(\dfrac{3\pi}{2}+2\right)x$

b.



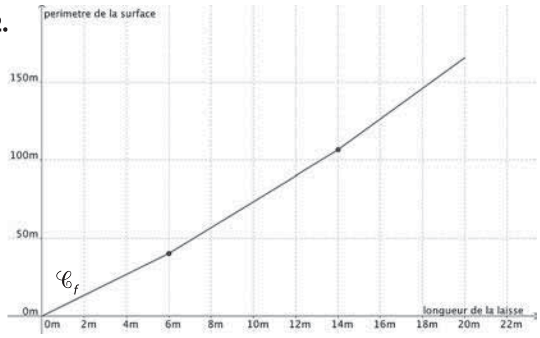
$P(x) = (2\pi+2)x - 3\pi$

c.



$P(x) = \left(\dfrac{5\pi}{2}+2\right)x - 10\pi$

2.



On constate que cette fonction est bien continue en $x = 6$ et $x = 14$.

87 **1.** f est dérivable sur $[0\,;1]$ (polynôme) et pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) = 4x(x^2 - 1)$. On en déduit :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -1$

2. a. f étant continue, strictement décroissante sur $[0\,;1]$, pour tout $y \in [f(1)\,;f(0)]$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $[0\,;1]$ (théorème des valeurs intermédiaires).

b. $x^4 - 2x^2 - y = 0$ est une équation bicarrée qui devient $X^2 - 2X - y = 0$ en posant $X = x^2$. Le discriminant valant $\Delta = 4y + 4 \geqslant 0$ (pour $y \in [-1\,;0]$), $X = 1 - \sqrt{1+y}$ (on élimine l'autre éventuelle solution) et, au final, $x = \sqrt{1 - \sqrt{1+y}}$.

88 La première dérivation se fait par rapport à la variable x (faite d'office sur Xcas.fr) tandis que la deuxième se fait par rapport à la variable a.

89 Lorsque l'eau recouvre exactement la boule, cela signifie que le volume d'eau est exactement égal au volume de la boule. En notant r le rayon de la boule, l'équation résultante est :

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \times 10^2 \times 4 - \frac{4}{3}\pi r^3$

soit, en simplifiant, $\frac{2}{3}r^3 = 100$ ou encore $2r^3 - 300 = 0$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à $x \to 2x^3 - 300$, on montre que cette équation a une unique solution α dans $[0\,;10]$. On a $\alpha = \sqrt[3]{150} \approx 5{,}31$ cm.

90 **A. 1.** De manière intuitive, $t_{A \to B} = t_{A \to I} + t_{I \to B}$.

En utilisant la formule vitesse $= \dfrac{\text{distance}}{\text{durée}}$, on obtient $t_{A \to B} = \dfrac{AI}{v①} + \dfrac{IB}{v②}$. En passant aux coordonnées, on obtient la formule attendue.

2. a. $g(x)$ est l'expression de la dérivée de f. $h(x)$ est l'expression de la dérivée de g, ou encore l'expression de la dérivée seconde de f.

b. $\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}} = (x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2}$.

c. $h(x) > 0$ comme somme de termes strictement positifs.

3. D'après **2.c.** et la définition de h, g est strictement croissante sur $[0\,;d]$.

4. g est continue sur $[0\,;d]$ (comme somme et quotient de fonctions continues), strictement croissante sur ce même intervalle et $0 \in [g(0)\,;g(d)]$ car $g(0) = -\dfrac{d}{q_1}$ où $d > 0$, $q_1 > 0$ et $g(d) = \dfrac{d}{q_2}$ où $d > 0$, $q_2 > 0$.

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0\,;d]$. L'égalité s'obtient en écrivant littéralement $g(x_0) = 0$.

5.

x	0		x_0		d
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$f(d)$

B. a. En utilisant les définitions des lignes trigonométriques, $\sin i_1 = \dfrac{OA}{AI}$ puis en passant aux coordonnées, $\dfrac{\sin i_1}{v} = \dfrac{x_0}{v\sqrt{a^2 + x^2}}$.

De même, on obtient, $\dfrac{\sin i_2}{w} = \dfrac{(d - x_0)}{w\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}$.

Les deux quantités sont égales d'après **A.4.**

b. L'égalité de **a.** devient $\dfrac{\sin i_1}{\left(\dfrac{c}{n_1}\right)} = \dfrac{\sin i_2}{\left(\dfrac{c}{n_2}\right)}$.

En simplifiant par c, on obtient bien la loi de Descartes.

91 **1.** $f^{(1)}(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f^{(2)}(x) = \dfrac{2}{x^3}$ et $f^{(3)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$.

2. a. $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -6$ et $a_4 = 24$.

b. On peut conjecturer $a_5 = -120$.

c. On peut conjecturer « $a_n = (-1)^n\, n!$ ».

Montrons cette conjecture par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

Initialisation : $n = 1$. $a_1 = -1$ fonctionne (*cf.* **2.a.**).

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$.

Supposons que $f^{(n)}(x) = ((-1)^n\; n!) \times \left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$.

$f^{(n)}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (fonction puissance), on peut utiliser l'égalité $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, ce qui donne :

pour tout $x \neq 0$ $f^{(n+1)}(x) = ((-1)^n\, n!) \times \left(-\dfrac{(n+1)}{x^{n+2}}\right)$

$$= ((-1)^{n+1}\,(n+1)!) \times \left(\dfrac{1}{x^{n+2}}\right).$$

Par conséquent, $a_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)!$: l'hérédité est démontrée.

Au final, la conjecture est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

PROBLÈMES

92 **A.1.** En notant x l'arête du nouvel autel, l'équation du problème se résume à :

$V_{\text{nouvel autel}} = 2 \times V_{\text{ancien autel}}$, soit $x^3 = 2 \times 1 = 1$.

2. On applique le théorème des valeurs intermédiaires à $f : x \to x^3 - 1$ et on montre ainsi que f admet une unique racine α sur $[0\,;2]$. f étant strictement croissante et non nulle sur $[2\,;+\infty[$, cette racine est unique sur $\mathbb{R}^+$ tout entier.

B. 2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{UA}\left(\dfrac{1}{2} - u\,;2\right)$ et $\overrightarrow{VB}(1\,;1-v)$ sont colinéaires par construction. En appliquant la condition de colinéarité, on trouve effectivement $\left(\dfrac{1}{2} - u\right)(1-v) = 2$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{VB}(1\,;1-v)$ et $\overrightarrow{PR}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{u}{2}; -\dfrac{1}{2} + \dfrac{v}{2}\right)$ sont orthogonaux par construction. En écrivant la nullité du produit scalaire de ces deux vecteurs (expression analytique), on trouve effectivement $\left(\dfrac{1}{2} - u\right) = (1-v)^2$.

c. Les relations obtenues en **2.a.** et **2.b.** permettent d'écrire le système : $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2} - u\right)(1-v) = 2 \\ \left(\dfrac{1}{2} - u\right) = (1-v)^2 \end{cases}$ soit

$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2} - u\right)\mathrm{VH} = 2 \\ \left(\dfrac{1}{2} - u\right) = \mathrm{VH}^2 \end{cases}$ en remplaçant $(1-v)$ par VH.

En éliminant $\left(\dfrac{1}{2} - u\right)$, on trouve $\mathrm{VH} = \dfrac{2}{\mathrm{VH}^2}$ soit $\mathrm{VH}^3 = 2$.

On a donc bien $\mathrm{VH} = \sqrt[3]{2}$ (*cf.* partie A).

93 **1.**

x	-5		$-\dfrac{1}{3}$		1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-146	↗	$-\dfrac{22}{27}$	↘	-2	↗	94

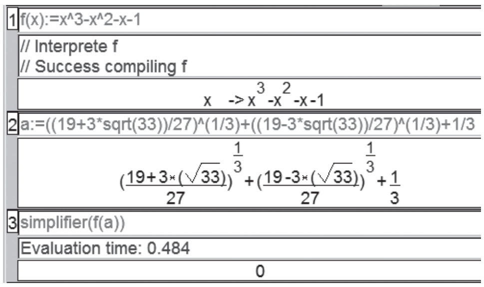
2. La valeur cherchée est donnée à la 4^{e} instruction (environ 1,839).

Pour montrer que cette valeur est unique, nous utilisons le tableau de variations.

D'une part, f ne peut s'annuler sur $[-5\,;1]$ car elle est continue et admet un maximum de $-\dfrac{22}{27} < 0$.

D'autre part, sur $[1\,;5]$, f étant continue et strictement croissante, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $0 \in [f(1)\,;f(5)]$, f ne peut s'annuler qu'une seule fois. De plus, d'après la calculatrice, $f(1{,}82) \approx -0{,}104 < 0$ et $f(1{,}84) \approx 0{,}004 > 0$, donc 1,839 est bien une valeur approchée de la solution cherchée.

3. Voici ce que nous propose le logiciel de calcul formel Xcasfr :



Le logiciel nous confirme que $f(\alpha)$ est nul.

94 **A.1.** $y = -15x - 4$

2. On calcule $f(x) - (-15x - 4)$, que l'on égale avec $(x+2)^3 = (x+2)^2(x+2) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

3. $(x+2)^3$ étant du signe de $x+2$, $\mathscr{C}$ est en dessous de T sur $]-\infty\,;-2[$ et au-dessus sur $]2\,;+\infty[$.

B. 1. a. $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

b. Si $g \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, alors $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de T (intersections possibles).

2. a. f'' étant la dérivée de f', si $f'' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, alors f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. et **c.** g étant dérivable comme somme sur $\mathbb{R}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

$\mathscr{C}$ est donc toujours au-dessus de T.

d. Lorsque la dérivée seconde d'une fonction est positive, la courbe de la fonction se trouve au-dessus de chacune de ses tangentes (on dit que la fonction est convexe).

3. On suit le même raisonnement. Ainsi, lorsque la dérivée seconde d'une fonction est négative, la courbe de la fonction se trouve en dessous de chacune de ses tangentes (on dit que la fonction est concave).

C. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme et pour tout x réel, $f''(x) = 24x^2 + 2 > 0$. On se trouve dans le cas du **2.** : la courbe de la fonction est au-dessus de ses tangentes (fonction convexe).

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (f est du type $\sqrt{u}$, où u est un polynôme) et pour tout x réel,

$f''(x) = \dfrac{6}{(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}\,!}$. Même cas de figure.

95 T_a est parallèle à d lorsque $f'(a) = -1$. Or, f, fonction polynôme, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$. On cherche donc les valeurs de a vérifiant l'équation $-\dfrac{1}{2}a^2 + a - 1 = -1$ soit $a\left(-\dfrac{1}{2}a + 1\right) = 0$.

Les valeurs de a qui conviennent sont donc 0 et 2.

96 D'une part, (AO) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}(a\,;f(a))$, soit ici $\overrightarrow{OA}\left(a\,;\sqrt{4-a^2}\right)$.

D'autre part, T a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;f'(a))$, soit ici $\vec{u}\left(1;-\dfrac{a}{\sqrt{4-a^2}}\right)$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u} = a \times 1 + \sqrt{4-a^2} \times \left(-\dfrac{a}{\sqrt{4-a^2}}\right) = a - a = 0.$

Les deux droites considérées sont donc perpendiculaires.

98 On note $x = \text{AB}$. Par le théorème de Pythagore, $\text{AC} = \sqrt{64 - x^2}$. En notant $P(x)$ le périmètre du triangle ABC, on obtient :

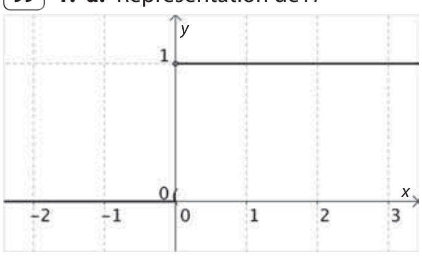
$P(x) = \text{AB} + \text{AC} + \text{BC} = x + 8 + \sqrt{64 - x^2}$.

P est dérivable sur $[0\,;8[$ comme somme d'une fonction affine et d'une fonction du type $\sqrt{u}$ et pour tout x de $[0\,;8[$:

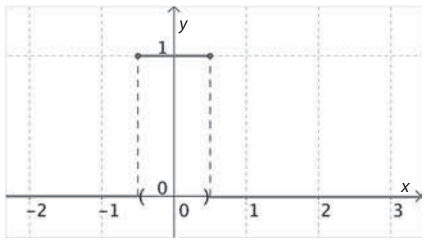
$$P'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{64-x^2}} = \frac{\sqrt{64-x^2} - x}{\sqrt{64-x^2}} = \frac{64 - 2x^2}{\sqrt{64-x^2}\left(\sqrt{64-x^2} + x\right)}$$

(pour la dernière égalité, on utilise la quantité conjuguée).

99 **1. a.** Représentation de H



Représentation de Π



b. H semble continue et dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $[0\,;+\infty[$.

c. Π semble continue et dérivable sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$, $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ et $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

2. a. $H(2-x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \leqslant 2 \\ 0 \text{ pour } x > 2 \end{cases}$ et

$H(1-x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \leqslant 1 \\ 0 \text{ pour } x > 1 \end{cases}$

Donc $T(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x > 2 \\ 1 \text{ pour } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \text{ pour } x < 1 \end{cases}$

b. $\Pi(ax+b) = \begin{cases} 0 \text{ pour} |ax+b| > \dfrac{1}{2} \\ 1 \text{ pour } -\dfrac{1}{2} \leqslant ax+b \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$

On cherche à réécrire l'inégalité $-\dfrac{1}{2} \leqslant ax+b \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Procédons par disjonction de cas sur $a \neq 0$ ($a = 0$ ne convient pas) :

<u>1^er cas</u> : $a > 0$.

Alors $-\dfrac{1}{2} \leqslant ax+b \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2a} - \dfrac{b}{a} \leqslant ax+b \leqslant \dfrac{1}{2a} - \dfrac{b}{a}$.

En identifiant les bornes d'intervalles sur lesquels T et Π sont constantes, on parvient au système :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2a} - \dfrac{b}{a} = 1 \\ \dfrac{1}{2a} - \dfrac{b}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2b = -2a \\ 1 - 2b = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

<u>2^e cas</u> : $a < 0$.

On procède de même : on trouve $a = -1$ et $b = \dfrac{3}{2}$.

<u>Conclusion</u> : $T(x) = \Pi\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = \Pi\left(-x + \dfrac{3}{2}\right)$.

100 Notons a_{min} l'altitude minimale et a_{max} l'altitude maximale.

Soit m la fonction « montée » qui à h (l'heure comprise dans l'intervalle $[8\,;20]$) associe $m(h)$ (l'altitude à laquelle se trouve l'alpiniste à l'heure h).

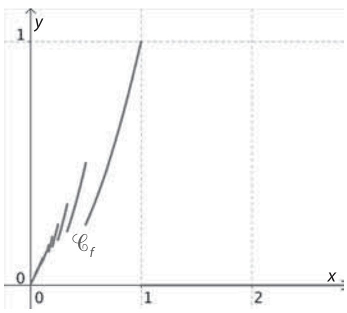
Soit d la fonction « descente » qui à h (l'heure comprise dans l'intervalle $[8\,;20]$) associe $d(h)$ (l'altitude à laquelle se trouve l'alpiniste à l'heure h).

Les deux fonctions m et d sont continues par définition. En notant Δ la fonction continue qui à h associe $\Delta(h) = d(h) - m(h)$, on constate que
$\Delta(8) = a_{\max} - a_{\min} > 0$, que $\Delta(20) = a_{\min} - a_{\max} < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\Delta(h) = 0$ admet une solution h_0 (pas forcément unique) dans $[8\,;20]$: c'est l'heure solution du problème.

101 **1.** La relation proposée s'écrit aussi : $f(x)(1 - f(x)) = 0$. D'après la règle du produit nul, $f(x)$ ne peut donc être égal qu'à 0 ou 1.

2. Par l'absurde, supposons qu'il existe a et b dans I ($a < b$, quitte à échanger a et b) tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{2}$. C'est impossible d'après 1.

102 **1.**



2. a. La fonction semble continue sur $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right]$, …

b. Par définition, la fonction partie entière $x \to \mathrm{E}(x)$ est continue (et constante) sur les intervalles $[k\,;k+1[$ (où $k \in \mathbb{Z}$). Soit $x \in [0\,;+\infty[$:

• si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$, donc f est constante (et nulle) sur $]1\,;+\infty[$.

• si $0 < x < 1$, on peut écrire $\frac{1}{x} \in [k\,;k+1[$ ($k \in \mathbb{N}^*$) soit encore $x \in \left]\frac{1}{k+1};\frac{1}{k}\right]$. Sur chacun de ces intervalles, f est définie par $f(x) = x^2\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = kx^2$: f est donc aussi continue sur les $\left]\frac{1}{k+1};\frac{1}{k}\right]$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

103 On considère sur $[0\,;1]$ la fonction « différence » g définie par $g(x) = f(x) - x$.

D'après l'énoncé, pour tout x de $[0\,;1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

On en déduit : $\begin{cases} 0 \leqslant f(0) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant f(1) - 1 \leqslant 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 0 \leqslant g(0) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant g(1) \leqslant 0 \end{cases}$

Par conséquent, $0 \in [g(1)\,;g(0)]$.

Comme g est continue sur $[0\,;1]$ (comme différence), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution x_0 sur $[0\,;1]$. En particulier, $f(x_0) = x_0$.

104 Rappelons que $\mathrm{E}(x)$ est l'unique entier vérifiant $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$.

Soit x réel et n entier naturel non nul, montrons l'égalité $\mathrm{E}(x) = \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{x}\right)$ par « double inégalité » :

D'une part, $nx \geqslant \mathrm{E}(nx)$ d'où $x \geqslant \frac{\mathrm{E}(nx)}{n}$. La fonction partie entière étant croissante, $\mathrm{E}(x) \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{x}\right)$.

D'autre part, $\mathrm{E}(x) \leqslant x$ donc $n\mathrm{E}(x) \leqslant nx$ et, comme le membre de gauche est un nombre entier, on a aussi $n\mathrm{E}(x) \leqslant \mathrm{E}(nx)$ soit aussi $\mathrm{E}(x) \leqslant \frac{\mathrm{E}(nx)}{n}$. En utilisant à nouveau la croissance, $\mathrm{E}(x) \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{x}\right)$.

Accompagnement personnalisé

1 Étudier le signe d'une expression

1. a.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$4x+5$		$-$	0	$+$	

b.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-3x+6$		$+$	0	$-$	

c.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$-x^2+4x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d.

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
x^2+6x+8		$+$	0	$-$	0	$+$	

e.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$4x^2+8x+4$		$+$	0	$+$	

2. a.

x	$-\infty$		-6		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	
x^2+6x		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x^2+6x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+4}{-x+3}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

c.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		0		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+4x+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x}{-x^2+4x+1}$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

d.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2+4		$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$(x^2+8)(x-1)$		$-$	$\|\|$	$+$	

e.

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{2}$		6		$+\infty$
x^2+2		$+$		$+$		$+$	
$-x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$3-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{(x^2+2)(-x+6)}{3-2x}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

3. a. $y = 2x - 2$

c. et **d.**

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)-2(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Position relative		$\mathscr{C}$ en dessous de T	Intersection	$\mathscr{C}$ au-dessus de T	Intersection	$\mathscr{C}$ au-dessus de T	

② Signe d'une expression avec racine carrée

2. a. On utilise une règle des signes.

b. On utilise la quantité conjuguée (ou une résolution d'équation).

c. On réduit au même dénominateur puis on utilise la quantité conjuguée (ou une résolution d'équation).

③ Travailler la rédaction

Il faut justifier l'obtention du signe de $f'(x)$ (signe du trinôme par exemple) et l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles considérés.

④ Des problèmes de tangentes

1. a. $f'(a)$ **b.** $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ **c.** $\vec{u}(1; f('a))$

2. Étape 2

a. une équation de T
(qui est ici $y = (3a^2-3)(x-a) + (a^3-3a+1)$)

b. le coefficient directeur de T
(qui est ici $f'(a) = 3a^2 - 3$)

c. un vecteur directeur de T

Étape 3

a. 1. Comme $f'(a) = 3a^2 - 3$, on en déduit une équation de T : $y = (3a^2-3)(x-a) + (a^3-3a+1)$. La condition cherchée est : $-5 = (3a^2-3)(2-a) + (a^3-3a+1)$ soit encore $a^3 - 3a^2 = 0$.

2. $f'(a) = 3$ devient ici $3a^2 - 3 = 3$, soit $a^2 = 2$.

3. La condition est : $1 + (3a^2-3)(-2) = 0$ ou encore $-6a^2 + 7 = 0$.

b. 1. $a = 0$ ou 3 **2.** $a = \pm\sqrt{2}$ **3.** $a = \pm\sqrt{\dfrac{7}{6}}$

Dans les trois cas, il y a deux tangentes solutions.

⑤ Approfondir

I. a. f est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ (fonction affine) et $f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ -1 \text{ si } x < 0. \end{cases}$

c. La fonction f' présente une discontinuité en 0.

II.1. Au vu de la courbe, la fonction h semble continue mais pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (problème en 1).

2. a. $m(x) = \begin{cases} -x-1 \text{ si } x < 1 \\ x-1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

b. $\lim\limits_{x\to 1^-} m(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} m(x) = 0$.

c. Les deux « droites limites » de la droite (AM) (à gauche et à droite de 1) sont donc distinctes : il n'y a pas de tangente en 1.

III. On trouve $a = 0{,}3$, $b = -1$ et $c = 0$.

CHAPITRE 3

Fonction exponentielle

Pour reprendre contact

1 Avec des exposants

a. 5^6 **b.** 2^{-3} **c.** 4^2 **d.** 10^{26} **e.** 3.5^2 **f.** 2.10^{-2} **g.** 2^{m+n} **h.** 2^{m-n} **i.** 2^{mn}

2 Avec des lectures graphiques

1. a. 2 **b.** 4 **c.** 0 **d.** 1

2. Si $m \in]-\infty\,;-1[$, aucune solution ; si $m \in [-1;1[$, deux solutions
Si $m = 1$, trois solutions ; si $m \in [1;3[$, quatre solutions
Si $m = 3$, trois solutions ; si $m \in]3\,;4[$, deux solutions
Si $m = 4$, une solution ; si $m \in]4\,;+\infty[$, aucune solution

3 Avec la dérivation

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+5}}$

2. Pour tout x réel,

a. $f'(x) = 2g'(2x-4)$ **b.** $f'(x) = g'(x+3)$ **c.** $f'(x) = -g'(-x+6)$ **d.** $f'(x) = -g'(-x)$

3. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$.

4. f est une fonction constante sur R et $f(x) = 3$.

Activité 1. Radioactivité au tableur

1. Voir fichier sur le site Math'*x*.

2. a. $N'(t)$ si N est dérivable en t. **b.** Évident **c.** non (pas encore !)

3. a. Voir fichier sur le site. **b.** Type exponentielle. Équation affichée sur Excel : $y = 6983{,}8\ \mathrm{e}^{-0{,}124x}$

Activité 2. D'un modèle discret à un modèle continu

1. Pour $n \geqslant 0$, **a.** $R_n = R_0 \times 0{,}917^n$

b. $f_{n+m} = \dfrac{R_{n+m}}{R_0} = (0{,}917)^n \times (0{,}917)^m$ et $f_n f_m = \dfrac{R_0 \times 0{,}917^n \times R_0 \times 0{,}917^m}{R_0^2} = (0{,}917)^n \times (0{,}917)^m$ d'où l'égalité.

2. a. Pour $t \geqslant 0$, la valeur $f(0) = 1$ est cohérente car la relation (1) donne : $f(t) = f(t)$.

b. Pour $t \geqslant 0$, si $g(t) = f(t+a)$ alors $g'(t) = f'(t+a)$ et si $h(t) = f(t)f(a)$ alors $h'(t) = f'(t)f(a)$.

De l'égalité des fonctions g et h, on déduit $f'(t+a) = f'(t)f(a)$.

c. Pour $t = 0$, l'égalité précédente donne $f'(a) = kf(a)$ avec $k = f'(0)$.

Activité 3. À la découverte de propriétés

A. 1. 2. Voir fichier sur le site Math'*x*.

3. Pour tout x réel, $(\exp(x))^2 = \exp(2x)$.

Pour vérifier, entrer en D2 le nombre $B2^2$, étirer cette formule ensuite jusqu'à D42.

4. Pour tout x réel, $(\exp(x))^3 = \exp(3x)$ et, pour n entier relatif, $(\exp(x))^n = \exp(nx)$.

B. Pour découvrir la relation $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ voir fichier sur le site, page 2.

C. 1. a. Égalité $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ pour tous réels x et y (voir fichier sur le site).

b. Fichier sur le site réalisé pour des entiers aléatoires compris entre 0 et 10.

2. $\exp(x-y) = \exp(x) \div \exp(y)$, fichier sur le site pour des entiers aléatoires compris entre 0 et 10.

D. 1. Pour tous réels x et y, $(\exp(x))^n = \exp(nx)$; $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$; $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$; $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

2. L'analogie avec les puissances entières d'un nombre réel est ainsi soulignée.

TP1. La décroissance exponentielle

A. 1. $\dfrac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\frac{5\,740}{\tau}} \Leftrightarrow e^{-\frac{5\,740}{\tau}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \tau = \dfrac{-5\,740}{\ln 0{,}5}$. On trouve : $\tau = 8\,281$ à l'unité près.

2. $\dfrac{1}{10}N_0 = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow t = -8\,281 \ln 0{,}1 = 19\,068$. Datation estimée : proche de 20 000 ans.

B. 1. Pour $t \geqslant 0$, $N'(t) = \underbrace{-\dfrac{N_0}{\tau}}_{\text{négatif}} \underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{positif}} < 0$ donc N est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $T = -\tau \ln 0{,}5$. Population à l'instant T : $\dfrac{1}{2}N(0)$.

3. a. Pour $k \geqslant 1$, $e^{-\frac{kt}{\tau}} = \left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

b. $k = 2 \rightarrow A\left(2T\ ;\ \dfrac{1}{4}N_0\right)$; $k = 3 \rightarrow A\left(3T\ ;\ \dfrac{1}{8}N_0\right)$

4. a. τ est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente T à la courbe représentative de N au point d'abscisse 0. T a pour équation $y = -\dfrac{N_0}{\tau}x + N_0$.

$-\dfrac{N_0}{\tau}x + N_0 = 0 \Leftrightarrow x = \tau$ d'où le résultat.

b. $N_0 e^{-5} \approx 0{,}007\, N_0 < 0{,}01\, N_0$: plus de 99 % des noyaux présents à l'instant $t = 0$ sont désintégrés.

TP2. Tangentes à deux courbes

1. a. Voir fichier sur le site Math'*x*.

b. T_1 et T_2 semblent perpendiculaires et PQ = 2.

2. Les vecteurs directeurs de T_1 et T_2 ont pour coordonnées respectives $(1\,;\ e^a)$ et $(1\,;\ -e^{-a})$.

$1 \times 1 + e^a \times -e^{-a} = 1 - 1 = 0$ donc $T_1 \perp T_2$.

$P(a-1\,; 0)$; $Q(a+1\,; 0)$ donc PQ = 2.

TP3. Une famille de fonctions

1. Les propositions 1 et 3 semblent vraies, la proposition 2 semble fausse.

2. Proposition 1 : $f : x \mapsto e^x - x$ a pour dérivée $f' : x \mapsto e^x - 1$. f est donc décroissante sur $]-\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$; elle admet donc un minimum en 0 valant 1 donc, pour tout réel x, on a : $f(x) > x$. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de d_1.

Proposition 2 : $g : x \mapsto e^x - 3x$ a pour dérivée $g' : x \mapsto e^x - 3$. g est donc décroissante sur $]-\infty ; \ln 3]$, croissante sur $[\ln 3 ; +\infty[$; elle admet donc un minimum en $\ln 3$ valant $3 - 3\ln 3 \approx -0,3$.

On a : $g(0) = 1$; $g(2) \approx 1,4$ donc l'équation $g(x) = 0$ a deux solutions a et b. Sur $]a ; b[$, $g(x) < 0$ donc $e^x < 3x$.

Proposition 3 : la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α a pour équation $y = e^{\alpha}(x - \alpha) + e^{\alpha}$. La droite d_a est tangente à $\mathscr{C}$ si il existe α tel que $\begin{cases} e^{\alpha} = a \\ -\alpha e^{\alpha} + e^{\alpha} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \\ \alpha = 1 \end{cases}$. La droite d_e est donc tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

TP4. Courbes à sous-tangente constante

A. 1. Conjecture : $S_aN_a = 1$. Voir fichier sur le site Math'*x*.

2. a. $T_a : y = e^a x + e^a(1 - a)$

b. $0 = e^a x + e^a(1 - a) \Leftrightarrow x = a - 1$. Le point S_a a donc pour coordonnées $(a - 1 ; 0)$.

Puisque N_a a pour coordonnées $(a ; 0)$, $S_aN_a = 1$.

B. 1. $N_a(a ; 0)$; $S_a\left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} ; 0\right)$

2. $S_aN_a = 1 \Leftrightarrow S_aN_a^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(f(a))^2}{(f'(a))^2} = 1 \Leftrightarrow f(a) = f'(a)$ car f et f' sont strictement positives sur $\mathbb{R}$.

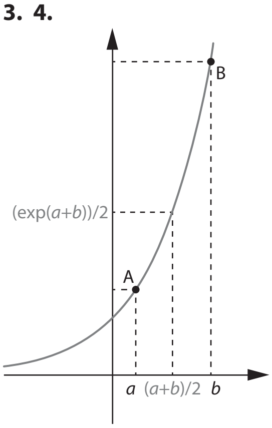
Seule la fonction exponentielle est solution de l'équation $f' = f$ et donc du problème posé.

TP5. Un algorithme pour approcher e^x

A. 1. $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^x$ donc $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$ (car $e^{\frac{x}{2}}$ et e^x sont strictement positifs).

2. $e^{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{e^{a+b}} = \sqrt{e^a e^b}$.

3. 4.



L'inégalité demandée est alors évidente puisque la fonction exp est strictement croissante sur $\left[a ; \dfrac{a+b}{2}\right]$.
Si $x \in \left[\dfrac{a+b}{2} ; b\right]$, on a $\sqrt{e^a e^b} < e^x < e^b$.

B. 1. Si $x \in [0 ; 1]$, alors $e^x \in [1 ; e]$ d'où la validité de l'initialisation.

2. Alors b prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$, M la valeur $\sqrt{mM}$. Sinon a prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$, m la valeur $\sqrt{mM}$

3. La variable *eps* fixe l'amplitude de l'encadrement souhaité pour e^x.

4. a. Voir fichier sur le site Math'*x*.

b. On obtient : $2,0137523 < e^{0,7} < 2,0137533$. La calculatrice indique 2,013752707 pour $e^{0,7}$.

Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 **a.** $A = e^{10} > B = e^9$ **b.** $A = e^{-14} = B$

2 $(e^{-x}+1)^2 = e^{-2x} + 2e^{-x} + 1$

3 $e^{2x} + 3e^x = e^x(e^x+3)$

4 **a.** D **b.** C **c.** B, D **d.** A, D

5 Pour $x \neq 0$, $e^x > x+1$. Égalité si $x = 0$.

6 Pour tout x réel,

a. $f'(x) = 3e^{3x+4}$ **b.** $f'(x) = (2x+1)e^{2x}$

c. $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}$ **d.** $f'(x) = 3e^{3x}$

7 **a.** $x = 0$ **b.** $x = -\dfrac{3}{2}$

c. $x = \pm 1$ **d.** $x = \ln 3 + 2$

8 **a.** Aucune solution **b.** $x \in]-\infty\,;0[$

c. $x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right[$ **d.** $x \in [4\,;+\infty[$

9 **a.** $f'(x) = 2e^{2x+5} > 0$; f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $f'(x) = -3e^{-3x} < 0$; f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. $f'(x) = 2xe^{x^2}$. f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$, strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

d. $f'(x) = 2e^{-x} > 0$; f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

ENTRAÎNEMENT

10 **1.** Pour tout x réel, $h'(x) = \exp(x) \times (g(x) + g'(x)) = 0$ donc h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

2. $h(0) = 1$ d'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 1$.

11 Voir corrigé en fin de manuel.

12 **1. a.** Pour tout x réel, $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$.

b. Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) \neq 0$. $f(x_0) = f(x_0)f(0)$ donc $f(0) = 1$.

c. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = f(x-x) = f(0) = 1$

2. a. Initialisation évidente pour $n = 1$.

Hérédité : soit n un entier $\geqslant 1$ tel que $f(nx) = [f(x)]^n$.

$[f(x)]^{n+1} = [f(x)]^n f(x) = f(nx)f(x) = f((n+1)x)$.

Conclusion : $\forall n \geqslant 1, f(nx) = [f(x)]^n$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $p = -n$.

$f(-nx) = f(px) = [f(x)]^p = [f(x)]^{-n}$.

13 **a.** e^3 **b.** e^{3x} **c.** e^x **d.** e^{x+1}

14 Voir corrigé en fin de manuel.

15 **a.** e^{2x+2} **b.** e^{2x-1} **c.** e^{-x} **d.** $e^x + 1$

16 **1.**

$\exp(x)^3 \cdot \exp(-4) = \exp(3x) \cdot \exp(-4) = \exp(3x-4)$.

La commande *expexpand* sert donc à « développer » une écriture exponentielle.

2. $\exp(-x^2 + 2x + 4) = \exp(-x^2) \cdot \exp(2x) \cdot \exp(4)$

$= (\exp(x^2))^{-1} \cdot (\exp(x))^2 \cdot \exp(4)$.

17 **a.** $e^{-2x} - 2$ **b.** $e^{2x} - e^{-2x} + 2e^x + 2e^{-x}$

18 **a.** $e^x(e^x - 1)$ **b.** $(e^x-1)(e^x+1)$

c. $(2e^x+1)^2$ **d.** $e^x(x - e^{2x})$

19 Pour tout x réel, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 2$.

20 Voir corrigé en fin de manuel.

21
$$\frac{2t(x)}{1+(t(x))^2} = \frac{\dfrac{2e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 + \dfrac{e^{2x} - 2 + e^x}{e^{2x} + 2 + e^x}}$$
$$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \times \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$$
$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})(e^{2x} + e^{-2x})} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{e^{2x} + e^{-2x}}$$
$$= \frac{(e^{2x} - e^{-2x})}{e^{2x} + e^{-2x}} = t(2x)$$

22 **1.** L'origine du repère semble être un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de g.

2. a. Pour tout réel x,

$$g(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{\dfrac{1 - e^{2x}}{e^{2x}}}{\dfrac{1 + e^{2x}}{e^{2x}}} \text{ donc } g(-x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -g(x).$$

b. Le milieu de [MM′] a pour coordonnées (0 ; 0).

c. L'origine du repère est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

23 Voir corrigé en fin de manuel.

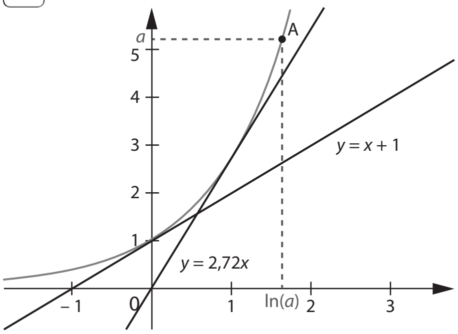
24 **a.** Faux **b.** Vrai **c.** Vrai **d.** Faux

25 **a.** Vrai **b.** Faux **c.** Vrai **d.** Vrai

26 **a.** Vrai **b.** Faux **c.** Vrai **d.** Faux

27 $\mathscr{C}_1$ représente f, $\mathscr{C}_2$ représente g, $\mathscr{C}_3$ représente h et $\mathscr{C}_4$ la fonction i.

28



1. $T_0 : y = x + 1$; $T_1 : y = ex$

2. Toutes les affirmations proposées sont vraies.

29 Voir corrigé en fin de manuel.

30 Pour tout x réel non nul,

a. $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{3(x-1)e^x + 1}{2x^2}$

c. $f'(x) = \dfrac{(-x^2 - x - 1)e^x}{x^2 e^{2x}}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$

31 Pour tout x réel non nul,

a. $f'(x) = \dfrac{(x-2)e^x - 8}{2x^3}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$

Pour tout x réel,

c. $f'(x) = 2x^2(x+3)e^x$ **d.** $f'(x) = \dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$

32 **1. a.** $f(0) = 3$; $f'(1) = 0$; $f'(-3) = 0$; $f'(0) = 3$.

b. $y = 3x + 3$ **c.** deux solutions

2. Pour tout x réel, $f'(x) = (-x^2 - 2x + 3)e^x$

a. b. Simples calculs **c.** $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

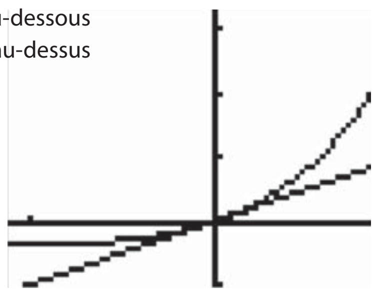
33 Voir corrigé en fin de manuel.

34 **1.** Pour tout x réel, $f'(x) = (x+1)e^x$ et $e^x > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $x + 1$. f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1]$, strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$; $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$.

2. a. $T : y = x$ **b.** La stricte croissance de la fonction exp permet d'affirmer que si $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant e^0$ soit $e^x \geqslant 1$. Par multiplication par $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant x$.

Si $x < 0$, par contre, $f(x) < x$.

c. $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessous de T sur $]-\infty ; 0]$, au-dessus sur $[0 ; +\infty[$.



35 **1.** Pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ et $e^x > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $T : y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

3. a. Pour tout x réel,

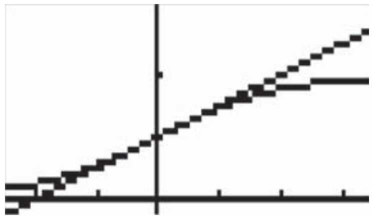
$g'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{4(e^x+1)^2} = \dfrac{(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2}$

b. Pour tout x, $g'(x) \geqslant 0$.

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. $g(0) = 0$.

d. $\mathscr{C}_g$ est donc au-dessus de T sur $]-\infty ; 0]$, au-dessous sur $[0 ; +\infty[$.

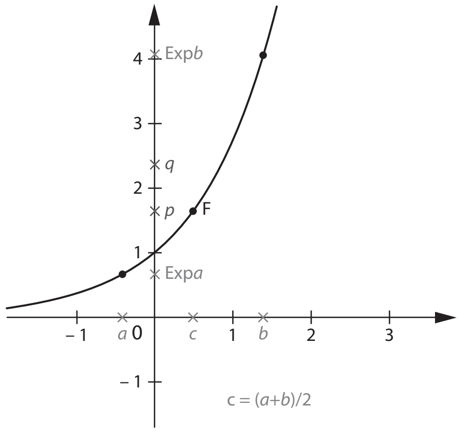


36 **1.**

```
variables
    a est_du_type nombre
    b est_du_type nombre
    p est_du_type nombre
    q est_du_type nombre
debut_algorithme
    lire a
    lire b
    p prend_la_valeur exp((a+b)/2)
    q prend_la_valeur (exp(a)+exp(b))/2
    si (p<q) alors
        debut_si
        afficher "p < q"
        fin_si
        sinon
            debut_sinon
            si (p==q) alors
                debut_si
                afficher "p > q"
                fin_si
                sinon
                    debut_sinon
                    afficher "p > q"
                    fin_sinon
            fin_sinon
fin_algorithme
```

2. Il semblerait que, pour tous réels a et b, $p \leqslant q$.

3. Voir fichier sur le site Math'x.



Justification : $p^2 - q^2 = -\frac{1}{4}(e^a - e^b)^2$

Puisque p et q sont strictement positifs, alors $p \leqslant q$. Égalité si $a = b$.

37 Voir corrigé en fin de manuel.

38 **a.** $x = \ln 4$ **b.** $x = \ln 3$
c. $x = \ln 2 - 2$ **d.** aucune solution

39 **a.** $x = -\frac{4}{3}$ **b.** $x = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{e+2}{3}\right)$
c. $x = -4$ **d.** $x = -2$ ou $x = 4$.

40 Poser $X = e^x$ dans cet exercice
a. $x = 0$ **b.** $x = 8$ **c.** $x = 0$ ou $x = \ln 6$.
d. $x = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$ ou $x = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

41 **1.** $C(0,5) \approx 15\,227$ €

2. $15\,000e^{0,75p} = 16\,000 \Leftrightarrow p = \frac{4}{3}\ln\left(\frac{16}{15}\right) \approx 0{,}086$.
Taux environ égal à 8,6 %.

42 **a.** $t = 115$; $r(115) = 3{,}582$ à 10^{-3} près.
b. $r(t) = \frac{1}{2}\cdot 25{,}6 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 12{,}8 + 1{,}599}{0{,}025} \approx 165{,}93$

en fin d'année 2065, la longueur du glacier aura diminué de moitié.

c. $r(t) = 25{,}6 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 25{,}6 + 1{,}599}{0{,}025} \approx 193{,}66$.

En 2094, le glacier aura disparu…

43 **a.** 425 °C **b.** $t = \frac{\ln\left(\frac{11}{40}\right)}{-0{,}05} \approx 26$ **c.** 57,8 °C

44 Voir corrigé en fin de manuel.

45 Pour x réel, $f'(x) = \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0$

ou $x = \ln 9$. Deux tangentes, aux points d'abscisses 0 et ln9 sont parallèles à la droite d.

46 $\begin{cases} V_0 e^{-2c} = 64 \\ V_0 e^{-5c} = 48{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{64}{48{,}5}\right) \approx 0{,}09 \\ V_0 = 64\left(e^c\right)^2 \approx 77 \end{cases}$

47 **1.** D = 10 ; $x = 10e^{-\frac{6}{8}} + 10e^{-\frac{1}{8}} = 13{,}549$ mg à 10^{-3} près.

2. $10e^{-\frac{T+5}{8}} + 10e^{-\frac{T}{8}} = 3 \Leftrightarrow e^{-\frac{T}{8}} = \frac{0{,}3}{1 + e^{-\frac{5}{8}}}$

$\Leftrightarrow T = -8\ln\left(\frac{0{,}3}{1 + e^{-\frac{5}{8}}}\right) \approx 13$: 13 heures

48 **a.** $x \in \left]-\infty\,;2\right[$ **b.** $x \in \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

c. Aucune solution **d.** $x \in \left]-\infty\,;1\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$

49 **a.** $x \in \left]-\infty\,;0\right[$ **b.** $x \in \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

c. $x \in \left[\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$ **d.** $x \in \left]-2\,;3\right[$

50 Voir corrigé en fin de manuel.

51 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (-2x+3)e^{1-x}$ donc le signe de $f(x)$ correspond à celui de $-2x+3$.

x	$-\infty$		3/2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	

b. Le signe de $f(x)$ correspond à celui de $2x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		−	‖	+	

c. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		2/3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	

d. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) < 0$ (somme de deux fonctions strictement négatives)

52 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(e^x - 1)$ donc le signe de $f(x)$ correspond à celui de $e^x - 1$.

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(e^x - e^2)$ donc le signe de $f(x)$ correspond à celui de $e^x - e^2$.

$e^x - e^2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	

c. Le signe de $f(x)$ correspond à celui de $3x^2 - 2x - 8$.

($\Delta = 100$, racines : $-\frac{4}{3}$ et 2)

x	$-\infty$		$-4/3$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

53 $t > \dfrac{\ln\frac{50}{3}}{0{,}12}$; $t > 23{,}44$: au bout de 23 jours.

54 $v'(t) = 3e^{-\frac{t}{10}} \leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow t \geqslant -10\ln\dfrac{0{,}1}{3}$.

La plus petite valeur cherchée est 35s.

55 Voir corrigé en fin de manuel.

56 Voir corrigé en fin de manuel.

57 Pour tout x réel,

a. $f'(x) = -4e^{-x}$ **b.** $f'(x) = 10xe^{5x^2}$

c. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ **d.** $f'(x) = (-2x^2 + 8x - 4)e^{-x}$

58 Pour tout x réel,

a. $f'(x) = 2e^{2x-1}$ **b.** $f'(x) = -3(1+2x)e^{2x-1}$

c. $f'(x) = \cos x e^{\sin x}$ **d.** $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$

59 Pour tout x réel non nul,

a. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2}e^{x^2-1}$

c. $f'(x) = \dfrac{x+2}{x}e^{\frac{-2}{x}}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{3}{x^2}e^{\frac{2x-3}{x}}$

60 **1.** La courbe $\mathscr{C}$ s'obtient à partir de la courbe de la fonction exp par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Pour tout x réel, $f'(x) = -e^{-x}$ donc $f'(0) = -1$ et T a pour équation : $y = -x + 1$.

3. a. Pour tout x réel, $h'(x) = -e^{-x} + 1$.

$-e^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. La fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$, strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $h(0) = 0$.

b. Le minimum de h vaut 0 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geqslant -x + 1$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$.

61 **a.** Pour $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{xe^{x+1}}{(x+1)^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que x.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\|\|$ ↘	e	↗

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(x - x^2)e^{-2x}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x - x^2$ (racines : 0 et 1).

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	0 ↗	e^{-2}	↘

c. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x^2 - 2x + 1)e^{x^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $2x^2 - 2x + 1\,(\Delta < 0)$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

62 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^2 - x + 1)e^x$ donc $f'(x)$ a le même signe que $2x^2 - 2x + 1\,(\Delta < 0)$.
f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x+5)e^{2x-1}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $2x + 5$.

x	$-\infty$	$-5/2$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-e^{-6}/2$	↗

c. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(-2x+5)}{e^x}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x + 5$.

x	$-\infty$	$5/2$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$2/e^{\frac{5}{2}}$	↘

63 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}x(x+1)(x+4)e^x$

x	$-\infty$	-4	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-16e^{-4}$ ↗	$\dfrac{e^{-1}}{2}$ ↘	0	↗

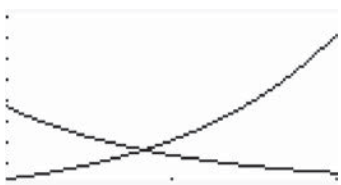
b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x(e^x + 1)(e^x - 1)$ donc $f'(x)$ a le même signe que $e^x - 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\dfrac{-2}{3}$	↗

64 Voir corrigé en fin de manuel.

65 **1.** Pour $x \in [4 ; 6]$, $f'(x) = 100e^x$ et $g'(x) = -10^6e^{-x}$.
f est strictement croissante et g est strictement décroissante sur $[4 ; 6]$. Plus le prix unitaire augmente dans $[4 ; 6]$, plus l'offre augmente et plus la demande diminue.

2. $4 \leqslant x \leqslant 6$; $1000 \leqslant y \leqslant 40\,000$



3. On résout l'équation : $e^{2x} - 45e^x - 10^4 = 0$.
Seule solution dans $[4 ; 6]$: $x = \ln 125 \approx 4{,}83$.
Prix d'équilibre : 4 € 83.

66 **1.** f semble croissante sur $[-3 ; 3]$, négative sur $[-3 ; 0]$, positive sur $[0 ; 3]$.

2. a. $1 - e^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.

b. c. d.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x - 1 + e^{-x} - xe^{-x} = (x-1)(1 - e^{-x})$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	$\approx -0{,}1$	↗	

3. Les deux conjectures émises étaient erronées.

67 **1.** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (x+1)e^{x}\ ;\ g'(x) = \dfrac{1-x}{e^{x}}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-e^{-1}$	↗		↗	
$g(x)$		↗		↗	e^{-1}	↘	

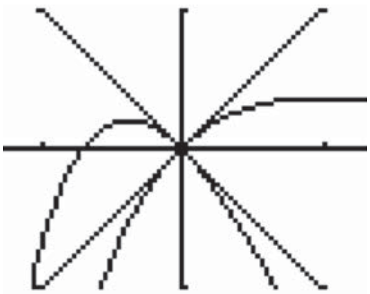
2. a. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

b. On a $f'(0) = g'(0) = 1$ et $f(0) = g(0) = 0$.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont en leur unique point commun $O(0\ ;0)$ une tangente commune d'équation $y = x$.

68 Voir corrigé en fin de manuel.

69



$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1-x)e^{-x}$

$g'(x) = (1-x)e^{-x} - 2$

$f'(0) = 1\ ; g'(0) = -1$ donc $f'(0)\cdot g'(0) = -1$

$f(0) = g(0) = 0$

En O, les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont perpendiculaires.

70 **1.** Pour $z \geqslant 0$, $P'(z) = -\dfrac{MgP(0)}{RT}e^{-\frac{Mgz}{RT}}$

donc $P'(z) < 0$. La pression est donc une fonction décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $z = -\dfrac{RT\ \ln\left(\dfrac{909}{P(0)}\right)}{mg} \approx 928$ m.

71 **1.** Pour $t \geqslant 0$, $x'(t) = -0{,}5e^{-0{,}5t}$ donc la fonction x est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Pour $t \geqslant 0$, $y'(t) = -0{,}5e^{-0{,}5t} + e^{-t}$

$= e^{-0{,}5t}(-0{,}5 + e^{-0{,}5t})$.

Le signe de $y'(t)$ correspond à celui de $-0{,}5 + e^{-0{,}5t}$.

$-0{,}5 + e^{-0{,}5t} > 0 \Leftrightarrow t < -2\ln 0{,}5$. On a donc :

t	0		t_M		$+\infty$
$y(t)$		↗	M	↘	

$t_M = -2\ln 0{,}5\,;t_M \approx 1{,}39\ \ ; M = 0{,}25$.

3. a. $z'(t) = -x'(t) - y'(t) = \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{\text{positif}}\Big(\underbrace{1-e^{-0{,}5t}}_{\text{positif car } t>0}\Big)$

donc la fonction z est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. $t_0 = 11$. Les concentrations en produit A et B seront quasi-nulles pour $t \geqslant 11$ min.

72 **1.** $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 3x^2 + 2x + 1\ (\Delta < 0)$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$g(0) = -1$ *et* $g(1) = 2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. $\alpha = 0{,}544$ à 10^{-3} près. La fonction g est négative sur $]-\infty\,;\alpha]$, positive sur $[\alpha;+\infty[$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-g(x)e^{-x}}{(x^2+1)^2}$ donc $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires. La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$, décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

73 **1.** $\forall x \neq 0, f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^{x}-1)^2}$ donc f'et g ont le même signe sur $\mathbb{R}^*$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (-1-x)e^{x}$. g est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$, strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$, $g(-1) < 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) < 0$.

3. f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

74 Voir corrigé en fin de manuel.

75 **1.** Voir fichier sur le site Math'*x*.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k'(x) = ke^{kx}$ et $g_k'(x) = -ke^{-kx}$.

$k > 0$ donc f_k est strictement croissante et g_k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) - g_k(x) = e^{kx}(1 - e^{2kx})$.

$1 - e^{2kx} > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

$\mathscr{C}_k$ est au-dessus de Γ_k sur $]-\infty\,;0]$, au-dessous sur $[0\,;+\infty[$. Les deux courbes se coupent en $A(0\,;1)$.

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) - f_{k'}(x) = e^{kx}(1 - e^{(k'-k)x})$.

$1 - e^{(k'-k)x} > 0 \Leftrightarrow x < 0$ car $k' - k > 0$.

$\mathscr{C}_k$ est au-dessus de $\mathscr{C}_{k'}$ sur $]-\infty\,;0]$, au-dessous sur $[0\,;+\infty[$.

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) - g_{k'}(x) = e^{-kx}(1 - e^{(k-k')x})$.

$1 - e^{(k-k')x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ car $k - k' < 0$. Γ_k est au-dessous de $\Gamma_{k'}$ sur $]-\infty\,;0]$, au-dessus sur $[0\,;+\infty[$.

76 **1.** Voir fichier sur le site Math'*x*.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k'(x) = 2kxe^{kx}$ et $g_k'(x) = -2kxe^{-kx}$. $k > 0$ donc f_k est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, strictement croissante sur $[0;+\infty[$. g_k est strictement croissante sur $]-\infty;0]$, strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) - g_k(x) = e^{kx^2}(1 - e^{2kx^2})$.

$1 - e^{2kx^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$. $\mathscr{C}_k$ est au-dessus de Γ_k sur $\mathbb{R}$.

Les deux courbes se coupent en A(0 ; 1).

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) - f_{k'}(x) = e^{kx^2}(1 - e^{(k'-k)x^2})$.

$1 - e^{(k'-k)x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$ car $k' - k > 0$.

$\mathscr{C}_k$ est au-dessous de $\mathscr{C}_{k'}$ sur $\mathbb{R}$.

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) - g_{k'}(x) = e^{-kx^2}(1 - e^{(k-k')x^2})$.

$1 - e^{(k-k')x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$ car $k - k' < 0$.

Γ_k est au-dessus de $\Gamma_{k'}$ sur $\mathbb{R}$.

77 **1.** Pour $x \geqslant 0$, $f(x) = 2x - 2 \Leftrightarrow -2e^{-x}(x-1) = 0$ $\Leftrightarrow x = 1$. $\mathscr{C}$ et d ont un seul point en commun, B(1 ; 0).

2. Pour $x \geqslant 0$, $f'(x) = 2 + (x-2)e^{-x}$.

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow x = 2$. En A$(2 ; 2 - e^{-2})$, la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à d. Voir fichier sur le site Math'*x*.

78 **1. a.** Pour $x \geqslant 0$, $f'(x) = 2 + (x-2)e^{-x}$; $f'(0) = 0$.

b. $f'(x) > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

2.a. Pour $x \geqslant 0$, $f''(x) = (3 - x)e^{-x}$ donc le signe de $f''(x)$ correspond à celui de $3 - x$.

f' est strictement croissante sur $]-\infty;3]$, strictement décroissante sur $[3;+\infty[$.

b. D'après les questions précédentes, $f'(x)$ est négatif sur $]-\infty;0]$, positive sur $[0;+\infty[$.

3. f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

79 **1.** Pour $x \geqslant 0$, $f'(x) = (2x-1)e^{-2x} + 1$.

2. a. $f'(x) > 1 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0{,}5$.

b. Pour $x \geqslant 0$, $f''(x) = (4 - 4x)e^{-2x}$ donc le signe de $f''(x)$ correspond à celui de $4 - 4x$.

f' est strictement croissante sur $]-\infty;1]$, strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

3. $f'(0) = 0$. D'après les questions précédentes, $f'(x)$ est négatif sur $]-\infty;0]$, positive sur $[0;+\infty[$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur [0 ; 1], l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α. $\alpha = 1{,}12$ à 10^{-2} près.

80 Pour n entier $\geqslant 0$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{e^{-(2-0{,}5(n+1))}}{e^{-(2-0{,}5n)}} = e^{0{,}5}$.

La suite (b_n) est donc géométrique de raison $e^{0{,}5}$.

81 **1.** $u_1 = 1$, $u_2 = e$, $u_3 = e^3$, $u_4 = e^6$.

2. Raisonnement par récurrence

Initialisation : pour $n = 2$, $u_2 = e$ et $e^{S_1} = e$.

Hérédité : pour un entier $n \geqslant 2$, on suppose que $u_n = e^{S_{n-1}}$. Alors $u_{n+1} = u_n e^n = e^{S_{n-1}+n} = e^{S_n}$

Conclusion : la propriété est vraie au rang $n = 2$ et est héréditaire : $\forall n \geqslant 2$, $u_n = e^{S_{n-1}}$.

3. $\forall n \geqslant 2$, $u_n = e^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

82 Voir corrigé en fin de manuel.

83 **1.** τ semble être l'abscisse du point d'intersection de la tangente T à la courbe de la fonction i au point d'abscisse 0 avec l'axe des abscisses.

Pour $t \geqslant 0$, $i'(t)e^{-\frac{t}{\tau}}$ donc $i'(0) = -\dfrac{i_0}{\tau}$ et T a pour équation $y = -\dfrac{i_0}{\tau}x + i_0$. T coupe l'axe des abscisses en $x = \tau$.

La vérification est ainsi faite.

2. $i(\tau) = i_0 e^{-1} \approx 0{,}37 i_0$. Ce calcul confirme ainsi la lecture graphique.

84 **a.** Vrai **b.** Vrai **c.** Faux **d.** Faux

85 **a.** Vrai **b.** Faux (valable uniquement si $a = b$ car $e^{2a} + e^{2b} - 2e^{a+b} = (e^a - e^b)^2$).

c. Vrai **d.** Faux (voir explications **b.**)

86 D'une part, les sons s'affaiblissent car la fonction i est décroissante sur $[0;+\infty[$ $(i'(t) = -i_0 KF^2 e^{-KF^2 x})$.

D'autre part, pour $F < F'$, $\dfrac{i_F(x)}{i_{F'}(x)} = \underbrace{e^{-Kx}}_{\text{fixé}}\ \underbrace{e^{F^2-F'^2}}_{<1 \text{ car } F'>F}$

Donc $i_F(x) < i_{F'}(x)$.

APPROFONDISSEMENT

111 **1. a.** $x = 0$ ou $x = 1$ $(X = e^x)$, $\Delta = (e-1)^2$

b. $x = \dfrac{1}{2}\ln 11$ $(X = e^{2x}, \Delta = 18^2)$

c. Tous les réels sont solutions car

$e^x + e^{-x} - 2 = \dfrac{(e^x - 1)^2}{e^x}$

2. $x = \dfrac{\ln 10 + 2}{2}$ et $y = \dfrac{\ln 10 - 2}{2}$

112 **1.** $T_a : y = e^a(x - a) + e^a$

2. Pour tout x réel, $\phi(x) = e^x - e^a$ donc $\phi(x) < 0$ si $x < a$ et $\phi(x) > 0$ si $x > a$.

φ est strictement décroissante sur $]-\infty;a]$, strictement croissante sur $[a;+\infty[$. $\varphi(a) = 0$.

φ est donc positive sur $\mathbb{R}$. $\mathscr{C}$ est au-dessus de T_a quel que soit a réel.

113 **1. 2.** Pour tout x réel, $f(x)=\begin{cases} e^{x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ e^{-x} \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

On a : $f(-x)=f(x)$ donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

3. f est continue en 0.

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-1$.

f n'est donc pas dérivable en 0.

114 **1. a.** Pour tout x réel de [0 ; 1],

$f'(x)=e^{-x}\left(-\dfrac{x^n}{n!}\right)<0$ et $g'(x)=\dfrac{e^{-x}\ x^{n-1}}{n!}(-2x+n)\geqslant 0$ car $n \geqslant 2$.

f est décroissante sur [0 ; 1] ; $f(0)=1$ d'où $f(1)<1$

g est croissante sur [0 ; 1] ; $g(0)=1$ d'où $g(1)>1$

b. $f(1)<1 \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{1!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}<e$.

$g(1)>1 \Leftrightarrow e<\left(1+\dfrac{1}{1!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)+\dfrac{1}{n!}$.

2. a. Algorithme :

```
VARIABLES : n, S, T, k nombres
ENTRÉES ET INITIALISATION :
    Demander n
    S et T prennent la valeur 1
TRAITEMENT :
    Pour k allant de 1 jusqu'à n Faire
        S prend la valeur S + 1/k !
        T prend la valeur S + 1/k !
    FinPour
SORTIE : Afficher S < e < T
```

2. b. Programme sur AlgoBox

```
▼ VARIABLES
  ├n EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├S EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├T EST_DU_TYPE NOMBRE
  └k EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├LIRE n
  ├S PREND_LA_VALEUR 1
  ├T PREND_LA_VALEUR 1
  ▼ POUR k ALLANT_DE 1 A n
    ├DEBUT_POUR
    ├S PREND_LA_VALEUR S+1/ALGOBOX_FACTORIELLE(k)
    ├T PREND_LA_VALEUR S+1/ALGOBOX_FACTORIELLE(k)
    └FIN_POUR
  ├AFFICHER S
  ├AFFICHER " < "
  ├AFFICHER "e < "
  └AFFICHER T
FIN_ALGORITHME
```

Pour $n=6$:

```
***Algorithme lancé***
2.7180556 < e < 2.7194444
***Algorithme terminé***
```

3. Supposons qu'il existe p et q entiers tels que $e=\dfrac{p}{q}$.

a. $q!e=p(q-1)$ donc $q!e$ est un produit de deux entiers donc $q!e$ est un entier.

b. $\dfrac{q!}{k!}=q(q-1)\ldots(q-k+1)$ donc $\dfrac{q!}{k!}$ est un entier.

c. Après multiplication par $q!$, on obtient :

$\underbrace{\underbrace{\dfrac{q!}{1!}}_{\in\mathbb{N}}+\ldots+\underbrace{\dfrac{q!}{k!}}_{\in\mathbb{N}}+\ldots+1}_{\text{entier naturel } A}<q!e<A+1$.

d. Contradiction : $q!e$ ne peut pas être un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs.

115 **1. a.** $f(0)=1$, et pour $x \in \mathrm{I}$, $f'(x)=\dfrac{10}{\left(1+5e^{\frac{-n}{3}}\right)^2}>0$.

b. f est donc strictement croissante sur I.

2. Pour $x \in \mathrm{I}$, $\dfrac{1}{18}f(x)(6-f(x))=\dfrac{2\left(5e^{\frac{-n}{3}}\right)}{\left(1+5e^{\frac{-n}{3}}\right)^2}=f'(x)$

donc $f''(x)=\dfrac{1}{18}f'(x)(6-2f(x))$

donc $f''(x)=\dfrac{1}{9}f'(x)(3-f(x))$.

3. $f(x)\geqslant 3 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{3}}\leqslant\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x \geqslant \underbrace{-3\ln\dfrac{1}{5}}_{x_0}$. Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $3-f(x)$. On a :

x	0		x_0		20
$f''(x)$		+	0	–	

4.

x	0		x_0		20
$f'(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	

5. $x_0 \approx 4{,}82$. L'entier n_0 cherché est donc 5.

116 **1.** Voir fichier sur le site Math'*x*.

Pour le sens de variation, trois cas sont à distinguer selon que $m \in]-\infty\,;0[$, $m \in [0\,;e]$, $m>e$.

Pour la position par rapport à d, deux cas sont à distinguer selon que $m<0$, $m \geq 0$.

2. a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_m'(x)=1-mxe^{-x}$

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_m''(x)=me^{-x}(x-1)$. f_m' est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;1]$, strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$. $f_m'(1)=\dfrac{e-m}{e}$.

c. Si $m \in]0\,;e]$, $\dfrac{e-m}{e}>0$ donc $f_m'(x)>0$ car le minimum de f_m' est strictement positif.

d. f_m est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque $m \in]0\,;\mathrm{e}]$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_m(x) - x = m(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

Si $m < 0$, $f_m(x) - x > 0$ sur $]-\infty\,;-1[$, $f_m(x) - x < 0$ sur $]1\,;+\infty[$. $\mathscr{C}_m$ est donc au-dessus de d sur $]-\infty\,;-1[$, au-dessous de d sur $]1\,;+\infty[$, et coupe d en A $(-1\,;-1)$.

Si $m > 0$, $f_m(x) - x < 0$ sur $]-\infty\,;-1[$, $f_m(x) - x > 0$ sur $]1\,;+\infty[$. $\mathscr{C}_m$ est donc au-dessous de d sur $]-\infty\,;-1[$, au-dessus de d sur $]1\,;+\infty[$, et coupe d en A $(-1\,;-1)$.

117 **1. 2.** Voir fichier sur le site Math'*x*.

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ semble être la courbe cherchée.

3. Pour tout a réel, $f'(a) = g(a)$ et $g'(a) = f(a)$

$$x_M = \frac{(1+a)(g(a)-f(a))}{g(a)-f(a)} = 1+a$$

$y_M = g(a) + f(a) = \mathrm{e}^{1+a}$ donc M est un point de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

118 **1.** $f^2(0) = f'^2(0) - 1 = 0$ donc $f(0) = 0$.

2. Soit a un réel tel que $f'(a) = 0$.

On aurait alors $f^2(a) = -1$: impossible. Par suite, pour tout réel x, $f'(x) \neq 0$.

3. En dérivant les deux membres de l'égalité, on obtient :

$2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$

$\Leftrightarrow f''(x) = f(x)$ car $f'(x) \neq 0$.

4. a. $u = f' + f$; $u' = f'' + f' = f + f' = u$ et $u(0) = 1$.

b. Pour tout réel x, $u(x) = \mathrm{e}^x$.

5. a. $v = f' - f$; $v' = f'' - f' = f - f' = -v$.

b. $w(x) = v(-x)$ donc $w'(x) = -v'(-x) = v(-x) = w(x)$.

$w'(0) = 1$. Pour tout réel x, $w(x) = \mathrm{e}^x$ donc $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

6. $u - v = 2f$ donc $f = \dfrac{1}{2}(u - v)$.

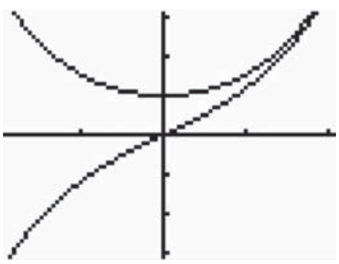
Par suite, pour tout réel, $f(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

119 **1. a.** Pour tout réel t, $ch(-t) = ch(t)$; $sh(-t) = -sh(t)$.

La courbe de la fonction ch admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, la courbe de la fonction sh admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.

b. Pour tout réel t, $sh'(t) = ch(t) > 0$. La fonction sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $t \geqslant 0$, $ch'(t) = sh(t) \geqslant 0$ car $sh(0) = 0$. La fonction ch est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c.



2. a. Ces propriétés s'obtiennent en utilisant les différentes propriétés de la fonction exp.

b. $ch(2a) = 2ch^2(a) - 1$.

120 **a.** Vrai (démonstration par récurrence).

b. Vrai (suite arithmétique de raison e^x).

c. Faux. La fonction u_n est décroissante sur $]-\infty\,;-n-1[$, croissante sur $]-n-1\,;+\infty[$.

d. Faux (au-dessous).

PROBLÈMES

121 **1.** $f(0) = 4$ d'où $a - 1 = 4 \Leftrightarrow a = 5$.

2. Pour $x \in [-8\,;8]$, $f(-x) = f(x)$. La courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

3.a. Pour $x \in [-8\,;8]$, $f'(x) = -\dfrac{0{,}2(\mathrm{e}^{0{,}2x} - \mathrm{e}^{-0{,}2x})}{2}$

soit $f'(x) = \dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-0{,}2x}(-\mathrm{e}^{0{,}4x} + 1)$.

b. $f'(x)$ est de même signe que $1 - \mathrm{e}^{0{,}4x}$.

$1 - \mathrm{e}^{0{,}4x} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0{,}4x} < 1 \Leftrightarrow 0{,}4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	-8		0		8
$f(x)$	$f(-8)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(8)$

4. $f(4) - 0{,}5 \approx 3{,}16$. Hauteur maximale autorisée : 3 m 16

122 **A. 1.** $f(0) = 3$; $f'(0) = -2$.

2. $f(0) = 1 + b \Leftrightarrow b = 2$.

3. a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x + a - 2\mathrm{e}^{-x}$.

b. $f'(0) = a - 1$

c. $f'(0) = -2 \Leftrightarrow a = -1$ donc, pour $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}$.

B. 1. 2. 3. Le signe de $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2$ est le même que celui de $\mathrm{e}^x - 2$. $\mathrm{e}^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2$		$-$	0	$+$	

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x}$

$f'(x)$ est de même signe que $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$3 - \ln 2$	$\nearrow$	

123 **1.** Voir fichier sur le site Math'*x*. La fonction f_k semble monotone pour k supérieur à 0,1 environ.

2. Pour x réel, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + k$;

$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$k - \mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	

Le signe de f_k' est donc constant (positif) si et seulement si $f_k'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow k \geqslant e^{-2}$.

124 **1. a.** Pour x réel, $f'(x) = -\dfrac{4e^x(e^{2x}+1) - 8e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2}$ d'où

$f'(x) = -\dfrac{-4e^{3x}+4e^x}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$.

b. $f'(x)$ est de même signe que $e^{2x} - 1$.

$e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $f(-x) = f(x)$ d'où le résultat.

3. A a pour coordonnées $(a\,;0)$.

$$f(a) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4c}{c^2+1} = 0 \Leftrightarrow c^2 - 4c + 1 = 0.$$

$c = e^a$ est donc solution de l'équation $2 - 4x + 1 = 0$ $(\Delta = 12)$. $c = 2 - \sqrt{3}$ ou $c = 2 + \sqrt{3}$

donc $a = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) < 0$ ou $a = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) > 0$.

On trouve donc $a = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

Remarque : l'abscisse de B est $\ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

125 **Partie 1 :** voir fichier sur le site Math'x.

Partie 2. A. 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -xe^x$ donc $g'(x)$ est de même signe que $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↗	2	↘

2. a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 1 \Leftrightarrow x < 1$.

b. $g(1) = 1 > 0\,; g(2) = 1 - e^2 < 0$. g est strictement décroissante sur $[1\,;2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1\,;2]$. $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

c. D'après la question 2. a., l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty\,;0]$. Puisque g est strictement décroissante sur $[2\,;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[2\,;+\infty[$.

d. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)e^\alpha = -1 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	

B. Pour $x \in \mathbb{R}$, $A'(x) = \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$. $A'(x)$ est donc de même signe que $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$A(x)$	↗	$A(\alpha)$	↘

C. 1. Aire (OPMQ) maximale $\Leftrightarrow$ A(x) maximale $\Leftrightarrow x = \alpha$

$A(\alpha) = \dfrac{4\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1} = 4(\alpha - 1)$.

$1{,}08 < A(\alpha) < 1{,}12$.

2. La droite (PQ) a pour coefficient directeur $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$. La tangente T en M à la courbe a pour coefficient directeur $f'(\alpha) = \dfrac{-4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2} = \dfrac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.

Les deux droites sont donc parallèles.

126 **1.** Voir fichier sur le site Math'x.

2. a. b. c. La distance BM semble minimale lorsque M a pour abscisse 0 environ. Au point M_0 obtenu, la droite d semble être la tangente à la courbe C.

3. a. $BM^2 = f(x) = (x-2)^2 + (e^x+1)^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

$f'(x) = 2(x-2) + 2e^x(e^x+1)$.

$f''(x) = 4e^{2x} + 2e^x + 2 > 0$.

f' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $f'(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	8	↗

b. Le point M_0 rendant la distance BM minimale a pour abscisse 0 et ordonnée 1. La distance minimale est donc $BM_0 = \sqrt{8}$.

c. La droite (BM_0) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-2;2)$ et la tangente T à C en M_0 a pour vecteur directeur $\vec{v}(1;1)$. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. D'où le résultat annoncé.

127 **A.** Le signe de H' indique les variations de H.

La courbe de H est représentée en traits pleins.

B. 1. Pour $x \geqslant 0$, $g'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$. Le signe de $g'(x)$ est donc celui de $1 - 2x^2$ (seule racine positive : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$).

x	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	↗	≈ 0,17	↘

2. a. $g(0) = -0{,}25\,; g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0{,}17; g(2) = -0{,}2$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, appliqué deux fois sur $[0\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$ et sur $[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;2]$, l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0\,;2]$.

b. $0{,}268 < \alpha < 0{,}269$ et $1{,}277 < \beta < 1{,}278$.

3.

x	0		α		β		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	0	−	

C. 1. Pour $x \geqslant 0$, $f'(x) = 4g(x)$.

2.

x	0	α	β	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f(\alpha)$ ↗	$f(\beta)$	↘

3. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\alpha^2} = \dfrac{1}{4\alpha}$ et $f(\alpha) = \dfrac{-1}{2\alpha} - \alpha + 3$.

$0{,}865 < f(\alpha) < 0{,}874$

128 Pour x réel, $f'(x) = (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x}$.

$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$ donc $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$

L'ordonnée de A vaut $f(-1) = \mathrm{e}$.

129 Étude de la fonction $f : t \mapsto 8{,}25t\mathrm{e}^{-t} - 1$.

Pour $t \geqslant 0$, $f'(t) = 8{,}25\mathrm{e}^{-t}(1-t)$ donc le signe de $f'(t)$ est celui de $1 - t$.

t	0	1	$+\infty$
$f(t)$	-1 ↗	$\approx 2{,}03$	↘

Le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, appliqué deux fois sur [0 ; 1] et sur [1 ; 2] permet de conclure. La fonction f s'annule deux fois en α et β.

Intervalle cherché : $[\alpha\,;\beta]$ avec α proche de 8 min et β proche de 3 h 18 min.

130 Soit M′ et A′ les projetés orthogonaux de M et A sur l'axe des abscisses. Pour $x \in [0\,;1]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Aire}(OAM) \\ &= \text{Aire}(OAA') - \text{Aire}(OMM') - \text{Aire}(MM'A'A) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}x - x - \mathrm{e}^x + 1) \end{aligned}$$

Pour $x \in [0\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e} - 1 - \mathrm{e}^x)$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \ln(\mathrm{e} - 1)$

x	0	$\ln(\mathrm{e}-1)$	1
$f(x)$	0 ↗	$\approx 0{,}106$	↘

L'aire du triangle est donc maximale pour le point M d'abscisse $x = \ln(\mathrm{e} - 1)$.

131 Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a et B le point de $\mathscr{C}'$ d'abscisse b en lesquels les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont une tangente commune. On a :

$$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ -af'(a) + f(a) = -bg'(b) + g(b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 1 \\ g(b) - f(a) = (b-a)f'(a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 1 \\ \mathrm{e}^{-b-1}(-3 - 2b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

132 Pour x réel, $f'(x) = (kax + a + kb)\mathrm{e}^{kx}$.

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(0) = -5 \\ f(0) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - ka + kb = 0 \\ a + kb = -5 \\ b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ k = \dfrac{1}{2} \\ b = 10 \end{cases}$$

133 Pour x réel, $f_a'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - a - x)$.

Le point M_a a donc pour abscisse $1 - a$ et pour ordonnée $m_a = \mathrm{e}^{a-1}$.

M_a appartient donc à la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.

134 Pour x réel, $f'(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{1-x}$. Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

$\mathrm{O} \in T \Leftrightarrow f(a) - af'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$

Deux solutions : $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

135 On peut conjecturer que ce ne sont que des zéros.

En résolvant l'inéquation $\dfrac{2\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 1} < 2 + 10^{-21}$, on trouve $x \geqslant 49$. La conjecture est donc vérifiée.

136 Pour x réel, $f'(x) = (P'(x) + 2P(x))\mathrm{e}^{2x-1}$.

Le polynôme $P' + 2P$ est de même degré que P donc il existe une fonction polynôme $Q = P' + 2P$ de même degré que P telle que $f'(x) = Q(x)\mathrm{e}^{2x-1}$.

137 Pour $x > 0$ et $y > 0$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

En posant $y = 1$, on a : $f(x) = f(x) + f(1)$ donc $f(1) = 0$.

$f(1) = f\left(x \times \dfrac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(2^n) = \underbrace{f(2) + \ldots + f(2)}_{n \text{ fois}} = nf(2)$.

De même, $f(x^p) = pf(x)$ $(p \in \mathbb{Z}^*)$.

Accompagnement personnalisé

2 Transformer des expressions

1. Un contre exemple suffit $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}} \neq \mathrm{e}\right)$.

2. a. $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$ **b.** $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$ **c.** $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

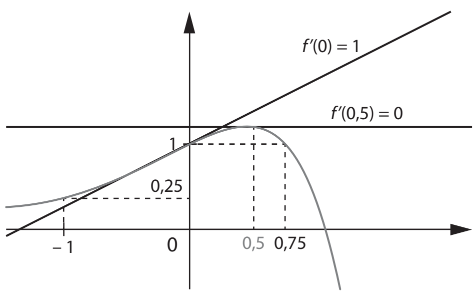
d. e. f. $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$ **g.** $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$

3. a. e^{x+1} **b.** $\mathrm{e}^x - 1$ **c.** $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 2}{\mathrm{e}^x}$ **d.** $\mathrm{e}^x - 1$

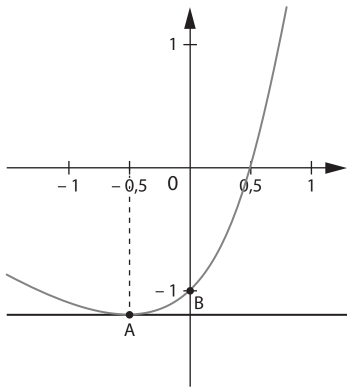
e. $(\mathrm{e}^x - 1)^2$ **f.** $\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x} + 1$

3 Lier graphique et algébrique

1.



2.



On dispose de deux égalités pour déterminer deux inconnues a et b.

Pour tout x réel, $f'(x) = (ax + a + b)e^x$

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f'(-0{,}5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Pour tout x réel, $f(x) = (2x - 1)e^x$.

4 Traiter une ROC

En donnant à y la valeur $(-x)$, on obtient :

$e^x e^y = e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$.

Puisque $e^x e^{-x} = 1$ alors $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

5 Étudier le signe d'une expression

1. a. Pour tout x réel, $5e^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{4}{5}\right)$		$+\infty$
$5e^x - 4$		$-$	0	$+$	

b. $f(x) = (x + 1)e^x$ est de même signe que $x + 1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

c. Posons $f(x) = xe^{-x} - 1$ alors $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ est de même signe que $(1 - x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(1)$	↘	

$f(1) = e^{-1} - 1 < 0$ donc $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. a. Méthode 2

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$e^x - 2$		$-$	0	$+$	

b. Méthode 1

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

c. Méthodes 1 et 2 $(f(x) = x(e^x - 2))$

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d. Méthode 1 : $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ (somme de 2 fonctions positives sur $\mathbb{R}$)

e. Méthodes 1 et 2

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

f. Méthode 2 $(f(x) = e^{2x}(2e^x - 1))$

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

g. Méthode 3

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(0)$	↗	

$f(0) = 2 > 0$ donc $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

i. Méthode 2

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\ln 3$		1		$+\infty$
$f(x)s$		$+$	0	$-$	0	$+$	

j. Méthode 3

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(-0{,}5)$	↘	

$f(-0{,}5) = e^{0{,}5} - 3 <$ donc $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

k. Méthode 3

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			$f(1)$		

$f(1) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ (nulle si $x = 1$).

6 Utiliser une fonction auxiliaire

1. Étape 1 : du signe de $g'(x)$, on déduit les variations de g.

Étape 2 : du sens de variation de $g(x)$, on déduit le signe de $g(x)$ (avec $g(0) = 0$).

Étape 3 : du signe de $g(x)$, on déduit le signe de $f'(x)$.

Étape 4 : du signe de $f'(x)$, on déduit le sens de variation de $f(x)$.

2. On ne peut pas déterminer le signe de $g(x)$ par une méthode « directe ».

3. Pour $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - e^x}$ et $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1 - e^x)^2}$ avec $g(x) = 1 - xe^x$ $(g'(x) = (-1 - x)e^x)$.

x	$-\infty$		-1		0
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\|$
$g(x)$		$-$	0	$-$	$\|$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|$
$f(x)$		$\searrow$			$\|$

7 Étudier des phénomènes d'évolution

1. a. Pour $t \geqslant 0$, $N'(t) = C(-0{,}012)e^{-0{,}012t} = -0{,}012N(t)$.

b. $C = 6 \cdot 10^{15}$

c. Soit f et g deux fonctions respectant les conditions proposées. La fonction $\frac{f}{g}$ est constante et égale à 1.

d. Pour $t \geqslant 0$, $N(t) = 6 \cdot 10^{15} e^{-0{,}012t}$

2. En adoptant la même démarche que dans la question précédente, la fonction f cherchée est telle que, pour $t \geqslant 0$, $f(t) = C\, e^{kt}$, où C est une constante réelle égale à $f(0)$.

CHAPITRE 4

Suites numériques

Pour reprendre contact

1 Avec les graphiques

1. $u_0 = -1$; $u_1 \approx 1$; $u_2 \approx 1{,}8$.

2. Il semble que la suite (u_n) soit croissante et converge vers 2.

3. Pour les calculatrices Casio, il faut réécrire la relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

2 Avec l'étude des variations

a. Cette suite est croissante.
b. Cette suite est décroissante.
c. Cette suite est croissante.
d. Cette suite est décroissante.
e. Cette suite est croissante.
f. Cette suite est croissante.

3 Avec le calcul de sommes

a. $U_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$

b. $V_n = 2\sum_{k=1}^{n} k + 3n = n^2 + 4n$

c. $W_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \ldots\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

d. $T_n = -2\sum_{k=0}^{n} k + 3\sum_{k=0}^{n} 5^k = -n(n+1) + \dfrac{3}{4}(5^{n+1} - 1)$

4 Avec l'algorithmique

```
Affecter 1 à n
    Tant que n^4 + 2√n < 10^4 Faire
        Affecter n+1 à n
    FinTantque
Afficher n
```

5 Avec les ordres de grandeur

a. 10^{24} **b.** 3×10^{12} **c.** 10^{24} **d.** $\dfrac{10^{36}}{10^{12}} = 10^{24}$ **e.** $\dfrac{3 \times 10^{12}}{10^{24}} = 3 \times 10^{-12}$ **f.** 3

Activité 1. Limite infinie ou pas ?

A. 1. Réponse c **2.** Réponse b **3.** Réponse c **4.** Réponse b

B. Comme $u_n \geqslant n - 4$. on a $u_n \in]100 \,;+\infty[$ pour tout $n > 104$.

De même $u_n \in]1\,000\,000 \,;+\infty[$ pour tout $n > 1\,000\,004$.

Activité 2. Limite finie d'une suite

1. Voir fichier sur le site Math'x.

2. Sur le logiciel, on trouve que : $u_n \in]-0{,}1\,;\ 0{,}1[$ pour $n \geqslant 6$;
$u_n \in]-0{,}05\,;\ 0{,}05[$ pour $n \geqslant 9$; $u_n \in]-0{,}01\,;0{,}01[$ pour $n \geqslant 14$.

3. On obtient les mêmes résultats qu'à la question **2.**

4. $u_n \in]-0{,}1\,;0{,}1[$ pour $n \geqslant 9$; $u_n \in]-0{,}05\,;0{,}05[$ pour $n \geqslant 12$; $u_n \in]-0{,}01\,;0{,}01[$ pour $n \geqslant 21$.

Activité 3. Tracé de type « web » ou « escalier »

2. a. Son abscisse est u_1.

b. Voir fichiers sur le site math'x.

c. Le tracé se poursuivrait de façon analogue, « en escalier », sans dépasser l'intersection entre la courbe et la droite *d*.
On conjecture que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 2.

3. Pour $u_0 = 6$, on conjecture que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers 2.

TP1. Suites arithmético-géométriques

A. Voir fichier sur le site Math'x.

B. 1. On conjecture que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 4. Cette conjecture ne résiste pas quand on modifie u_0, par exemple pour $u_0 = 6$, on conjecture que la suite (u_n) est décroissante.

2. *On peut émettre des conjectures, sans chercher l'exhaustivité.*
La suite semble :

a. croissante et convergente quand $0 < a < 1$ et u_0 est inférieur à l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = f(x)$ et $y = x$.

b. Décroissante et convergente quand $0 < a < 1$ et u_0 est supérieur à l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = f(x)$ et $y = x$.

c. Convergente pour $-1 < a < 1$.

C. 1. Si $a = 1$, on a $u_{n+1} = u_n + b$ pour tout n donc la suite (u_n) est arithmétique de raison b.
On a donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nb$.
Si $b = 0$, la suite est constante donc convergente vers u_0.
Si $b > 0$, la suite diverge vers $+\infty$.
Si $b < 0$, la suite diverge vers $-\infty$.

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{b}{1-a} = au_n + b - \dfrac{b}{1-a} = au_n - \dfrac{ab}{1-a} = av_n$ pour tout n.

b. $v_n = a^n v_0 = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)$ donc $u_n = v_n + \dfrac{b}{1-a} = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$ pour tout n.

3. Si $-1 < a < 1$, a^n a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$ donc (u_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a}$ (qui est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équation $y = f(x)$ et $y = x$).
Si $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$ (et $a \neq 1$), la suite (u_n) est constante donc converge vers $\dfrac{b}{1-a}$.
Dans les autres cas, la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou n'a pas de limite.

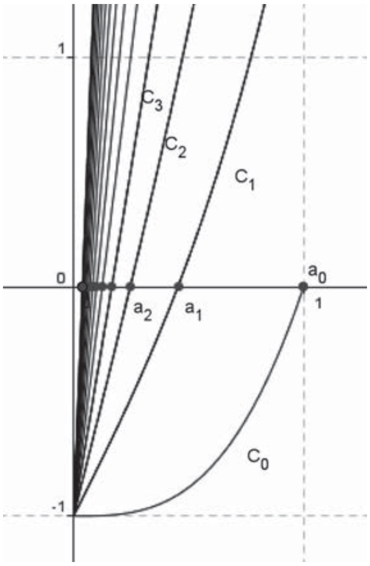
TP2. Suite de solutions d'équations

1. f_n est dérivable donc continue et $f_n'(x) = 3x^2 + 2n$.

$f_n'(x) > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

De plus $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 2n$ donc 0 appartient à $[f_n(0); f_n(1)]$ et l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0 ; 1]$.

2. On trace la courbe représentant f_n pour $n = 0, 1, 2, 3$, etc.



Il semble, d'après le graphique ci-dessus, que (A), (C) et (E) soient vraies, (B) fausse.

On relève différentes valeurs numériques :

n	10	20	50
$a_n \approx$	0,05	0,025	0,01
$2na_n \approx$	1	1	1

On conjecture que (D) est fausse.

3. • Pour l'affirmation (A) : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 2x$ donc $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ sur $[0 ; 1]$.

C_{n+1} est bien au-dessus de C_n.

• Pour l'affirmation (B) : $a_0 = 1$ car $f_0(x) = x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

En revanche pour $n = 1$, $f_n(1) = 1$ donc $a_1 < 1$.

La suite (a_n) ne peut donc pas être croissante.

On peut même montrer qu'elle est décroissante :

pour tout n, $f_{n+1}(a_n) \geqslant f_n(a_n)$ donc $f_{n+1}(a_n) \geqslant 0$ et par conséquent $a_{n+1} \in [0 ; a_n]$, donc $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.

• Pour l'affirmation (C) : la suite est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite qui appartient à $[0 ; 1]$.

• Pour l'affirmation (E) : on sait que $f_n(a_n) = 0$ c'est-à-dire $a_n^3 + 2na_n - 1 = 0$.

Si la limite ℓ de la suite (a_n) n'est pas nulle, $a_n^3 + 2na_n - 1$ tend vers $+\infty$ car $\ell \geqslant 0$. Ce n'est pas possible donc c'est que $\ell = 0$.

• Pour l'affirmation (D) : de $2na_n = 1 - a_n^3$ on déduit que la limite de $2na_n$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à 1.

Donc l'affirmation (C) est fausse.

TP3. Modèles d'évolution de populations

A. La suite (p_n) est dans ce cas une suite géométrique de raison 1,1.

Donc $p_n = 1{,}1^n p_0 = 1{,}1^n \times 0{,}27$.

La suite (p_n) divergerait alors vers $+\infty$ car $1{,}1 > 1$ et $0{,}27 > 0$ ce qui est impossible puisque par énoncé, $P_n \leqslant 1\,000$ donc $p_n \leqslant 1$.

Ce modèle n'est donc pas réaliste.

B. 1. À l'aide de ces graphiques, on peut représenter mentalement les premiers termes de la suite (p_n) sur l'axe des abscisses.

Dans le cas $r = 0{,}9$ on peut conjecturer que la suite (p_n) décroît et converge vers 0.

Dans le cas $r = 2$ on peut conjecturer que la suite (p_n) croît et converge vers 0,5.

2. Cas $r = 0{,}9$

a. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n \leqslant r^n$.

Initialisation : pour $n = 0$, $p_0 = 0{,}27$ et $r^0 = 1$ donc on a bien $0 \leqslant p_n \leqslant r^n$ pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant r^n$.

Montrons que : $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant r^{n+1}$.

$p_{n+1} = rp_n(1 - p_n)$ avec $0 \leqslant p_n \leqslant r^n < 1$ car $r^n = 0{,}9^n < 1$.

En multipliant par r positif : $0 \leqslant r\ p_n \leqslant r\ r^n$ soit $0 \leqslant rp_n \leqslant r^{n+1}$.

En multipliant membre à membre par $0 \leqslant 1 - p_n \leqslant 1$, on obtient

$0 \leqslant rp_n(1 - p_n) \leqslant r^{n+1}$ soit $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant r^{n+1}$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant r^n$.

b. Comme $0 < r < 0{,}9$, la suite (r^n) converge vers 0.

Or pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant r^n$.

Par le théorème « des gendarmes », on en déduit que la suite (p_n) converge vers 0.

On se dirige donc vers l'extinction de cette population.

3. Cas $r = 1$

a. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant 1$.

Initialisation : $p_0 = 0{,}27$ donc on a bien $0 \leqslant p_0 \leqslant 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant 1$.

Montrons que $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant 1$.

$p_{n+1} = p_n(1 - p_n)$ avec $0 \leqslant p_n \leqslant 1$ donc aussi $0 \leqslant 1 - p_n \leqslant 1$.

En multipliant membre à membre les deux encadrements, on obtient

$0 \leqslant p_n(1 - p_n) \leqslant 1$ soit $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant 1$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant 1$.

b. $p_{n+1} - p_n = p_n[(1 - p_n) - 1] = -p_n^2$. Donc $p_{n+1} - p_n \leqslant 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. La suite (p_n) est donc décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

d. Si la suite (p_n) converge vers ℓ, alors p_{n+1} tend vers $\ell(1 - \ell)$ quand n tend vers $+\infty$.

Or p_{n+1} tend aussi vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Par unicité de la limite, $\ell = \ell(1 - \ell)$.

L'équation, $\ell = \ell(1 - \ell)$ a deux solutions 0 et 1.

Or la suite (p_n) étant décroissante avec $p_0 = 0{,}27$, on a pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n \leqslant 0{,}27$ donc $\ell \leqslant 0{,}27$.

Par conséquent, $\ell = 0$. On prévoit ici aussi l'extinction de cette population.

4. Cas où $1 < r \leqslant 2$

a. Montrons que la suite (p_n) est bornée puis qu'elle est monotone.

- Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{2}$

Initialisation : $p_0 = 0{,}27$ donc on a bien $0 \leqslant p_0 \leqslant \frac{1}{2}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{2}$.

Comme $r > 0$, la fonction f définie par $f(x) = -rx^2 + rx$ est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, donc $f(0) \leqslant f(p_n) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}r$.

Comme $1 < r \leqslant 2$, on a $\frac{1}{4}r \leqslant \frac{1}{2}$ et, *a fortiori*, $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{2}$.

- Montrons par récurrence que la suite (p_n) est monotone.

On distingue deux cas selon que $p_1 \leqslant p_0$ ou $p_1 \geqslant p_0$.

Si $p_1 \leqslant p_0$, montrons que pour tout n, $p_{n+1} \leqslant p_n$	Si $p_1 \geqslant p_0$, montrons que pour tout n, $p_{n+1} \geqslant p_n$
Initialisation : elle est vérifiée dans les deux cas.	
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $p_{n+1} \leqslant p_n$. Alors $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc par croissance de f sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $p_{n+2} \leqslant p_{n+1}$. Conclusion : la suite (p_n) est décroissante.	Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $p_{n+1} \geqslant p_n$. Alors $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc par croissance de f sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $p_{n+2} \geqslant p_{n+1}$. Conclusion : la suite (p_n) est croissante.

On a donc établi que la suite (p_n) est soit croissante majorée soit décroissante minorée. On en déduit que la suite (p_n) converge.

Détermination de la limite : soit ℓ la limite de la suite (p_n). Par un raisonnement analogue à celui tenu en question **3.d.**, cette limite vérifie $\ell = r\ell(1-\ell)$ c'est-à-dire $\ell(1-r-r\ell) = 0$. On en déduit que $\ell = 0$ ou $\ell = 1-\frac{1}{r}$.

Montrons que la limite de la suite est $1-\frac{1}{r}$.

- Si $p_1 \geqslant p_0$, la suite (p_n) est croissante donc pour tout n, $p_n \geqslant 0{,}27$.

La limite est donc supérieure à 0,27 donc ne peut pas être nulle. On a donc $\ell = 1-\frac{1}{r}$

- Si $p_1 < p_0$ on peut montrer par récurrence (*) que pour tout n de $\mathbb{N}$, $1-\frac{1}{r} \leqslant p_n$.

Par conséquent la limite ℓ est supérieure ou égale à $1-\frac{1}{r}$ donc ne peut pas être nulle pour $1 < r$. Donc ici aussi $\ell = 1-\frac{1}{r}$.

(*) *Démonstration par récurrence du fait que pour tout n,* $p_n \geqslant 1-\frac{1}{r}$.

Initialisation : $p_1 \leqslant p_0 \Leftrightarrow r(1-p_0) \leqslant 1 \Leftrightarrow 1-p_0 \leqslant \frac{1}{r} \Leftrightarrow p_0 \geqslant 1-\frac{1}{r}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $p_n \geqslant 1-\frac{1}{r}$.

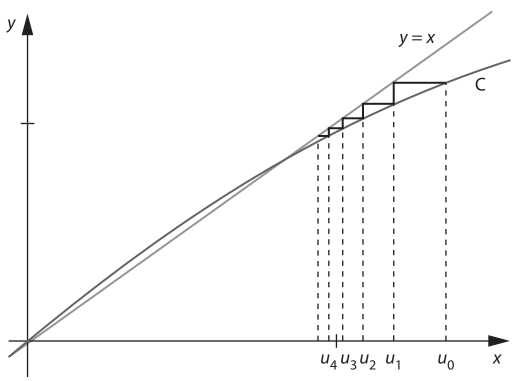
Alors on a $0 \leqslant 1-\frac{1}{r} \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{2}$ et comme f est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ on en déduit que $f(0) \leqslant f\left(1-\frac{1}{r}\right) \leqslant f(p_n) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ d'où $1-\frac{1}{r} \leqslant p_{n+1}$ car $f\left(1-\frac{1}{r}\right) = 1-\frac{1}{r}$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n \geqslant 1-\frac{1}{r}$.

Remarque : les deux cas mis en évidence précédemment peuvent se produire pour $1 < r \leqslant 2$ puisque $p_1 < p_0 \Leftrightarrow r < \frac{100}{73} \approx 1{,}36986$ et $p_1 \geqslant p_0 \Leftrightarrow r \geqslant \frac{100}{73}$.

Pour $r = 2$, on a ainsi conjecturé que la suite était croissante et convergente vers 2.

Pour $r = 1{,}2$ par exemple, la suite est décroissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection (autre que l'origine du repère) de la courbe C représentant f et la droite $d : y = x$, c'est-à-dire $1-\frac{1}{r}$.



b. En fait si $r = \frac{100}{73}$, on a $p_0 = 0{,}27 = 1-\frac{1}{r}$ et par une récurrence immédiate, comme $f\left(1-\frac{1}{r}\right) = 1-\frac{1}{r}$, on montre que la suite (p_n) est constante.

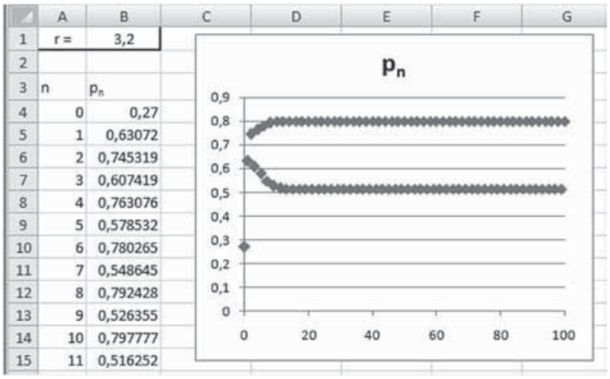
Dans ce cas, la population est donc constante, de 270 pies bavardes.

Si $1 < r < \dfrac{100}{73}$, la population décroît et tend à se stabiliser vers $\left(1-\dfrac{1}{r}\right)$ milliers d'individus.

Si $\dfrac{100}{73} < r \leqslant 2$,la population croît et tend à se stabiliser aussi vers $\left(1-\dfrac{1}{r}\right)$ milliers d'individus.

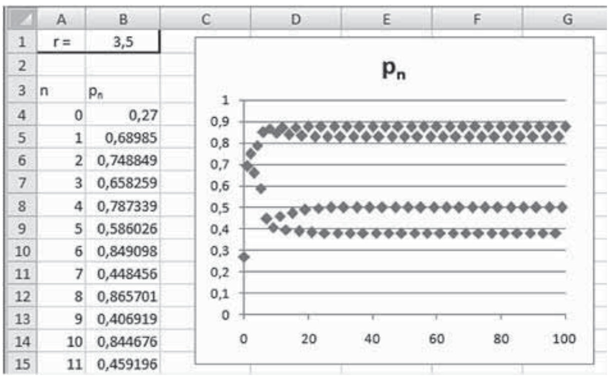
Pour aller plus loin

Avec un tableur, par exemple, on obtient :



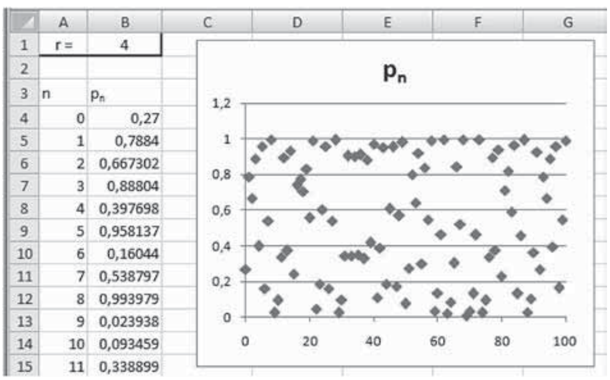
	A	B
1	r =	3,2
2		
3	n	p_n
4	0	0,27
5	1	0,63072
6	2	0,745319
7	3	0,607419
8	4	0,763076
9	5	0,578532
10	6	0,780265
11	7	0,548645
12	8	0,792428
13	9	0,526355
14	10	0,797777
15	11	0,516252

La population semble se stabiliser en oscillant sur un cycle de deux ans : environ 500 pies puis 800 pies l'année suivante et ainsi de suite.



	A	B
1	r =	3,5
2		
3	n	p_n
4	0	0,27
5	1	0,68985
6	2	0,748849
7	3	0,658259
8	4	0,787339
9	5	0,586026
10	6	0,849098
11	7	0,448456
12	8	0,865701
13	9	0,406919
14	10	0,844676
15	11	0,459196

La population semble de même se stabiliser en oscillant sur un cycle de quatre ans entre environ 380 pies puis 830, 500 et 875 pies et ainsi de suite.



	A	B
1	r =	4
2		
3	n	p_n
4	0	0,27
5	1	0,7884
6	2	0,667302
7	3	0,88804
8	4	0,397698
9	5	0,958137
10	6	0,16044
11	7	0,538797
12	8	0,993979
13	9	0,023938
14	10	0,093459
15	11	0,338899

L'évolution paraît osciller irrégulièrement, de façon « chaotique » entre les deux extrêmes 0 et 1.

Résumons nos découvertes : nous venons de constater que, selon la valeur du taux de croissance effectif d'une population, le nombre d'individus de cette population, par périodes, peut :

- tendre vers 0 ;
- tendre vers une valeur stable ;

- osciller entre 2, 4, etc., valeurs différentes ;
- prendre n'importe quelle valeur (phénomène chaotique).

Feigenbaum a passé un doctorat en physique des particules en 1970 au MIT avant de réorienter ses recherches. Il se tourna en effet quand il fut engagé à Los Alamos en 1975 vers les nouvelles idées qui émergeaient à cette époque, concernant le comportement complexe de systèmes simples, parfois de simples fonctions itérées plusieurs fois, et déterministes en général. Leur évolution semblait aléatoire, due au seul hasard.

C'était le renouveau scientifique autour de ce qu'on appelle maintenant le « chaos » qui se mettait en place.

Pour en savoir plus, chercher sur Internet : Feigenbaum (diagramme, constante) ou logistique.

Une adresse par exemple : http://www.apsq.org/sautquantique/telechargement/chaos_mathematica.pdf

TP4. Des modèles mathématiques en médecine

A. 1. Pour tout n, $u_{n+1} = 2u_n$ puisque entre n temps de doublement et $n+1$ temps de doublement, le nombre de cellules a doublé.

La suite (u_n) est géométrique de raison 2.

De plus $u_0 = 1$ puisque le cancer début par la production d'une cellule.

Donc $u_n = 2^n$.

2. a. On cherche n tel que $u_n \geqslant 10^9$ c'est-à-dire $2^n \geqslant 10^9$.

À l'aide d'une table de valeurs sur la calculatrice on trouve que le plus petit entier n tel que $2^n \geqslant 10^9$ est $n = 30$.

n	2^n
28	268435456
29	536870912
30	1073741824
31	2147483648

La tumeur est donc bien détectable au bout de 30 temps de doublement.

b. Ceci correspond à 30 fois deux semaines soit 60 semaines.

3. a. On sait que pour tout $a > 0$, $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$.

Donc $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$. Par conséquent, $e^{\ln 2} = 2$.

Alors $2^n = (e^{\ln 2})^n = e^{n \ln 2}$.

À la calculatrice, $\ln 2 \approx 0{,}693$ à 10^{-3} près.

b. On remarque que $u_n = f(n)$ pour n entier d'après la question **a.**

$f(x) \geqslant 10^6 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} \geqslant 10^6 \Leftrightarrow x \ln 2 \geqslant \ln 10^6 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\ln 10^6}{\ln 2}$.

Le résidu tumoral est $u_p = 10^3$.

On cherche m tel que $u_{p+m} \geqslant 10^9$.

Or $u_{p+m} = 2^{p+m} = u_p 2^m = 10^3 \cdot 2^m$.

Par conséquent $u_{p+m} \geqslant 10^9 \Leftrightarrow u_m \geqslant 10^6 \Leftrightarrow f(m) \geqslant 10^6$.

$\dfrac{\ln 10^6}{\ln 2} \approx 19{,}93$ donc il faut prévoir un examen au bout de 20 semaines.

B. 1. Dans le modèle exponentiel, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ce qui contredit la stabilisation vers une taille maximale.

2. a. On conjecture que la suite (x_n) est croissante et converge vers 10^{12}.

Le paramètre α semble agir sur la croissance de la suite, plus ou moins rapide.

L'allure de la représentation graphique au départ est assez semblable à celle de la **partie A**.

En revanche dans ce modèle, la croissance ralentit à partir d'un moment et la suite finit par converger ce qui n'était pas le cas dans la **partie A**.

3. a. On a dans ce cas $x_0 = 10^6$ et $x_1 = 1\,020\,215$, soit $2 \times 10^6 - 10^{12} e^{\alpha \ln\left(\frac{10^6}{10^{12}}\right)} = 1\,020\,215$

D'où $e^{\alpha \ln(10^{-6})} = 979\,785 \times 10^{-12}$ équivaut à $\alpha \ln(10^{-6}) = \ln(979\,725 \times 10^{-12})$ d'où $\alpha \approx 1{,}0015$ à 10^{-4} près.

b. Algorithme

Entrée : Saisir N
Initialisation : a prend la valeur 1,0015
x prend la valeur 1
n prend la valeur 0
Traitement : Tant que x < N Faire
x prend la valeur $2x - 10^{12}\, e^{a\ln\left(\frac{x}{10^{12}}\right)}$
n prend la valeur n+1
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

c. On fait tourner l'algorithme avec N = 10^9. On obtient comme affichage 945.

Ceci signifie qu'il faut 945 fois 15 jours, c'est-à-dire 14 175 jours soit environ 38 ans et 10 mois pour que la tumeur soit formée de 10^9 cellules.

TP5. Des ressemblances trompeuses

1. $OA_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc par le théorème de Pythagore,

$$A_nA_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Par conséquent, pour $n \geqslant 1$, $L_n = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ soit $L_n = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

On en déduit que la suite (L_n) a pour limite $\sqrt{5}$.

2. $OB_n = \frac{1}{n+1}$ d'où $B_nB_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Les deux spirales se ressemblent et on peut être tenté de conjecturer un comportement asymptotique de L'_n analogue à celui de L_n, donc la convergence de (L'_n).

3. a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2} \geqslant \frac{1}{(n+1)^2}$. Donc $B_nB_{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$.

Pour $n \geqslant 1$, $L'_n = B_0B_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-1}B_n$ donc $L'_n \geqslant \frac{1}{0+1}+\frac{1}{1+1}+\ldots+\frac{1}{n-1+1}$, c'est-à-dire $L'_n \geqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

b. $h_{2n} - h_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

C'est une somme de n termes dont le plus petit est $\frac{1}{2n}$, donc $h_{2n} - h_n \geqslant n \times \frac{1}{2n}$. On a donc établi que $h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}$.

c. On applique l'inégalité $h_{2k} - h_k \geqslant \frac{1}{2}$ à :

$k = 2 : h_4 - h_2 \geqslant \frac{1}{2}$

$k = 4 : h_8 - h_4 \geqslant \frac{1}{2}$

$k = 8 : h_{16} - h_8 \geqslant \frac{1}{2}$

$k = 16 : h_{32} - h_{16} \geqslant \frac{1}{2}$

$\vdots$

$k = 2^{n-1} : h_{2^n} - h_{2^{n-1}} \geqslant \frac{1}{2}$

En sommant membre à membre, et en simplifiant, on obtient : $h_{2^n} - h_2 \geqslant \frac{1}{2} \times (n-1)$.

d. On a par la question précédente $h_{2^n} \geqslant \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + h_2$ où $h_2 = 1 + \frac{1}{2}$ donc $h_{2^n} \geqslant \frac{1}{2}n + 1$.

Comme $\frac{1}{2}n + 1$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, h_{2^n} dépassera n'importe quel réel A donné à condition de prendre n assez grand. Donc la suite (h_n) n'est pas majorée.

La suite (h_n) est croissante car pour tout $n \geqslant 1$, $h_{n+1} - h_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$.

Étant croissante et non majorée, la suite (h_n) diverge vers $+\infty$.

Comme $L'_n \geqslant h_n$, on en déduit que L'_n diverge aussi vers $+\infty$.

La ressemblance entre les deux spirales est donc trompeuse.

TP6. Le problème de Bâle

1. Voir fichier sur le site math'x.

On peut conjecturer qu'elle converge vers une limite proche de 1,65.

2. Voir fichier sur le site Math'x.

On conjecture que la suite (u_n) est croissante et la suite (u'_n) décroissante.

3. a. Pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, positif, donc la suite (u_n) est croissante.

D'autre part $u'_{n+1} - u'_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$ donc $u'_{n+1} - u'_n \leqslant 0$.

La suite (u'_n) est donc décroissante.

b. De la décroissance de (u'_n) on déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $u'_n \leqslant u'_1$.
Or pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant u'_n$ donc $u_n \leqslant u'_1$, c'est-à-dire $u_n \leqslant 2$.
La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2.
On en déduit qu'elle converge vers une limite ℓ (et que $\ell \leqslant 2$).

c. La suite (u_n) est croissante de limite ℓ donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \ell$.
Par théorème d'opération, u'_n tend aussi vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.
La suite (u'_n) est donc décroissante de limite ℓ donc pour tout $n \geqslant 1$, $\ell \leqslant u'_n$.
Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \ell \leqslant u'_n$.
L'encadrement de ℓ ainsi obtenu est de longueur $u'_n - u_n = \frac{1}{n}$.

On obtient donc un encadrement de longueur 10^{-6} pour $n = 10^6$.

Donc $u_{10^6} \leqslant \ell \leqslant u'_{10^6}$ est un encadrement de ℓ à 10^{-6} près.

Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 $(\sqrt{n})$, (n^2), (e^n)

2 $(-\sqrt{n})$, $(-n^2)$, $(-e^n)$

3 **a.** décroissante **b.** croissante
c. non monotone **d.** décroissante
e. décroissante **f.** croissante

4 **a.** Limite : 0 **b.** Limite : $+\infty$
c. Limite : 0 **d.** Limite : $-\infty$
e. Limite : 0 **f.** Limite : $+\infty$

5 **a.** $+\infty$ **b.** $+\infty$ **c.** $+\infty$
d. 0 **e.** $+\infty$ **f.** 1

6 **a.** Suite croissante convergeant vers 2.
b. Suite croissante convergeant vers 2.
c. Suite décroissante convergeant vers 2.
d. Suite constante.
e. Suite croissante convergeant vers 2.
f. Suite décroissante convergeant vers 2.

7 Si $u_0 = \alpha$ ou β : suite constante.

Si $u_0 < \alpha$: suite croissante, convergeant vers α.

Si $\alpha < u_0 < \beta$: suite décroissante convergeant vers α.

Si $u_0 > \beta$: suite divergeant vers $+\infty$.

ENTRAÎNEMENT

8 **a.** Suite croissante car pour tout n de $\mathbb{N}$,
$0 \leqslant n < n+1$ donc $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$.

b. Suite croissante car pour tout $n \geqslant 1$,

$0 < n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$

d'où $2-\frac{1}{n} < 2-\frac{1}{n+1}$.

c. Suite de la forme (q^n) avec $q > 1$ donc croissante.

d. Suite $\left(\left(\frac{1}{e}\right)^n\right)$ avec $0 < \frac{1}{e} < 1$ donc décroissante.

9 **a.** $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - n - 1 - 2^n + n = 2^{n+1} - 2^n - 1$
$= 2^n - 1.$

Pour tout $n \geqslant 0$, $2^n \geqslant 1$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

La suite est croissante.

b. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4n - 4 + 3 - n^2 + 4n - 3 = 2n - 3$.

Pour tout $n \geqslant 2$, $2n - 3 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, u_n est strictement positif.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{3^n} = \frac{3n}{n+1}$. Or $3n > n+1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{2}$.

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et comme $u_n > 0$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est croissante.

d. $u_0 = 1$, $u_1 = -0{,}5$, $u_2 = 0{,}64$ donc $u_1 < u_0$ mais $u_2 > u_1$.

La suite (u_n) n'est pas monotone.

10 **a.** Pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$ positif.

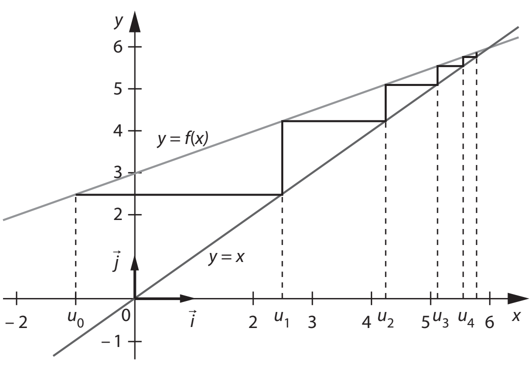
La suite (u_n) est donc croissante.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+3}$.

Donc si n est pair, $u_{n+1} - u_n < 0$ et si n est impair, $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) n'est pas monotone.

11 **1.**



2. ① Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = -1$ et $u_1 = f(u_0) = 2{,}5$. Donc $u_0 < u_1$.

② Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n < u_{n+1}$.

La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(u_n) < f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_{n+2}$.

③ Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante (et même strictement croissante).

12 **1.** À l'aide des premiers termes (par exemple obtenus sur une calculatrice), on conjecture que la suite est croissante.

2. Montrons par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

① Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $u_1 = e^0 = 1$. Donc $u_0 \leqslant u_1$.

② Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant u_{n+1}$.

La fonction exp étant croissante sur $\mathbb{R}$, $e^{u_n} \leqslant e^{u_{n+1}}$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

③ Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

13 Trois minorants : – 1, – 2, – 100

Trois majorants : 2, 4, 10

14 **a.** Pour tout $n \geqslant 1$:

$1 \leqslant n \Rightarrow 1 \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow -1 \leqslant -\frac{1}{n}$ d'où $1 \leqslant u_n$.

De plus $\frac{1}{n}$ est positif donc $u_n \leqslant 2$.

Donc $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \geqslant 1$.

b. Pour tout $n \geqslant 0$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

15 **a.** Solution 1

$-1 \leqslant \frac{3-n}{2+n} \leqslant 2 \Leftrightarrow -2-n \leqslant 3-n \leqslant 4+2n$ car

$n+2 > 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant 3 \leqslant 3n+4$ en ajoutant n.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a bien $-2 \leqslant 3 \leqslant 4+3n$ donc aussi $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Solution 2

$u_n = -1 + \frac{5}{2+n}$. Pour $n \geqslant 0$,

- $0 \leqslant \frac{5}{2+n}$ car 5 et $2+n$ sont positifs.
- $2+n \geqslant 2$ donc $\frac{5}{2+n} \leqslant \frac{5}{2}$.

Par suite $-1 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}$ donc *a fortiori* $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$:

- $u_n \geqslant 0$ car u_n est positif de façon évidente.
- De plus $n \geqslant 1 \Rightarrow n^2 \geqslant 1 \Rightarrow \frac{3}{n^2} \leqslant 3$.

Donc $u_n \leqslant \sqrt{1+3}$ soit $u_n \leqslant 2$.

16 Affirmation vraie.

En effet, pour tout n de $\mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1$.

17 Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

① <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 = 0$. Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$.

② <u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Alors $0 \leqslant u_n^2 \leqslant 4$ donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{u_n^2}{8} \leqslant 0$ et par suite,

$\dfrac{3}{2} \leqslant -\dfrac{u_n^2}{8} + 2 \leqslant 2$. *A fortiori*, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

③ <u>Conclusion</u> : pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 2.

18 **1.** Minorant : 0 ; majorant : 2.

2. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

① <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 = 0$. Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$.

② <u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Alors $1 \leqslant u_n + 1 \leqslant 3$ donc $1 \geqslant \dfrac{1}{u_n + 1} \geqslant \dfrac{1}{3}$ et par suite, $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{2}{u_n + 1} \leqslant 2$.

A fortiori, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

③ <u>Conclusion</u> : pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$

19 **1.** On conjecture que la limite est $+\infty$.

2. Pour n dans $\mathbb{N}$, $u_n > A \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{2}(A + 5)$.

3. Soit A un réel donné. Soit n_0 le plus petit entier positif ou nul qui soit supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2}(A + 5)$.

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n > A$.

La suite a donc pour limite $+\infty$.

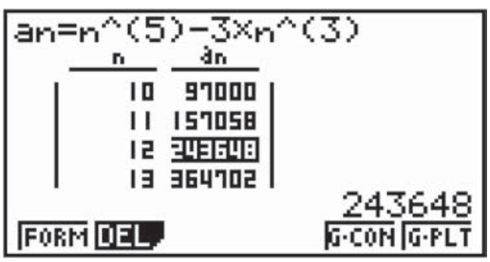
20 **1.** Pour n dans $\mathbb{N}$, $u_n < A \Leftrightarrow n > -\dfrac{1}{4}(A + 1)$.

2. Soit A un réel donné. Soit n_0 le plus petit entier positif ou nul qui soit supérieur ou égal à $-\dfrac{1}{4}(A + 1)$.

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n < A$.

La suite a donc pour limite $-\infty$.

21 **1.** On conjecture pour limite $+\infty$.



2. Pour $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant n^3 \Leftrightarrow n^5 - 3n^3 \geqslant n^3 \Leftrightarrow n^3 - 3 \geqslant 1$
$\Leftrightarrow n^3 \geqslant 4$.

Pour $n \geqslant 2$, $n^3 \geqslant 8$, donc on a bien $u_n \geqslant n^3$.

Soit A un réel donné.

On sait que la suite (n^3) a pour limite $+\infty$.

Il existe donc un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $n^3 > A$.

Par conséquent pour tout $n \geqslant n_0$ et $n \geqslant 2$, on a $u_n > A$.

La suite (u_n) a donc pour limite $+\infty$.

3.

ENTRÉE : Saisir a
INITIALISATION : n←0
TRAITEMENT : Tant que n^5 – 3n^3 ⩽ a Faire
n←n+1
Fin Tant que
SORTIE : Afficher n

22 Soit A un réel.

On sait que la suite (n^2) a pour limite $+\infty$.

Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $n^2 > A$.

Soit $n_1 = \max(100, n_0)$.

Alors pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n = n^2$ et donc $u_n > A$.

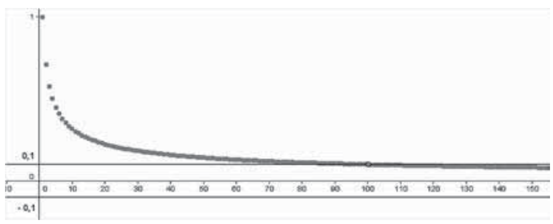
La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

23 **1. a.** $u_n \in]-0{,}1 ; 0{,}1[\Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \Leftrightarrow n > 100$.

b. $u_n \in]-0{,}01 ; 0{,}01[\Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}01 \Leftrightarrow n > 10\,000$.

c. $u_n \in]-10^{-6} ; 10^{-6}[\Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 10^{12}$.

2.



3. Soit $\varepsilon > 0$.

$u_n \in]-\varepsilon ; \varepsilon[\Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^2$.

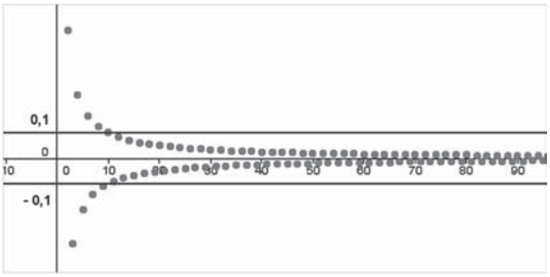
Tout intervalle ouvert contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, donc la suite (u_n) converge vers 0.

24 **1. a.** $u_n \in]-0{,}1 ; 0{,}1[\Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{n} < 0{,}1 \Leftrightarrow n > 10$.

b. $u_n \in]-0{,}01 ; 0{,}01[\Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{n} < 0{,}01 \Leftrightarrow n > 100$.

c. $u_n \in]-10^{-6} ; 10^{-6}[\Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{n} < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 10^6$.

2.



3. Soit ε > 0.

$u_n \in]-\varepsilon\,;\varepsilon[\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Tout intervalle ouvert contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, donc la suite (u_n) converge vers 0.

25 **1.** On conjecture que u_n tend vers 2.

2. Soit ε > 0.

$u_n \in]2-\varepsilon\,;2+\varepsilon[\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$.

Tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, donc la suite (u_n) converge vers 2.

26 Soit ε > 0.

Pour tout $n \geqslant 10^6$ et $n > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $0 < u_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$ donc $u_n \in]-\varepsilon\,;\varepsilon[$.

La suite (u_n) converge vers 0.

27 Si une suite converge vers 1, l'intervalle $\left]1-\frac{1}{2};1+\frac{1}{2}\right[= \left]\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Donc tous les termes de la suite sont positifs à partir d'un certain rang.

28 Si une suite (u_n) converge vers – 1, l'intervalle $\left]-1-\frac{1}{2};-1+\frac{1}{2}\right[= \left]-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Donc tous les termes de la suite sont strictement négatifs à partir d'un certain rang.

29 **1.** Démonstration par l'absurde.

Supposons que la limite ℓ de la suite soit strictement négative.

L'intervalle $\left]\ell-1;\frac{\ell}{2}\right[$, intervalle ouvert contenant ℓ et dont tous les éléments sont strictement négatifs, doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

C'est impossible puisque la suite est à termes strictement positifs.

Donc $\ell \geqslant 0$.

2. Donnons un contre-exemple : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est à termes strictement positifs et a pour limite 0.

30 **1.** L'intervalle $]\ell-1\,;\ell+1[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ. Il existe donc un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]\ell-1\,;\ell+1[$, c'est-à-dire $\ell-1 < u_n < \ell+1$.

A fortiori, pour tout $n \geqslant n_0$, $\ell-1 \leqslant u_n \leqslant \ell+1$.

Soit $p = \max(n_0, 1)$: p est un entier supérieur ou égal à 1 et pour tout $n \geqslant p$, $\ell-1 \leqslant u_n \leqslant \ell+1$.

2. Pour tout $n < p, u_n \geqslant m$ et pour tout $n \geqslant p, u_n \geqslant \ell-1$. Le plus petit des deux nombres m et $\ell-1$, est alors inférieur à tout u_n que $n < p$ ou $n \geqslant p$.

Donc $\min(m, \ell-1)$ minore la suite.

De même, soit M le plus grand des nombres $u_0, u_1, ...u_{p-1}$. Alors pour tout $n < p$, $u_n \leqslant$ M et pour tout $n \geqslant p$, $u_n \leqslant \ell+1$. Donc $\max(\mathrm{M}, \ell+1)$ majore la suite.

31

a. + ∞	**b.** 0	**c.** 0	**d.** 0
e. + ∞	**f.** pas de limite	**g.** – ∞	**h.** 0

32 **1.** Algorithme

ENTRÉE : Saisir K
INITIALISATION : N←0
TRAITEMENT : Tant que $0{,}4^N \geqslant 10^{-K}$ Faire
N←N +1
Fin Tant que
SORTIE : Afficher N

Cet algorithme fournit le plus petit entier naturel N tel que $0{,}4^N < 10^{-K}$ où K est choisi par l'utilisateur.

2. À l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, le plus petit entier N tel que $0{,}4^n < 10^{-3}$ est 8, donc l'algorithme doit afficher 8.

On peut suivre l'exécution de l'algorithme pour $K = 3$:

	K	N
entrée	3	
initialisation		0
traitement :		
test $0{,}4^0 \geqslant 10^{-3}$: vrai		1
test $0{,}4^1 \geqslant 10^{-3}$: vrai		2
test $0{,}4^2 \geqslant 10^{-3}$: vrai		3
test $0{,}4^3 \geqslant 10^{-3}$: vrai		4
test $0{,}4^4 \geqslant 10^{-3}$: vrai		5
test $0{,}4^5 \geqslant 10^{-3}$: vrai		6
test $0{,}4^6 \geqslant 10^{-3}$: vrai		7
test $0{,}4^7 \geqslant 10^{-3}$: vrai		8
test $0{,}4^8 \geqslant 10^{-3}$: faux		
L'algorithme affiche 8.		

3. La suite $(0{,}4^N)$ a pour limite 0, donc pour tout K entier naturel, l'intervalle ouvert $]-10^{-K}\,;10^{-K}[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On est donc sûr de trouver un entier naturel K tel que $0{,}4^N < 10^{-K}$, ce qui prouve que l'algorithme s'arrête.

33 **N 1.** Suite décroissante car $0 < 0{,}4 < 1$.

2. Algorithme

INITIALISATION : n←0
TRAITEMENT : Tant que $0{,}4^n - 0{,}4^{n+1} \geqslant 0{,}0001$ Faire
n←n+1
Fin Tant que
SORTIE : Afficher n

3. Programme sur AlgoBox

```
▼ VARIABLES
│ └n EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
 ├n PREND_LA_VALEUR 0
 ▼ TANT_QUE (pow(0.4,n)-pow(0.4,n+1)>=0.0001) FAIRE
 │ ├DEBUT_TANT_QUE
 │ ├n PREND_LA_VALEUR n+1
 │ └FIN_TANT_QUE
 └AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

On obtient $n_0 = 10$. Ceci signifie que d_{10} est le premier terme de la suite (d_n) tel que $d_n < 0{,}0001$, autrement dit tel que la différence entre deux termes consécutifs de la suite (u_n) différent de moins de 10^{-4}.

34 *Erratum : question 2, remplacer 10k par 10^k.*

1. La limite est $+\infty$.

2. Pour tout réel A, il existe un entier n_0 (qui dépend de A) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $2^n > A$.

Donc pour tout k entier naturel, en prenant $A = 10^k$, il existe un entier, qui dépend de k, que l'on notera n_k tel que pour tout $n \geqslant n_k$, $2^n > 10^k$.

3. Algorithme

ENTRÉE : Saisir K
INITIALISATION : N←0
TRAITEMENT : Tant que $2^n \leqslant 10^k$ Faire
N←N+1
Fin Tant que
SORTIE : Afficher N

4. Programme sur AlgoBox

```
▼ VARIABLES
│ ├n EST_DU_TYPE NOMBRE
│ └k EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
 ├LIRE k
 ├n PREND_LA_VALEUR 0
 ▼ TANT_QUE (pow(2,n)<= pow(10,k)) FAIRE
 │ ├DEBUT_TANT_QUE
 │ ├n PREND_LA_VALEUR n+1
 │ └FIN_TANT_QUE
 └AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

On obtient l'affichage 34.

La suite (u_n) étant croissante, de $u_{34} > 10^{10}$, on déduit que pour tout $n \geqslant 34$, $u_n \geqslant 10^{10}$.

35 **a.** $+\infty$; **b.** $-\infty$; **c.** 0 ; **d.** 0 ; **e.** 0 ; **f.** 0 ; **g.** $-\infty$; **h.** $-\infty$

36 Voir corrigé en fin de manuel.

37 $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

donc (u_n) a pour limite 3.

38 Voir corrigé en fin de manuel.

39 Voir corrigé en fin de manuel.

40 **a.** 3 ; **b.** 0 ; **c.** $\dfrac{3}{2}$; **d.** $-\infty$.

41 **a.** $+\infty$;

b. $+\infty$ en écrivant u_n comme $n^2\left(3-\dfrac{4}{n}\right)$ pour $n \leqslant 1$

c. $+\infty$ en écrivant u_n comme $n^2\left(3-\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)$ pour $n \geqslant 1$

d. $-\infty$ en écrivant u_n comme $-n\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ pour $n \geqslant 1$

42 **a.** $u_n = n + \dfrac{10}{n}$ pour $n \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b. $u_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3n} + \dfrac{5}{3n^2}$ pour $n \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$

c. $u_n = \dfrac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(4+\frac{5}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{4+\frac{5}{n^3}}$ pour $n \geqslant 1$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d. $u_n = \dfrac{n\left(-3+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{\left(-3+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}}$ pour $n \geqslant 1$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

43 **a.** $\dfrac{5^n + 3^n}{4^n} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b. $\dfrac{1+2^n}{5^n} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c. $4^n - 2^n = 4^n\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

d. $2^n - e^n = -e^n\left(1-\left(\dfrac{2}{e}\right)^n\right)$ où $0 < \dfrac{2}{e} < 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

44 $u_n = \dfrac{3^n\left(2+\dfrac{1}{3^n}\right)}{3^n\left(1+\dfrac{4}{3^n}\right)} = \dfrac{2+\dfrac{1}{3^n}}{1+\dfrac{4}{3^n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

45 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$; $v_n = 2+\dfrac{3}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$; $w_n = 2+\dfrac{3}{n^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$.

2. $u_n - 2 = \dfrac{3}{\sqrt{n}}$; $v_n - 2 = \dfrac{3}{n}$; $w_n - 2 = \dfrac{3}{n^2}$.

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{3}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 moins vite que $\dfrac{3}{n}$ et $\dfrac{3}{n}$ tend vers 0 moins vite que $\dfrac{3}{n^2}$.

Donc la suite représentée en rouge est la suite u, celle représentée en bleu est la suite v et celle représentée en vert est la suite w.

46 **a.** Oui. Exemple : $u_n = n$ et $v_n = n^2$ pour tout $n \geqslant 1$.

b. Oui. Exemple : $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

c. Oui. Exemple : $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

d. Oui. Exemple : $u_n = 3n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

47 **1. b.** Le triangle AMT a deux côtés qui tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on peut imaginer que son aire tende vers $+\infty$.

c. La hauteur issue de A est $h_n = n-1$ donc elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

La base MT $= \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

d. L'aire de AMT est $\dfrac{1}{2}(n-1)\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2. Dans les deux cas proposés, la hauteur du triangle issue de A tend vers $+\infty$ et la base vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour la courbe $\mathscr{C}_2$: $y = \dfrac{1}{x}$, l'aire du triangle AMT est $\dfrac{1}{2}(n-1)\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}$ donc elle a pour limite $\dfrac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour la courbe $\mathscr{C}_2$: $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, l'aire du triangle AMT est $\dfrac{1}{2}(n-1)\dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$ donc elle tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

48 **1.** La partie blanche est diminuée de moitié à chaque étape avec $a_1 = \dfrac{1}{2}$ donc $a_n = a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} - 1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$, $n \geqslant 1$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

49 **1.** On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 20.

2. a. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0,6\ u_n - 12 = 0,6\ v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,6.

Son premier terme est $v_0 = u_0 - 20 = 141$.

b. $v_n = 141 \times 0,6n$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc, de $u_n = v_n + 20$ on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 20$.

50 **1. a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \dfrac{1}{3}v_n$ pour tout n, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Pour tout n, $v_n = v_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ avec $v_0 = 1 - 6 = -5$.

Donc $v_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ d'où $u_n = v_n + 6 = 6 - 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

c. $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

2. a. $9w_9 = 10w_8 + 1 = 10 \times 17 + 1 = 171$.

Donc $w_9 = 19$.

b. On conjecture que la suite (w_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = 1$ donc que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = 1 + 2n$.

Montrons-le par récurrence :

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $w_n = 1$ et $2n + 1 = 1$ donc l'égalité est vérifiée.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $w_n = 1 + 2n$. Montrons que $w_{n+1} = 1 + 2(n+1)$ c'est-à-dire $w_{n+1} = 2n + 3$.

Alors $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1$ par relation de récurrence donc $(n+1)w_{n+1} = (n+2)(1+2n) + 1$ par hypothèse de récurrence soit

$(n+1)w_{n+1} = 2n^2 + 5n + 3$.

Or $(n+1)(2n+3) = 2n^2 + 5n + 3$, donc

$(n+1)w_{n+1} = (n+1)(2n+3)$.

On en déduit que $w_{n+1} = 2n + 3$.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \geqslant 0$, $w_n = 2n + 1$.

La suite w est donc arithmétique de raison 2 et $w_{2\,012} = 2 \times 2\,012 + 1 = 4\,015$.

51 Voir corrigé en fin de manuel.

52 **1.** Soit h_n le nombre d'habitants et r_n la recette totale l'année $2\,011 + n$.

La suite (h_n) est arithmétique de raison 500 avec $h_0 = 10\,000$ donc $h_n = 10\,000 + 500n$.

La suite (r_n) est arithmétique de raison 1 000 000 avec $r_0 = 15\,000\,000$ donc

$r_n = 15\,000\,000 + 1\,000\,000\ n = 1\,000\,000(15 + n)$.

Par conséquent $R_n = \dfrac{r_n}{h_n} = \dfrac{1000\,000(15+n)}{10\,000+500n}$

$= 2\,000\ \dfrac{n+15}{n+20}$ pour tout $n \geqslant 0$.

2. a. Pour tout n, $R_{n+1} - R_n = 2\,000\left(\dfrac{n+16}{n+21} - \dfrac{n+15}{n+20}\right)$

$$R_{n+1} - R_n = 2\,000\,\frac{n^2+36n+320-n^2-36n-315}{(n+21)(n+20)}$$

$= \dfrac{10\,000}{(n+21)(n+20)}$, positif.

Donc la suite (R_n) est croissante.

b. Ce modèle est favorable aux habitants puisque les recettes par habitant augmentent au cours du temps.

3. a. La suite (R_n) converge vers 2000.

b. Les recettes par habitants tendent à se stabiliser autour de 2 000 €.

53 **1.** Les suites (a_n) et (b_n) sont définies par :

$a_1 = 0, b_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}(3a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{4}(a_n + 3b_n)$.

Les suites (s_n) et (d_n) sont définies par :
pour tout $n \geqslant 1$, $s_n = a_n + b_n$ et $d_n = b_n - a_n$.

2. On peut conjecturer que la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) décroissante, la suite (s_n) constante égale à 1, et la suite (d_n) décroissante et peut-être géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, $s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{1}{4}(a_n + 3b_n) + \dfrac{1}{4}(3a_n + b_n) = a_n + b_n = s_n$.

La suite (s_n) est donc constante et pour tout n de $\mathbb{N}$, $s_n = s_1 = a_1 + b_1 = 1$.

4. Pour tout $n \geqslant 1$, $d_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{4}(a_n + 3b_n) - \dfrac{1}{4}(3a_n + b_n) = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n) = \dfrac{1}{2}d_n$.

La suite (d_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

On a donc $d_n = d_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

5. On a donc pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ b_n - a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$

Par somme on déduit $2b_n = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ donc $b_n = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$.

Par conséquent $a_n = 1 - b_n = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$.

6. $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$.

54 **1.** Il semble que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0 et ceci indépendamment de a.

	A	B	C
1	a =	-10	
2			
3	n	u(n)	v(n)
4	0	-10	7,5
5	1	4	-3
6	2	-1,6	1,2
7	3	0,64	-0,48
8	4	-0,256	0,192
9	5	0,1024	-0,0768
10	6	-0,04096	0,03072
11	7	0,016384	-0,012288
12	8	-0,0065536	0,0049152
13	9	0,00262144	-0,00196608
14	10	-0,0010486	0,00078643
15	11	0,00041943	-0,00031457
16	12	-0,0001678	0,00012583
17	13	6,7109E-05	-5,0332E-05
18	14	-2,684E-05	2,0133E-05

2. Il semble que la suite w soit constante, égale à 0.

Pour tout $n \geqslant 0$, $w_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1}$ donc

$w_{n+1} = \dfrac{3}{5}(u_n + 4v_n) + \dfrac{4}{5}(3u_n + 2v_n)$

$w_{n+1} = 3u_n + 4v_n = w_n$.

La suite w est donc bien constante donc pour tout $n \geqslant 0$, $w_n = w_0 = 3a - 3a = 0$.

3. $3u_n + 4v_n = w_n = 0$ donc $v_n = -\dfrac{3}{4}u_n$.

Donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(u_n + 4\left(-\dfrac{3}{4}u_n\right)\right) = -\dfrac{2}{5}u_n$.

4. La suite (u_n) est géométrique de raison $-\dfrac{2}{5}$ avec $-1 < -\dfrac{2}{5} < 1$ donc elle converge vers 0.

On en déduit que la suite (v_n) converge aussi vers 0.

55 **a.** $+\infty$; **b.** $+\infty$; **c.** $+\infty$; **d.** $-\infty$

56 **a.** $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

57 Voir corrigé en fin de manuel.

58 **1.** $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$.

2. À l'aide d'une calculatrice, on conjecture que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ end vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

n	$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
100	0,049875621
1 000	0,015807437
10 000	0,004999875
1 000 000	0,0005

3. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Pour $n \geqslant 1,\ n+1 \geqslant n \geqslant 1$ donc $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n} \geqslant 1$ d'où $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n} > 2$ et par conséquent $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Par le théorème « des gendarmes », $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ c'est-à-dire $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

59 *Erratum : dans le tableau, $\geqslant$ au lieu de $>$ en 2e ligne*

1. Ces suites sont croissantes et divergent vers $+\infty$.

2. a.

Avec la suite	(u_n)	(v_n)
Pour dépasser	il suffit que $n \geqslant \ldots$	il suffit que $n \geqslant \ldots$
10	4	13
100	11	26
1 000	32	38

Sur ces exemples, la suite u dépasse les seuils proposés plus tôt que la suite v.

On peut penser que la suite u tend vers $+\infty$ plus vite que la suite v.

b. Algorithme

ENTRÉE : Saisir A
INITIALISATION : m←0 ; n←0
TRAITEMENT : Tant que $1{,}2^m \leqslant$ A Faire
m←m+1
Fin Tant que
Tant que $n^2 \leqslant$ A Faire
n←n+1
Fin Tant que
SORTIE : Afficher « Pour la suite u : »,n
Afficher « Pour la suite v : », m

c. Programme AlgoBox

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  m PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (pow(1.2,m)<=A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    m PREND_LA_VALEUR m+1
    FIN_TANT_QUE
  TANT_QUE (pow(n,2)<=A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Pour la suite u : "
  AFFICHER n
  AFFICHER "Pour la suite v : "
  AFFICHER m
FIN_ALGORITHME
```

Avec la suite	(u_n)	(v_n)
Pour dépasser	il suffit que $n \geqslant \ldots$	il suffit que $n \geqslant \ldots$
10 000	101	51
100 000	317	64
1 000 000	1 001	76

On conjecture dorénavant que la suite v tend vers $+\infty$ plus vite que la suite u.

3. a. $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}=\dfrac{1{,}2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{1{,}2^n}=1{,}2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2=1{,}2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^2$.

b. Pour $n \geqslant 23$, $n+1 \leqslant 24$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{24}$ et $1-\dfrac{1}{n+1} \geqslant 1-\dfrac{1}{24}=\dfrac{23}{24}$.

Pour $n \geqslant 23$, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant 1{,}2\left(\dfrac{23}{24}\right)^2$. Or $1{,}2\left(\dfrac{23}{24}\right)^2 \approx 1{,}102$ donc on a $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant 1{,}1$ pour tout $n \geqslant 23$. Comme w_n est strictement positif, $w_{n+1} \leqslant 1{,}1\, w_n$ pour tout $n \geqslant 23$.

c. Par exemple par une récurrence immédiate, on en déduit que, pour tout $n \geqslant 23$, $w_n \leqslant 1{,}1^{n-23}w_{23}$.

d. Comme $1{,}1>1$ et $w_{23}>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}1^{n-23}w_{23}=+\infty$ donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=+\infty$.

On en déduit que la suite v tend vers $+\infty$ beaucoup plus vite que la suite u.

60 **1. a.** u_n est une somme de n termes.

b. Chacun des termes de la somme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2. a. Le plus petit des termes est $\dfrac{n}{n^2+n}$ et le plus grand $\dfrac{n}{n^2+1}$.

b. On en déduit que
$$\underbrace{\frac{n}{n^2+n}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}}_{n \text{ termes}} \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{n}{n^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}}_{n \text{ termes}}$$
D'où $\dfrac{n}{n^2+n}\times n \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}\times n$ soit
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2} = 1$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2} = 1.$

Par le théorème « des gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

La suite (u_n) est donc convergente vers 1.

61 Pour tout k entier, $-1 \leqslant \sin(k) \leqslant 1$ donc
$$-\frac{1}{k} \leqslant \sin(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$
Par conséquent
$$\underbrace{-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}-\ldots-\frac{1}{n^2}}_{n \text{ termes}} \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{n \text{ termes}}$$
d'où $-\dfrac{1}{n^2}\times n \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}\times n$,

c'est-à-dire $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Par le théorème « des gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) converge donc vers 0.

62 *Erratum : question 2,* $u_{n+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+2}$

1. On sait que pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Donc $0 < u_0 \leqslant 1$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n \leqslant 1$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, $u_1 = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{2} \approx 0{,}8$ donc on a bien $0 < u_1 \leqslant 1$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 1$.

Supposons que $0 < u_n \leqslant 1$.

Alors $1 < \mathrm{e}^{u_n} \leqslant \mathrm{e}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle donc $\dfrac{1}{n+2} < \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{n+2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+2}$.

Comme $n \geqslant 1$, on a $n+2 \geqslant 3$, donc $\dfrac{\mathrm{e}}{n+2} \leqslant 1$.

On en déduit que $0 < u_{n+1} \leqslant 1$.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n \leqslant 1$.

De l'étude des deux cas ($n = 0$, $n \geqslant 1$), on déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.

2. De $0 < u_n \leqslant 1$ on déduit que $1 < \mathrm{e}^{u_n} \leqslant \mathrm{e}$ d'où $u_{n+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+2}$.

3. On a donc $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+2}$.

Par le théorème « des gendarmes », la suite (u_n) converge vers 0.

63 **1. a.** <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 = 5$ donc on a bien $u_0 \geqslant 0$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant 0$.

Alors $-u_n \leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant 1$ puis $-\mathrm{e}^{-u_n} \geqslant -1$ et finalement $2-\mathrm{e}^{-u_n} \geqslant 1$.

On a donc bien $u_{n+1} \geqslant 0$.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$.

b. <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 = 5$ et $u_1 = 2-\mathrm{e}^{-5}$ donc $u_1 \leqslant 2$ et par conséquent, $u_1 \leqslant u_0$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Alors $-u_{n+1} \geqslant -u_n$ donc $\mathrm{e}^{-u_{n+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-u_n}$ d'où $-\mathrm{e}^{-u_{n+1}} \leqslant -\mathrm{e}^{-u_n}$ et finalement $2-\mathrm{e}^{-u_{n+1}} \leqslant 2-\mathrm{e}^{-u_n}$.

On a donc bien $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

Remarque : on aurait aussi pu utiliser la croissance de la fonction $f : x \mapsto 2-\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0. On en déduit qu'elle est convergente.

64 **1.** La suite (u_n) est à termes positifs donc 0 est un minorant de cette suite.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{(n+1)^3}$, est positif.

Donc la suite (u_n) est croissante.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2-\dfrac{1}{n}$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, $u_1 = 1$ et $2-\dfrac{1}{n} = 1$ donc l'inégalité est vérifiée.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n \leqslant 2-\dfrac{1}{n}$.

Comme $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^3}$, on déduit que
$$u_{n+1} \leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}.$$
Vérifions que $2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{(n+1)^3} \leqslant 2-\dfrac{1}{n+1}$:
$$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3} \leqslant 2-\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geqslant \frac{n^2+2n+2}{(n+1)^3}$$
$$\Leftrightarrow (n+1)^3 \geqslant n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow n^2+n+1 \geqslant 0$$
ce qui est vrai pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc $u_{n+1} \leqslant 2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{(n+1)^3} \leqslant 2-\dfrac{1}{n+1}$

d'où $u_{n+1} \leqslant 2-\dfrac{1}{n+1}$

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2-\dfrac{1}{n}$

4. a. On sait que la suite (u_n) est croissante.

De la question 3, on déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 2$.

La suite (u_n) est donc majorée par 2.

Étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle converge.

b. On sait que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Donc la limite de la suite (u_n) appartient à [0 ; 2].

65 **1. a.** Pour chaque n de $\mathbb{N}$, on a selon les cas :

soit $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$

soit $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.

La suite $(b_n - a_n)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. $b_0 - a_0 = 1$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$,

$b_n - a_n = (b_0 - a_0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

La suite $(b_n - a_n)$ convergente vers 0.

2. a. Pour chaque n de $\mathbb{N}$, on a selon les cas :

soit $a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0$

soit $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.

La suite (a_n) est donc croissante. Étant croissante et majorée par 2, la suite (a_n) est convergente.

b. Pour chaque n de $\mathbb{N}$, on a selon les cas :

soit $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n = -\dfrac{1}{2}(b_n - a_n) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

soit $b_{n+1} - b_n = b_n - b_n = 0$.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$.

La suite (a_n) est donc décroissante. Étant décroissante et minorée par 1, la suite (b_n) est convergente.

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n \leqslant \alpha$ et $b_n \geqslant \alpha$ donc $\ell \leqslant \alpha$ et $\alpha \leqslant \ell'$.

On sait que $b_n - a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = \ell' - \ell$.

Par unicité de la limite, $\ell' - \ell = 0$.

On a donc $\ell = \ell'$ avec $\ell \leqslant \alpha$ et $\alpha \leqslant \ell'$.

On en déduit que $\ell' = \ell = \alpha$.

On a donc montré que la suite (a_n) tend en croissant vers α et que la suite (b_n) tend en décroissant vers α.

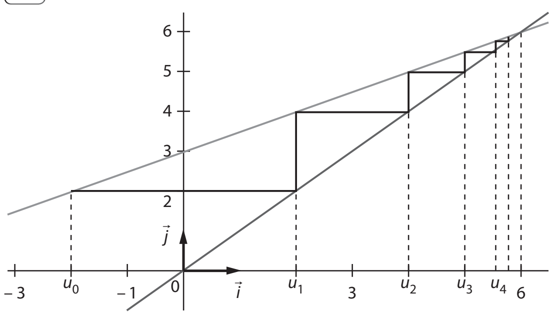
3. a. L'encadrement $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ est un encadrement de longueur $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Algorithme :

```
ENTRÉE : Saisir e
INITIALISATION : n←0 ; a←1 ; b ←2
TRAITEMENT : Tant que 0,5^n > ε Faire
        n←n+1
        Si f(a)×f((a+b)/2) < 0 Alors
            b← (a+b)/2
            Sinon a ← (a+b)/2
        Fin Si
    Fin Tant que
SORTIE : Afficher a, b
```

b. Cet algorithme s'arrête car la suite $(0{,}5^n)$ tend vers 0 donc pour toute valeur strictement positive ε, il existe un entier n_0 tel que $0{,}5^{n_0} \leqslant \varepsilon$. La condition de sortie de la boucle sera remplie quand la variable n contiendra la valeur n_0 donc on est sûr que l'algorithme s'arrête.

66 **1.**



2. La suite semble être croissante et avoir pour limite 6.

3. a. $\alpha = 6$.

b. α est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = f(x)$ et $y = x$.

4. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = \dfrac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \dfrac{1}{2}(u_n - 6) = \dfrac{1}{2}v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

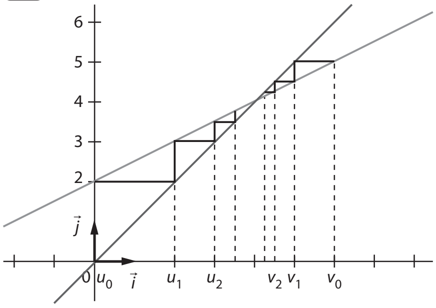
La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. $v_n = v_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -11\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $u_n = v_n + 6 = 6 - 11\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

5. $u_{n+1} - u_n = 11\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 11\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 11\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif pour tout n donc la suite u est croissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$.

67 **1.**



2. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2} \times 0 + 2 = 2$.

On a donc bien $u_0 \leqslant u_1$ et $0 \leqslant u_0 \leqslant 4$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 0$.

Supposons que $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

Alors $\frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1}$ donc $\frac{1}{2}u_n + 2 \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1} + 2$, c'est-à-dire $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

De plus $0 \leqslant u_n \leqslant 4 \Rightarrow 2 \leqslant \frac{1}{2}u_n + 2 \leqslant \frac{1}{2} \times 4 + 2$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

b. La suite (u_n) est croissante majorée par 4, donc elle converge.

c. Si ℓ est la limite de la suite (u_n), u_{n+1} tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

De plus $\frac{1}{2}u_n + 2$ tend vers $\frac{1}{2}\ell + 2$.

Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on a donc $\frac{1}{2}\ell + 2 = \ell$ soit $\ell = 4$.

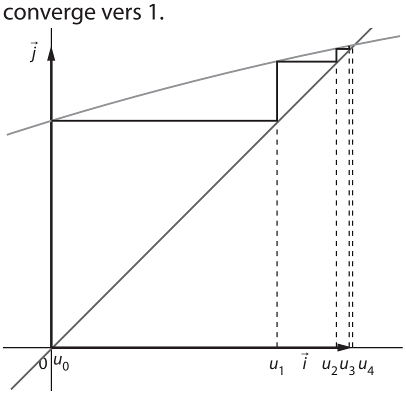
3. On montre de même par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} \leqslant v_n$ et $4 \leqslant v_n \leqslant 6$.

On en déduit que la suite (v_n) converge vers une limite ℓ'.

Un raisonnement analogue à celui de la question **2.c.** conduit à $\frac{1}{2}\ell' + 2 = \ell'$ d'où $\ell' = 4$.

68 Voir corrigé en fin de manuel.

69 **1.** On conjecture que cette suite est croissante et converge vers 1.



2. $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12}$$

$$= \frac{u_n - 1}{5(u_n + 3)} = \frac{1}{5}v_n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

3. $v_n = v_0\left(\frac{1}{5}\right)^n$ avec $0 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

4. $v_n(u_n + 3) = u_n - 1$ donc $u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$.

Or $v_0 = -\frac{1}{3}$ donc $v_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n$. Ainsi v_n est toujours différent de 1, donc on peut en déduire que $u_n = \frac{-1 - 3v_n}{v_n - 1} = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

70 **1.** Si la suite converge vers une limite ℓ, u_{n+1} tend à la fois vers ℓ et vers $\frac{1}{4}\ell^2$.

Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = \frac{1}{4}\ell^2$, donc que $\ell = 0$ ou $\ell = 4$.

2. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 = 3$, on a donc bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Alors $0 \leqslant u_n^2 \leqslant 9$ donc $0 \leqslant \frac{1}{4}u_n^2 \leqslant \frac{9}{4}$ et *a fortiori* $0 \leqslant \frac{1}{4}u_n^2 \leqslant 3$.

On a donc bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

3. $u_{n+1} - u_n = u_n\left(\frac{1}{4}u_n - 1\right)$. De $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ on déduit que $\frac{1}{4}u_n - 1 \leqslant \frac{3}{4} - 1$ donc $\frac{1}{4}u_n - 1$ est négatif. Comme u_n est positif, $u_{n+1} - u_n$ est négatif pour tout n de $\mathbb{N}$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

4. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge.

Comme, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ on sait que sa limite appartient à $[0 ; 3]$.

Les seules limites possibles étaient 0 et 4, donc la suite (u_n) a pour limite 0.

71 **1.** La fonction f étant croissante sur $[0 ; 1]$, si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$.

Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc pour tout x de $[0 ; 1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. a. $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \dfrac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$

$$f(x) = \frac{e^x(1 - x) - (1 - x^2)}{e^x - x} = \frac{(1 - x)(e^x - 1 - x)}{e^x - x}$$

On pose donc $g(x) = e^x - 1 - x$.

b. g est dérivable sur $g'(x) = e^x - 1$.

Sur $[0\,;1]$, $g'(x) \geqslant 0$ et g' ne s'annule qu'en 0 donc g est strictement croissante sur $[0\,;1]$. De plus $g(0) = 0$.

On en déduit que g est positive ou nulle sur $[0\,;1]$, g ne s'annulant qu'en 0.

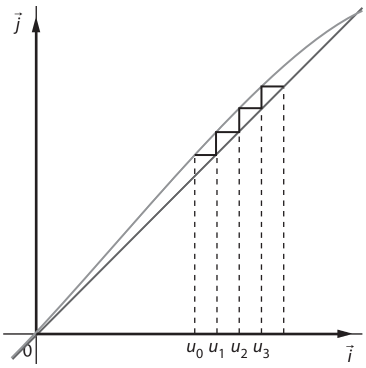
c. Sur $[0\,;1]$, $1 - x \geqslant 0$ donc $(1-x)g(x) \geqslant 0$.

De plus $e^x - x = g(x) + 1$ donc $e^x - x \geqslant 1$ sur $[0\,;1]$.

On en déduit que $f(x) - x \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donc au-dessus de D sur $[0\,;1]$.

3.



b. • Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a donc bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.

Hérédité : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Alors par la question 1, $0 \leqslant f(u_n) \leqslant 1$ c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

• Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = f\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}56$ on a donc bien $u_0 \leqslant u_1$.

Hérédité : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant u_{n+1}$.

On a alors $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ puisque tous les termes de la suite appartiennent à $[0\,;1]$.

Alors par croissance de f sur $[0\,;1]$, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

c. La suite (u_n) est donc croissante et majorée donc elle converge.

Tous les termes appartenant à $[0\,;1]$, sa limite ℓ appartient à $[0\,;1]$.

Alors la suite (u_{n+1}) a pour limite ℓ mais aussi $\dfrac{e^\ell - 1}{e^\ell - \ell}$.

Par unicité de sa limite, on déduit que $\ell = \dfrac{e^\ell - 1}{e^\ell - \ell}$, autrement dit $\ell = f(\ell)$.

De $f(x) - x$ calculé en **2. a.**, on déduit que $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$ ou $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 0$.

La suite (u_n) étant croissante avec $u_0 = 0{,}5$, pour tout n, $u_n \geqslant 0{,}5$ donc $\ell \geqslant 0{,}5$.

Par conséquent la limite de la suite (u_n) est 1.

72 Dire que la suite a pour limite $+\infty$, c'est dire que pour tout réel A donné, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $(-2)^n > A$.

Montrons qu'il existe un réel A pour lequel on en peut pas trouver n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $(-2)^n > A$.

Soit par exemple $A = 10$. Pour tout n impair $(-2)^n < 0 < A$. On ne peut donc pas trouver n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $(-2)^n > A$.

Donc la suite n'a pas pour limite $+\infty$.

Raisonnement analogue pour montrer qu'elle n'a pas pour limite $-\infty$.

73 (A) vrai. En effet pour tout n, $u_n \geqslant 0$.

On en déduit que $v_n \geqslant 0$. De plus $1 + u_n \geqslant u_n$ et $1 + u_n \neq 0$, donc $1 \geqslant \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

Donc pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

(B) vrai. En effet, si converge vers une limite ℓ, la suite (u_n) étant positive, $\ell \geqslant 0$ et par théorème d'opération, la suite (v_n) converge vers $\dfrac{\ell}{1+\ell}$.

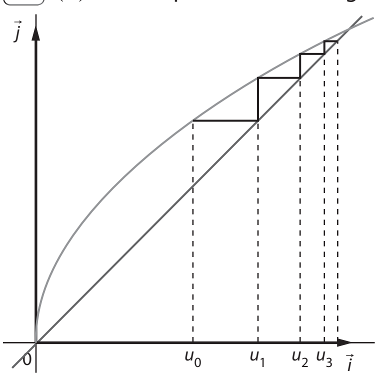
(C) vrai. On a pour tout n,

$$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+1} - \frac{u_n}{u_n+1}\right) = \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}.$$

Donc si (u_n) est positive et croissante, pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. La suite (v_n) est donc croissante.

(D) faux. Contre exemple : $u_n = n$. Alors la suite (v_n) converge vers 1 mais la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

74 (A) vrai. On peut le visualiser graphiquement :



Pour le démontrer, on peut montrer par une récurrence immédiate que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

On sait que si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\sqrt{x} \geqslant x$. On en déduit donc que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

(B) faux. La suite est croissante de premier terme $\frac{1}{2}$ donc pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \frac{1}{2}$. La suite ne peut pas avoir 0 pour limite.

(C) faux. Comme u_n est positif, dire que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ revient à dire que $u_{n+1} < u_n$ ce qui est faux (voir (A)).

(D) faux. Par exemple, $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$.

75 **1.** Dans l'affirmation (A), à chaque salle correspond une clé qui ouvre la salle et qui peut être différente selon la salle tandis que dans l'affirmation (B), il existe un passe qui ouvre toutes les salles du lycée.

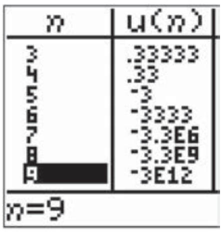
2. (A) vrai. On peut prendre $M = n^2 - 2$.

(B) faux : la suite (u_n) n'est pas bornée.

77 **1.** Condition suffisante.

2. Pour que $u_n > A$, il suffit que $n^2 > A$.

78 Par exemple sur une TI 83



On conjecture que la suite diverge vers $-\infty$.

2. $u_1 = 1000 \times \frac{1}{3} - 333 = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{3}$.

Par une récurrence immédiate, la suite est constante, tous ses termes étant égaux à $\frac{1}{3}$.

La calculatrice calculant avec une valeur approchée de $\frac{1}{3}$ induit une erreur qui se propage au fur et à mesure des calculs, et assez rapidement du fait de la multiplication par 1 000.

79 **1.** Les valeurs de u_n obtenues sont différentes.

2. a. $v_{n+1} - u_{n+1} = (n+1)v_n - 1 - (n+1)u_n + 1$

$= (n+1)(v_n - u_n)$.

De plus $v_0 - u_0 = \varepsilon$.

Par une récurrence immédiate, on a pour tout $n \geqslant 0$, $v_n - u_n = \varepsilon \times 1 \times 2 \times \ldots \times n = \varepsilon \times n!$

b. La calculatrice et le tableur prennent pour u_0 une valeur approchée de e – 1 avec un nombre différent de décimales. Ils donnent donc des valeurs approchées de deux suites v_n pour deux valeurs différentes de ε, non nulles.

Quand n tend vers $+\infty$, $n!$ tend vers $+\infty$, donc la différence entre les termes affichés tend vers $+\infty$.

APPROFONDISSEMENT

102 **1.** La suite (u_n) ayant pour limite ℓ, l'intervalle ouvert $\left]\ell - \frac{a}{2} ; \ell + \frac{a}{2}\right[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, que l'on note n_1.

De même, la suite (v_n) ayant pour limite ℓ', l'intervalle ouvert $\left]\ell' - \frac{a}{2} ; \ell' + \frac{a}{2}\right[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang, que l'on note n_2.

2. Soit un intervalle ouvert $]\ell + \ell' - a ; \ell + \ell' + a[$.

Pour $n \geqslant n_1$ et $n \geqslant n_2$ où n_1 et n_2 sont définis en question **1.**, on a

$\ell - \frac{a}{2} < u_n < \ell + \frac{a}{2}$ et $\ell' - \frac{a}{2} < v_n < \ell' + \frac{a}{2}$

donc par addition, $\ell + \ell' - a < u_n + v_n < \ell + \ell' + a$.

Pour tout intervalle ouvert $]\ell + \ell' - a ; \ell + \ell' + a[$ contenant $\ell + \ell'$, il existe donc un entier $n_0 (n_0 = \max(n_1, n_2))$ tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n + v_n \in]\ell + \ell' - a ; \ell + \ell' + a[$.

La suite $(u_n + v_n)$ a donc pour limite $\ell + \ell'$.

103 **1. a.** La suite (u_n) ayant pour limite ℓ, l'intervalle ouvert $\left]\ell - \frac{\varepsilon}{2} ; \ell + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, que l'on note n_0.

Donc pour tout $n \geqslant n_0$, $\ell - \frac{\varepsilon}{2} < u_n < l + \frac{\varepsilon}{2}$

ou encore $-\frac{\varepsilon}{2} < u_n - \ell < \frac{\varepsilon}{2}$.

b. Alors pour $n \geqslant n_0$, on a aussi $n + 1 \geqslant n_0$ donc $-\frac{\varepsilon}{2} < u_{n+1} - \ell < \frac{\varepsilon}{2}$ (1).

De $-\frac{\varepsilon}{2} < u_n - \ell < \frac{\varepsilon}{2}$, on déduit $-\frac{\varepsilon}{2} < -(u_n - \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$ (2).

En ajoutant (1) et (2) membre à membre, on obtient : $-\varepsilon < u_{n+1} - u_n < \varepsilon$.

c. On en déduit que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ a pour limite 0.

2. Si une suite (u_n) converge, la suite $(u_{n+1} - u_n)$ a pour limite 0.

3. Non. Contre exemple : $u_n = \sqrt{n}$ (voir exercice 58).

104

1.

n	u_n
0	0
1	1
2	2
3	1,5
4	0,666667
5	0,208333

2. La suite est positive donc minorée par 0.

3. $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)!} = \dfrac{n+1}{n!}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n^2} = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{3}{4}$.

Par conséquent, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n$ puisque $u_n > 0$.

Par une récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2} u_2$.

De plus $u_n > 0$ donc pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2} u_2$.

Par le théorème des « gendarmes », on déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

105 **1. a.**

1 0 6	3 3
7 0	3, 2 1 2 1 2 1
4 0	
7 0	
4 0	
7 0	
4 0	
7	

b. La division ne s'arrête pas car la suite des restes obtenue est périodique : 7, 4, 7, 4, 7, 4, etc.

Le nombre $\dfrac{106}{33}$ a une écriture décimale illimitée : $3{,}21\underline{21}\ldots$

2. $x_0 = 2$; $x_1 = 2{,}45$; $x_2 = 2{,}4545$; $x_n = 2{,}4545\ldots45$ (avec n répétitions de la séquence de chiffres 45).

2,4545… peut être considérée comme la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$, si cette limite existe.

b. $x_n = 2 + \dfrac{45}{100}\left(1 + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{100^2} + \ldots + \dfrac{1}{100^{n-1}}\right)$

$$= 2 + \frac{45}{100}\,\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{5}{11}\left(1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right).$$

c. La suite (x_n) a donc pour limite le nombre rationnel $2 + \dfrac{5}{11} = \dfrac{27}{11}$.

d. On peut effectuer à la main la division de 27 par 11 et retrouver pour quotient $2{,}45\,\underline{45}\ldots$

3. a. $5 + \dfrac{67}{100} + \dfrac{67}{100^2} + \ldots + \dfrac{67}{100^n} = 5 + \dfrac{67}{100}\,\dfrac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}}$

$= 5 + \dfrac{67}{99}\left(1-\left(\dfrac{1}{100}\right)^n\right)$.

La limite, quand n tend vers $+\infty$, de $5 + \dfrac{67}{99}\left(1-\left(\dfrac{1}{100}\right)^n\right)$ est $5 + \dfrac{67}{99} = \dfrac{562}{99}$.

On a donc $5{,}6767\ldots = \dfrac{562}{99}$.

b.

$1 + \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{100} + \ldots + \dfrac{9}{10^n} = 1 + \dfrac{9}{10}\left(1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n-1}}\right)$

$$= 1 + \frac{9}{10}\,\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = 2 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

La limite, quand n tend vers $+\infty$, de $2 - \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$ est 2, donc le nombre qui a l'écriture décimale illimitée $1{,}9\underline{9}\ldots$ est le nombre 2.

106 **1.** $\cos 1 \approx 0{,}54$ et $\sin 1 \approx 0{,}84$ à 0,01 près.

2. a. On applique la formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

b. $\sin(n+1) - \sin(n-1) = \sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n - \sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n$ soit $2 \sin 1 \cos n$.

3. a. Si (u_n) a pour limite ℓ, quand n tend vers $+\infty$, $\sin(n+1) - \sin(n-1)$ tend vers $\ell - \ell$ donc vers 0.

Or $\sin 1 \neq 0$ donc par **2.b.**,

$\cos n = \dfrac{1}{\sin 1}(\sin(n+1) - \sin(n-1))$.

Par conséquent, si la suite (u_n) a pour limite ℓ la suite (v_n), c'est-à-dire $(\cos n)$, a pour limite 0.

b. Dans la relation établie en **2.a.**, quand n tend vers $+\infty$, $\sin(n+1)$ tend vers ℓ d'une part, et d'autre part, $\sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n$ tend vers $\ell \cos 1 + 0 = \ell \cos 1$.

Par unicité de la limite de $(\sin(n+1))$, on a donc $\ell = \ell \cos 1$.

Comme $\cos 1 \neq 0$, on en déduit que $\ell = 0$.

d. On a montré que si la suite (u_n) a pour limite ℓ alors $\ell = 0$, et la suite (v_n) a aussi pour limite 0.

4. Pour tout n, $u_n^2 + v_n^2 = \sin^2 n + \cos^2 n = 1$.

Si la suite (u_n) a une limite finie, alors $(\sin n)$ et $(\cos n)$ ont pour limite 0 donc la suite $(\sin^2 n + \cos^2 n)$ aurait pour limite 0 également.

Ceci est impossible puisque la suite $(\sin^2 n + \cos^2 n)$ est la suite constante dont tous les termes sont égaux à 1.

Par conséquent, la suite (u_n) ne peut pas avoir une limite finie.

De plus, pour tout n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc la suite (u_n) ne peut pas avoir une limite infinie.

En définitive, la suite $(\sin n)$ n'a pas de limite.

De plus, $\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2 \sin n \cos 1$ donc si la suite $(\cos n)$ avait une limite, celle-ci étant nécessairement comprise entre -1 et 1 est finie, et la suite $(-2 \sin n \cos 1)$ devrait avoir pour limite 0.

Comme $\cos 1 \neq 0$, la suite $(\sin n)$ devrait avoir pour limite 0, ce qui n'est pas.

Par conséquent la suite $(\cos n)$ n'a pas de limite.

107 **1. b.** Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in$ I.
Alors pour tout $n \geqslant n_0 - 1$ et $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \in$ I.
Donc la suite (u_{n+1}) a pour limite ℓ.
Par théorème d'opération, la suite $(u_{n+1} - 0{,}5\, u_n)$ a pour limite $0{,}5\, \ell$.
c. $u_{n+1} - 0{,}5u_n = 2n + 2{,}5$ donc la suite $(u_{n+1} - 0{,}5\, u_n)$ a pour limite $+\infty$.
Il est donc impossible que la suite ait une limite finie ℓ.
2. a. Pour tout n,
$v_{n+1} = u_{n+1} - 4n - 4 + 3$
$v_{n+1} = 0{,}5u_n + 2n + 2{,}5 - 4n - 1$
$v_{n+1} = 0{,}5u_n - 2n + 1{,}5$
$v_{n+1} = 0{,}5v_n$
La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5.
b. $v_n = v_0 0{,}5^n = 0{,}5^n$
c. $u_n = v_n + 4n - 3 = 0{,}5^n + 4n - 3$.
Donc la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

108 *Erratum : ne pas tenir compte du titre « récurrence double »*
On place successivement les points dont les coordonnées sont données ci-dessous :

k	Abscisse de C	Abscisse de A	Abscisse de B
		0	1
1	0,5	1	0,5
2	0,75	0,5	0,75
3	0,625	0,75	0,625
4	0,6875	0,625	0,6875
5	0,65625	0,6875	0,65625
6	0,671875	0,65625	0,671875
7	0,6640625	0,671875	0,6640625
8	0,66796875	0,6640625	0,66796875

Cette suite de points semble tendre vers le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; 0\right)$.
2. a. Pour $n \geqslant 0$, a_n est l'abscisse du point A à l'étape n (en partant de l'étape 0).
b. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.
<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ donc on a bien $a_1 = -\frac{1}{2}a_0 + 1$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.
Alors $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ par énoncé (1).
Or par hypothèse de récurrence $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$ donc $a_n = -2a_{n+1} + 2$.

En remplaçant dans (1) :
$(a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - 2a_{n+1} + 2) = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 1$
<u>Conclusion</u> : pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.
c. Pour tout n,
$u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}u_n$.
La suite (u_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.
d. Pour tout n, $u_n = u_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
De $a_n = u_n + \frac{2}{3}$ on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3}$.
Remarque : les points B et C tendent donc aussi vers le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; 0\right)$.

109 **1.**

	x_0	y_0	x_1	y_1
Initialisation	1	0		
Après le 1[er] tour de boucle	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43$
Après le 2[e] tour de boucle	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	$\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}65$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	$\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}65$

2. a. $A_1\left(\frac{3}{4} ; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $A_2\left(\frac{3}{8} ; \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$
b. $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n - \frac{\sqrt{3}}{4}y_n$ et $y_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n$.
3. a. $OA_{n+1}^2 = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(\frac{9}{16}x_n^2 + \frac{3}{16}y_n^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}x_n y_n\right)$
$+\left(\frac{3}{16}x_n^2 + \frac{9}{16}y_n^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8}x_n y_n\right)$.
$OA_{n+1}^2 = \frac{3}{4}(x_n^2 + y_n^2) = \frac{3}{4}OA_n^2$
Donc $OA_{n+1}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}OA_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
La suite (OA_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b. $A_n\,A_{n+1}^2 = (x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2$
$= \frac{1}{16}x_n^2 + \frac{3}{16}y_n^2 + \frac{3}{16}x_n^2 + \frac{9}{16}y_n^2$
$A_n\,A_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(x_n^2 + y_n^2) = \frac{1}{4}OA_n^2$ donc $A_n\,A_{n+1} = \frac{1}{2}OA_n$.
3. $L_n = A_0\,A_1 + \ldots + A_{n-1}\,A_n = \frac{1}{2}(OA_0 + \ldots + OA_{n-1})$.
Par la question **3.a.**, $OA_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n OA_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ donc
$$L_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}\right).$$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$.

110 **1.** On suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à I à partir d'un certain rang n_0, donc :

- tous les termes de rangs pairs appartiennent à I à partir d'un certain rang : la suite (u_{2n}) converge vers ℓ.
- tous les termes de rangs impairs appartiennent à I à partir d'un certain rang : la suite (u_{2n+1}) converge vers ℓ.

2. Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

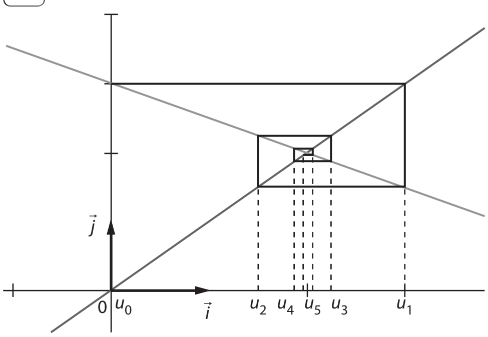
Tous les termes de la suite (u_n) de rangs pairs appartiennent à I à partir d'un certain rang n_1, et tous les termes de la suite (u_n) de rangs impairs appartiennent à I à partir d'un certain rang n_2.

Donc tous les termes de la suite appartiennent à I à partir d'un certain rang (par exemple $\max(n_1, n_2)$)

La suite (u_n) converge donc vers ℓ.

3. Soit $u_n = (-1)^n$. Alors la suite (u_{2n}) est constante et converge vers 1 et la suite (u_{2n+1}) est constante et converge vers – 1. Par la contraposée de la propriété démontrée en **1**, la suite (u_n) ne converge pas donc diverge.

112 **1.**



2. Il semble que :

a. la suite (u_n) converge vers 2 mais en soit pas monotone.

b. La suite (u_{2n}) converge vers 2 en étant croissante.

c. La suite (u_{2n+1}) converge vers 2 en étant décroissante.

3. a. $v_0 = u_0 = 0$; $u_1 = 3$ donc $v_1 = u_2 = 1{,}5$.

b. $v_{n+1} = u_{2n+2} = -\dfrac{1}{2}u_{2n+1} + 3$

$v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}u_{2n} + 3\right) + 3$

$v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n + \dfrac{3}{2}$.

c. • Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant v_n \leqslant 2$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $v_0 = 0$, on a donc bien $0 \leqslant v_0 \leqslant 2$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant v_n \leqslant 2$.

Alors $0 \leqslant \dfrac{1}{4}v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{3}{2} \leqslant \dfrac{1}{4}v_n + \dfrac{3}{2} \leqslant 2$ d'où $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant v_n \leqslant 2$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $v_n \leqslant v_{n+1}$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $v_0 = 0$, $v_1 = 1{,}5$, on a donc bien $v_0 \leqslant v_1$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $v_n \leqslant v_{n+1}$.

Alors $\dfrac{1}{4}v_n + \dfrac{3}{2} \leqslant \dfrac{1}{4}v_{n+1} + \dfrac{3}{2}$ donc $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \geqslant 0$, $v_n \leqslant v_{n+1}$.

d. La suite (v_n) est croissante majorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ. Alors quand n tend vers $+\infty$, v_{n+1} tend à la fois vers ℓ et vers $\dfrac{1}{4}\ell + \dfrac{3}{2}$.

Par unicité de la limite de (v_n), $\ell = \dfrac{1}{4}\ell + \dfrac{3}{2}$ soit $\ell = 2$.

4. De même $w_{n+1} = u_{2n+3} = \dfrac{1}{4}u_{2n+1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{4}w_n + \dfrac{3}{2}$.

On montre par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $2 \leqslant w_n \leqslant 3$ et $w_{n+1} \leqslant w_n$.

La suite (w_n) sera donc décroissante minorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ'.

On montre ensuite que $\ell' = \dfrac{1}{4}\ell' + \dfrac{3}{2}$ soit $\ell' = 2$.

5. Les suites des termes (u_n) de rang pair et de rang impair ont pour limite 2. Donc tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang et la suite (u_n) converge donc vers 2.

113 **1. a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{\pi^2}{6} = \ell$.

b. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}$.

Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. La suite v est croissante.

$v'_{n+1} - v'_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2}$.

Pour tout n, $v'_{n+1} - v'_n \leqslant 0$. La suite v' est décroissante.

c. Conséquence immédiate de **a.** et **b.**

d. $v'_n - v_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

2. $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)} + \dfrac{1}{2(n+2)(n+3)}$
$- \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$

$w_{n+1} - w_n = \dfrac{2}{(n+1)^2(n+2)(n+3)}$ (calcul formel) est positif donc (w_n) est croissante. Sa limite est ℓ donc pour tout $n, w_n \leqslant \ell$.

$$w'_{n+1} - w'_n = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2n(n+1)}$$

$w'_{n+1} - w'_n = -\dfrac{1}{n(n+1)^2(n+2)}$ (calcul formel) est négatif donc (w'_n) est décroissante. Sa limite est ℓ donc pour tout $n, w'_n \geqslant \ell$.

Donc pour tout $n, w_n \leqslant \ell \leqslant w'_n$.

De plus $w'_n - w_n = \dfrac{1}{2n(n+1)} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \leqslant \dfrac{1}{n^3}$.

De même :

$$z_{n+1} - z_n = \frac{2}{(n+1)^2(n+2)(n+3)} + \frac{2}{3(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{2}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$z_{n+1} - z_n = \dfrac{6}{(n+1)^2(n+2)(n+3)(n+4)}$ (calcul formel) est positif donc (z_n) est croissante. Sa limite est ℓ donc pour tout n, $z_n \leqslant \ell$.

$$z'_{n+1} - z'_n = \frac{2}{(n+1)^2(n+2)(n+3)} + \frac{2}{3(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{2}{3n(n+1)(n+2)}$$

$z_{n+1} - z_n = -\dfrac{2}{n(n+1)^2(n+2)(n+3)}$ (calcul formel) est négatif donc (z'_n) est décroissante. Sa limite est ℓ donc pour tout n, $z'_n \geqslant \ell$.

Donc pour tout n, $z_n \leqslant \ell \leqslant z'_n$.

De plus, $z'_n - z_n = \dfrac{2}{3n(n+1)(n+2)} - \dfrac{2}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$

$= \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \leqslant \dfrac{2}{n^4}$.

3. u_n, v_n, w_n, z_n sont des valeurs approchées de ℓ avec une précision :

$\dfrac{1}{n}$ pour u_n, $\dfrac{1}{n^2}$ pour v_n, $\dfrac{1}{n^3}$ pour w_n et $\dfrac{2}{n^4}$ pour z_n.

	u_n	v_n	w_n	z_n
$n = 10$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	2.10^{-4}
$n = 100$	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	2.10^{-8}
$n = 1000$	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	2.10^{-12}

4. a. b. Algorithme pour la suite u :

ENTRÉE : Saisir k
INITIALISATION : lim $\leftarrow \dfrac{\pi^2}{6}$; n←1 ; u←1
TRAITEMENT : Tant que |u-lim|>10^{-k} Faire
n←n+1 ; u←u + $\dfrac{1}{n^2}$;
Fin Tant que ;
SORTIE : Afficher u,n

Algorithme pour la suite v :
ENTRÉE : Saisir k
INITIALISATION : lim $\leftarrow \dfrac{\pi^2}{6}$; n←1 ; u←1 ; v←1,5
TRAITEMENT : Tant que |v-lim|>10^{-k} Faire
n←n+1 ; u←u + $\dfrac{1}{n^2}$; v←u + $\dfrac{1}{n+1}$
Fin Tant que ;
SORTIE : Afficher v, n

De même pour w et z (voir fichier sur le site Math'x).

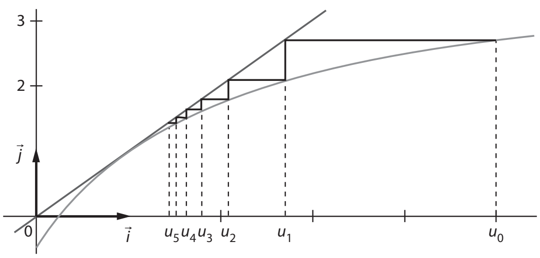
c.

valeur approchée de ℓ		
à 10^{-2} près	$u_{100} \approx$ 1.63498390018	$v_7 \approx 1.63679705215$
à 10^{-4} près	$u_{10\,000} \approx$ 1.64483407185	$v_{70} \approx 1.64483441453$
à 10^{-6} près	$u_{1\,000\,000} \approx$ 1.64493306685	$v_{707} \approx 1.6449330689$
valeur approchée de ℓ		
à 10^{-2} près	$w_3 \approx 1.63611111111$	$z_2 \approx 1.65277777778$
à 10^{-4} près	$w_{18} \approx 1.64484052923$	$z_8 \approx 1.64501464475$
à 10^{-6} près	$w_{87} \approx 1.64493309682$	$z_{26} \approx 1.64493502293$

On pourra comparer avec une valeur approchée de $\dfrac{\pi^2}{6}$:

```
evalf(Pi^2/6,30)
1.64493406684822643647241516664
```

114 **1. a.**



b. La suite semble être décroissante et converger vers 1.

2. a. Sur $]-2\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2}$; $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

Comme $f(1) = 1$, pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$.

On montre alors par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$:

Initialisation : $u_0 > 1$.

Hérédité : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n > 1$.

Alors $f(u_n) > 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.

b. On peut montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} < u_n$.

Initialisation : $u_1 = \dfrac{19}{7} < u_0$.

Hérédité : soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_{n+1} < u_n$.

Alors $1 < u_{n+1} < u_n$ par **a.** donc $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ par stricte croissance de f sur $]-2\,;+\infty[$ c'est-à-dire $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} < u_n$.

La suite est donc décroissante.

Étant décroissante et minorée par 1, la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 1$.

Alors, quand n tend vers $+\infty$, u_{n+1} tend vers ℓ et vers $\dfrac{4\ell-1}{\ell+2}$.

Par unicité de la limite de (u_{n+1}) tend vers ℓ et vers $\dfrac{4\ell-1}{\ell+2}$ soit $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$ d'où $\ell = 1$.

3. $v_{n+1} = \dfrac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-1} = \dfrac{u_n+2}{3u_n-3}$ donc

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+2}{3u_n-3} - \dfrac{1}{u_n-1} = \dfrac{1}{3}$ pour tout n.

La suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. $v_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}n$ donc $u_n - 1 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}n}$ soit $u_n = \dfrac{4n+15}{4n+3}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

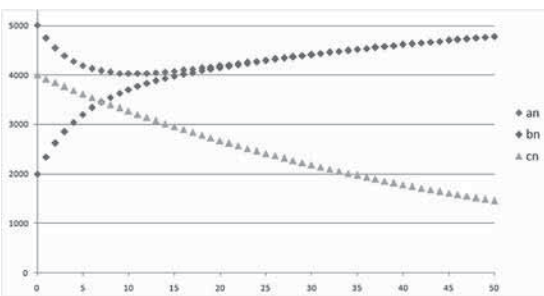
115 **1. a.** On a pour tout n,

$a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}1b_n + 0{,}1c_n$

$b_{n+1} = 0{,}9b_n + 0{,}1\,a_n + 0{,}01c_n$

$c_{n+1} = 0{,}98\,c_n$

Par exemple, avec un tableur on obtient le graphique :



2. Conjectures : (a_n) est semble commencer par décroître puis croître,

(b_n) semble croissante et (c_n) décroissante.

Il semble (voir site) que (c_n) ait pour limite 0 et (a_n) et (b_n) pour limite 5 500.

2. La suite (d_n) semble géométrique de raison 0,8.

3. a. (c_n) est géométrique de raison 0,98 donc pour tout n, $c_n = 0{,}98^n \times 4\,000$.

Pour tout n, $a_{n+1} - b_{n+1} = 0{,}8(b_n - a_n)$ donc $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison 0,8 et $b_n - a_n = 0{,}8^n \times 3\,000$ soit $d_n = 0{,}8^n \times 3\,000$.

b. Par énoncé, pour tout n,

$a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = 11000$

donc $a_n + b_n = 11000 - 0{,}98^n \times 4\,000$. (1)

De plus $b_n - a_n = 0{,}8^n \times 3\,000$. (2)

Par addition de (1) et (2) :

$b_n = 5\,500 - 0{,}98^n \times 2\,000 + 0{,}8^n \times 1\,500$

d'où $a_n = 5\,500 - 0{,}98^n \times 2\,000 - 0{,}8^n \times 1500$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 5\,500$.

116 **1.** La probabilité de $(X = 0)$ est la probabilité de n'avoir aucun succès au cours des n répétitions donc, les répétitions se faisant de façon identique et indépendantes :

$$P(X = 0) = (1-p)\ldots(1-p) = (1-p)^n.$$

De même, l'événement $(X = k)$ pour $k > 0$, correspond à k échecs lors des $k-1$ premières répétitions et un succès au cours de la k-ième donc $P(X = k) = (1-p)^{k-1}\,p$.

2. $E(X) = p(1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \ldots + n(1-p)^{n-1})$.

3. a. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$.

b. $f(x) = x(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = x\dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$.

Pour $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{(1-(n+1)x^n)(1-x) + (x - x^{n+1})}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{1 - x^n(n+1-nx)}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que pour tout $x \neq 1$,

$$1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 - x^n(n+1-nx)}{(1-x)^2} \quad (1)$$

Or $0 < p < 1$ donc $1 - p \neq 1$

donc en appliquant l'égalité (1) à $x = 1 - p$:

$$E(X) = p\frac{1-(1-p)^n(1+np)}{p^2}$$
$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p}(1-p)^n - n(1-p)^n.$$

B. 1. a. À l'aide d'un tableur par exemple :

p	0,1	0,2	0,5	0,8
limite conjecturée	10	5	2	1,25

b. On conjecture que E(X) a pour limite $\frac{1}{p}$.

2. a. Non, c'est une « forme indéterminée »

b. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}(1-p)$ tend vers $1-p$ quand n tend vers $+\infty$.

c. $1-p < 1-\frac{p}{2} \Leftrightarrow p > \frac{p}{2} \Leftrightarrow p > 0$.

Comme $p > 0$ par hypothèse, on a bien $1-p < 1-\frac{p}{2}$.

Tout intervalle ouvert contenant $1-p$, par exemple $\left]1-2p\,;1-\frac{p}{2}\right[$ contient tous les termes $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à partir d'un certain rang, donc il existe n_0 tel que pour tout $m \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1-\frac{p}{2}$.

De façon évidente, $0 \leqslant u_n$ pour tout n.

On a donc pour $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} < \left(1-\frac{p}{2}\right)u_n$ et, par une récurrence immédiate,

$u_n < \left(1-\frac{p}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$.

Donc pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n < \left(1-\frac{p}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$.

d. $0 < 1-\frac{p}{2} < 1$ donc $\left(1-\frac{p}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

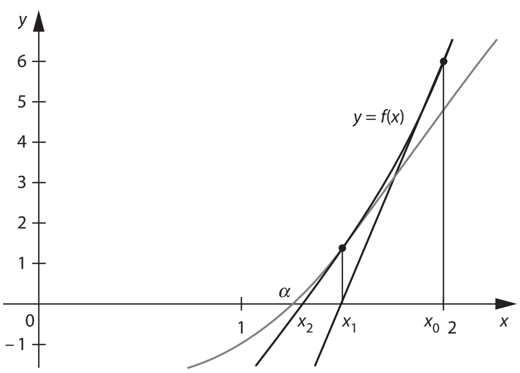
Par le théorème « des gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

De $E(X) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}(1-p)^n - u_n$, on déduit que E(X) tend vers $\frac{1}{p}$ quand n tend vers $+\infty$.

117 **1.** f est dérivable donc continue et strictement croissante sur [1 ; 2] (car $f'(x) > 0$) et $0 \in [f(1)\,; f(2)]$ puisque $f(1) = -1$ et $f(2) = 6$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle [1 ; 2].

2.



On conjecture que la suite (x_n) est décroissante et converge vers α.

3. a. Équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse t de [1 ; 2] : $y = f'(t)(x-t) + f(t)$

Alors $y = 0 \Leftrightarrow x = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$ car $f'(t) = 3t^2$ est non nul sur [1 ; 2].

b. α est tel que $f(\alpha) = 0$ d'où $g(\alpha) = \alpha$.

c. Par croissance de f, si $\alpha \leqslant t \leqslant 2$, $f(t) \geqslant 0$.

De plus $f'(t) = 3t^2 > 0$ donc $\frac{f(t)}{f'(t)} \geqslant 0$ et par suite, $g(t) \leqslant t$ pour tout t de $[\alpha; 2]$.

d. $g(t) = t - \frac{t^3-2}{3t^2} = t - \frac{1}{3}t + \frac{2}{3t^2} = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3t^2}$.

g est dérivable et $g'(t) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3t^3} = \frac{2t^3-4}{3t^3} = \frac{2f(t)}{3t^3}$.

e. $g'(t) \geqslant 0$ sur $[\alpha\,; 2]$ donc g est croissante sur $[\alpha\,; 2]$.

Par conséquent, pour $\alpha \leqslant t \leqslant 2$, $g(\alpha) \leqslant g(t) \leqslant g(2)$

soit $\alpha \leqslant g(t) \leqslant \frac{3}{2}$.

A fortiori, pour $\alpha \leqslant t \leqslant 2$, $\alpha \leqslant g(t) \leqslant 2$.

4. a. Démonstration par récurrence s'appuyant sur le résultat de la question **3.e.**

b. Pour tout $n \geqslant 0$, $\alpha \leqslant x_n \leqslant 2$ donc par la question **3.c.**, $g(x_n) \leqslant x_n$, c'est-à-dire $x_{n+1} \leqslant x_n$.

La suite (x_n) est décroissante.

c. (x_n) est décroissante et minorée par α donc converge et sa limite ℓ appartient à $[\alpha; 2]$.

De $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3x_n^2}$ on déduit par unicité de la suite (x_{n+1}) que $\ell = \frac{2}{3}\ell + \frac{2}{3\ell^2}$.

Sachant que ℓ appartient à $[\alpha; 2]$.

$\ell = \frac{2}{3}\ell + \frac{2}{3\ell^2} \Leftrightarrow \ell^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = \alpha$.

118 $u_n = \frac{2^2-1}{2^2}\frac{3^2-1}{3^2}\ldots\frac{n^2-1}{n^2}$

$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\ldots(n-1)(n+1)}{2^2 \times 3^2 \ldots \times n^2}$;

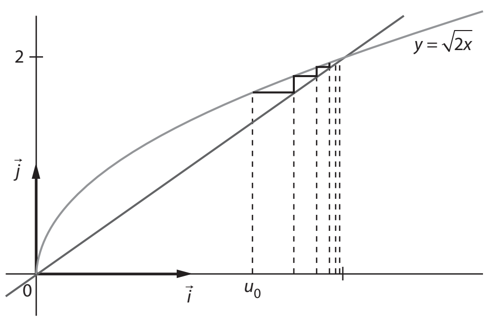
$u_n = \frac{1\times3\times2\times4\times3\times5\times\ldots\times(n-2)\times n\times(n-1)\times(n+1)}{2^2\times3^2\ldots\times n^2}$

$= \frac{n+1}{2n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

119 La suite est la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ avec $u_1 = \sqrt{2}$, et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Cette suite semble croissante et convergente, de limite 2.



On peut montrer par des récurrences immédiates que pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite (u_n) est donc croissante et majoré par 2 donc converge vers une limite ℓ appartenant à [0 ; 2].

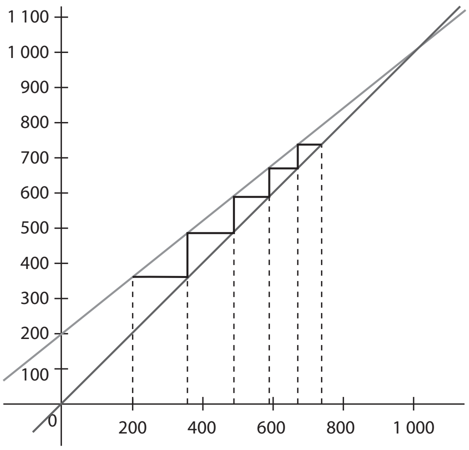
On montre ensuite par unicité de la limite de (u_{n+1}) que $\ell = \sqrt{2\ell}$ d'où $\ell = 0$ ou $\ell = 2$.

Pour tout n, $u_n \geqslant u_0$ donc $\ell \geqslant \sqrt{2}$ et par conséquent $\ell = 2$.

120 Soit t_n le nombre de truites l'année 2010 + n.

Alors $t_0 = 200$ et pour tout n, $t_{n+1} = 0{,}8\, t_n + 200$.

Une conjecture graphique montre que (t_n) semble converger vers 1 000.



Deux pistes principales :

1. Montrer par récurrence que (t_n) est croissante et majorée par 1 000. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite ℓ comme vérifiant $\ell = 0{,}8\,\ell + 200$.

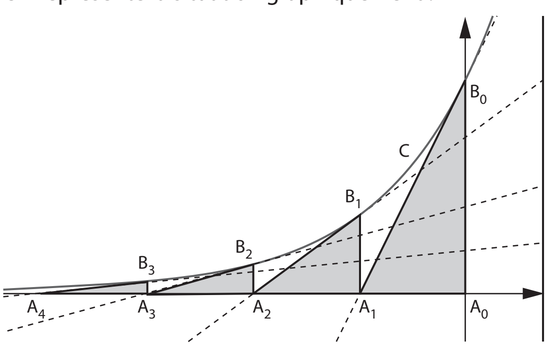
2. Introduire la suite (u_n) définie par $u_n = t_n - 1000$ pour tout $n \geqslant 0$.

Montrer que (u_n) est géométrique de raison 0,8, en déduire que (u_n) converge vers 0 puisque (t_n) converge vers 1 000.

La disparition de l'espèce sera donc enrayée.

121 Soit $f(x) = e^x$ pour tout réel x.

On représente la situation graphiquement :



- Il semble que $A_n(-n\,;0)$. Démontrons-le.

Soit a_n l'abscisse du point A_n pour tout $n \geqslant 0$.

La tangente en B_n a pour équation :

$y = f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n)$ donc

$y = 0 \iff x = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ car $f'(a_n) = e^{a_n}$ est non nul.

donc $a_{n+1} = a_n - \dfrac{e^{a_n}}{e^{a_n}} = a_n - 1$.

La suite (a_n) est arithmétique de raison -1.

Donc pour tout n, $a_n = a_0 - n = -n$.

- Calculons T_n :

$T_n = \dfrac{1}{2} A_n A_{n+1} \times A_n B_n = \dfrac{1}{2} e^{a_n} = \dfrac{1}{2} e^{-n}$

- Calculons $T_0 + T_1 + \ldots + T_n$:

$T_0 + T_1 + \ldots + T_n = \dfrac{1}{2}(1 + e^{-1} + (e^{-1})^2 + \ldots + (e^{-1})^n)$

$T_0 + T_1 + \ldots + T_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$.

Quand n tend vers $+\infty$, $T_0 + T_1 + \ldots + T_n$ tend vers $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{e}} = \dfrac{e}{2(e-1)}$.

123 Modèle 1 : il existe un réel a tel que pour tout n, $p_{n+1} = p_n + a p_n = (1 + a) p_n$.

De $p_0 = 100$ et $p_1 = 250$, on déduit que $p_{n+1} = 2{,}5 p_n$ d'où $p_n = 100 \times 2{,}5^n$.

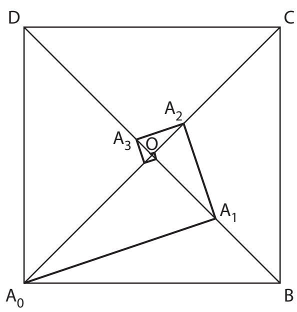
Modèle 2 : il existe un réel b tel que pour tout n, $p_{n+1} = p_n + b(10\,000 - p_n)$ soit

$p_{n+1} = 10\,000\, b + (1 - b) p_n$.

De p_0 et p_1 on déduit $b = \dfrac{1}{66}$ d'où

$p_{n+1} = \dfrac{65}{66} p_n + \dfrac{10\,000}{66}$.

On peut comparer les évolutions selon les trois modèles à l'aide d'une représentation graphique de ces trois suites : en bleu pour le modèle 1, en marron pour le modèle 2 et en orange pour le modèle 3.



Dans le modèle 1, la suite (p_n) a pour limite $+\infty$.

Dans le modèle 2, Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique qui (à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice) semble converger vers 10 000. On peut considérer la suite (u_n) définie par $u_n - 10\,000$ et vérifier qu'elle est géométrique. On en déduit u_n puis

$p_n = -9\,900\left(\dfrac{65}{66}\right)^n + 10\,000$.

On en déduit que (p_n) a pour limite 10 000

Dans le modèle 3, (p_n) convergence vers 10 000.

La population totale de la ville étant de 10 000 habitants, le modèle 1 ne peut pas convenir.

Dans les modèles 2 et 3, la rumeur va finir par toucher toute la population de la ville. C'est la vitesse de propagation de la rumeur qui distingue ces deux modèles. Le modèle 3 (modèle logistique) correspond à une rumeur qui se propage très vite au début puis dont la vitesse de propagation ralentit ensuite.

124 **1.** Raisonnons par l'absurde.

Si il existe un entier p tel que $a_p > b_p$ alors par croissance de (a_n) et décroissance de (b_n), on a pour tout $n \geqslant p$, $b_n \leqslant b_p < a_p \leqslant a_n$.

Donc pour tout $n \geqslant p$, $b_n - a_n \geqslant \alpha > 0$ où $\alpha = b_p - a_p$.

Si la suite $(b_n - a_n)$ a une limite finie, elle est supérieure ou égale à α donc non nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

Par suite, pour tout $n \geqslant 0$, $a_n \leqslant b_n$.

2. Pour tout $n \geqslant 0$, $a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$.

La suite (a_n) est donc croissante majorée par b_0 donc converge vers un réel ℓ.

La suite (b_n) est décroissante minorée par a_0 donc converge vers un réel ℓ'.

Alors la suite $(b_n - a_n)$ converge vers $\ell' - \ell$ donc $\ell' - \ell = 0$ soit $\ell' = \ell$.

125 Ce théorème est faux dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, si, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est l'approximation décimale de $\sqrt{2}$ par défaut à 10^{-n} près, la suite (u_n) est une suite de décimaux, donc de rationnels.

Comme pour tout n, $0 \leqslant \sqrt{2} - u_n \leqslant 10^{-n}$, par le théorème des « gendarmes », la suite (u_n) a pour limite $\sqrt{2}$ qui est irrationnel.

126 **1.** $u_{n+q} = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{q} + 2\pi\right) = u_n$ pour tout n.

2. $u_{nq} = \cos(2n\pi) = 1$ et $u_{nq+1} = \cos\left(2n\pi + \dfrac{2\pi}{q}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{q}\right)$.

3. Supposons que la suite (u_n) a une limite.

Pour tout n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc la limite de la suite (u_n) est une limite finie ℓ.

Si la suite (u_n) a pour limite ℓ alors la suite extraite (u_{nq}) a même limite ℓ.

Donc nécessairement, $\ell = 1$.

Pour $q \geqslant 2$, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{q}\right) < 1$.

Il existe donc un intervalle ouvert I contenant 1 et ne contenant pas $\cos\left(\dfrac{2\pi}{q}\right)$.

Alors pour tout n, u_{nq+1} n'appartient pas à I. Il est donc impossible de trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à I.

Donc 1 ne peut pas être la limite de la suite (u_n).

On en déduit que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Accompagnement personnalisé

1 Émettre des conjectures avec une calculatrice

1. a. $u_1 \approx 3{,}1$ et $u_2 \approx 2$.

b. D'après l'écran 3, on peut penser que la suite est strictement décroissante et non constante à partir de $n = 5$ comme le suggère l'écran 1.

c. La suite semble converger vers 1,7321 (écran 1), vers un peu moins de 2 (écran 2).

Sur l'écran 3, la suite vers l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$ et de la droite d'équation $y = x$.

Or $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right) = x \Leftrightarrow x^2 = 3$ pour $x \neq 0$. D'après l'écran 3, on conjecture donc que la suite converge vers $\sqrt{3}$.

2. a. Suite constante nulle.

	A	B
1	n	u_n
2	0	0
3	1	0
4	2	0
5	3	0
6	4	0
7	5	0
8	6	0

b. Ni monotone, ni convergente.

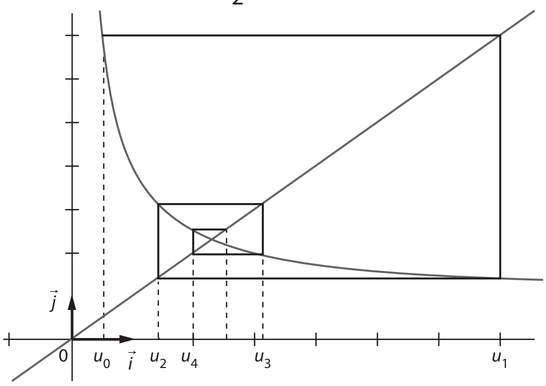
	A	B
1	n	u_n
2	0	2,5
3	1	2,25
4	2	1,5625
5	3	0,31641
24	22	1
25	23	0
26	24	1
27	25	0
28	26	1
29	27	0
30	28	1
31	29	0
32	30	1
33	31	0
34	32	1

Il semble que (u_{2n}) converge vers 1 et (u_{2n+1}) converge vers 0.

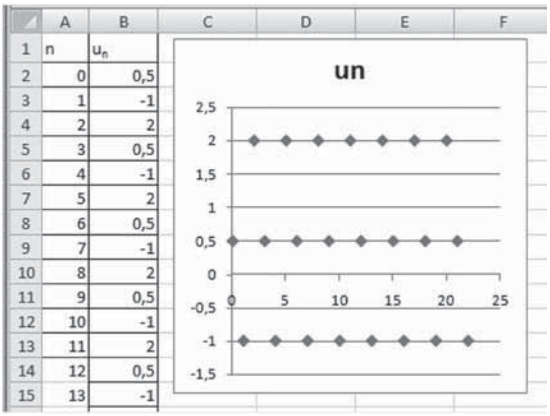
c. Non monotone, convergente vers environ 2,30278.

	A	B
1	n	u_n
2	0	0,5
3	1	7
4	2	1,42857
5	3	3,1
34	32	2,30278
35	33	2,30278
36	34	2,30278
37	35	2,30278
38	36	2,30278

Avec la représentation « web » : on conjecture que la suite converge vers $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.



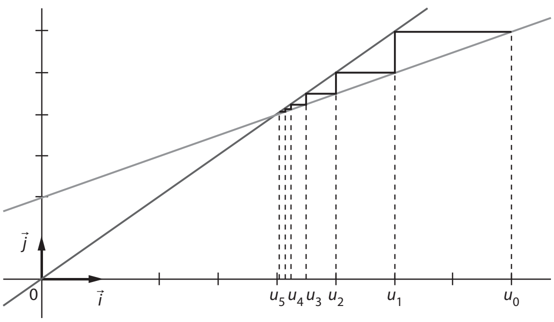
d. Ni monotone ni convergente (mais périodique).



	A	B
1	n	u_n
2	0	0,5
3	1	-1
4	2	2
5	3	0,5
6	4	-1
7	5	2
8	6	0,5
9	7	-1
10	8	2
11	9	0,5
12	10	-1
13	11	2
14	12	0,5
15	13	-1

② Montrer la convergence d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Étape 1



La suite semble décroissante, bornée par 4 et 8 et convergente vers 4.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $4 \leqslant u_n$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 = 8$. Donc $4 \leqslant u_0$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $4 \leqslant u_n$.

Alors $\dfrac{1}{2} \times 4 + 2 \leqslant \dfrac{1}{2}u_n + 2$ soit $4 \leqslant u_{n+1}$.

<u>Conclusion</u> : pour tout n de $\mathbb{N}$, $4 \leqslant u_n$.

2. Méthode 1 : par récurrence :

a. La fonction f est croissante sur $[4\,;+\infty[$.

b. On monte par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

<u>Initialisation</u> : $u_0 = 8$, $u_1 = 6$ donc $u_1 \leqslant u_0$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Alors $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc par croissance de f sur $[4\,;+\infty[$, $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ autrement dit $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

<u>Conclusion</u> : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Méthode 2 : comparer $f(x)$ et x :

a. $f(x) \leqslant x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x + 2 \leqslant x \Leftrightarrow 4 \leqslant x$.

Graphiquement, la droite représentant f est au-dessous de la droite d'équation $y = x$ sur $[4\,;+\infty[$.

b. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 4$ donc $f(u_n) \leqslant u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Méthode 3 : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:

Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}u_n + 2 - u_n = 2 - \dfrac{1}{2}u_n$.

De $u_n \geqslant 4$, on déduit que $2 - \dfrac{1}{2}u_n \leqslant 0$.

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

③ Gérer un Vrai/Faux

A. 1.

suite	p_n	q_n	r_n	s_n	t_n	v_n	w_n	z_n
graphique n°	8	1	6	7	3	2	4	5

2. a. Graphique 8 : (p_n)

b. Graphique 2 : (v_n)

c. Graphique 5 : (z_n)

d. Graphique 7 : (s_n)

e. Graphique 1 : (q_n)

f. Graphique 8 : (p_n)

g. Graphique 2 ou 3 ou 4 : (v_n) ou (t_n) ou (w_n)

h. Graphique 4 : (w_n)

B. a. Faux. Contre-exemple : suite (s_n)

b. Faux. Contre-exemple : suite (t_n)

c. Vrai

d. Faux. Contre-exemple : suite (t_n)

e. Faux. Contre-exemple : suite (w_n)

f. Faux. Contre-exemple : suite (q_n)

g. Faux. Contre-exemple : suite (p_n)

h. Faux. Contre-exemple : suite (p_n)

i. Vrai

j. Faux. Contre-exemple : suite (p_n)

k. Vrai

④ Approximation du nombre d'or

A. 1. a. $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$ à 10^{-2} près.

b. $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$ car $\varphi \neq 0$.

$\varphi > 0$ donc $\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{\varphi + 1}$.

2. AFED a pour dimensions $L - \ell = (\varphi - 1)\ell$ et ℓ.

Comme $\varphi - 1 < 1$, AFED a pour longueur ℓ et pour largeur $(\varphi - 1)\ell$ donc son format est $\dfrac{\ell}{(\varphi-1)\ell} = \dfrac{1}{\varphi - 1}$.

Or $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$ donc $\varphi - 1 = \dfrac{1}{\varphi}$ et le rectangle AFED a bien pour format φ lui aussi.

B. 1. u semble croissante, bornée et convergente vers le réel $x > 0$ tel que $x = \sqrt{x+1}$ soit $x^2 - x - 1 = 0$ donc vers φ.

v semble non monotone, bornée, convergente vers le réel $x > 0$ tel que $x = 1 + \dfrac{1}{x}$, soit $x^2 - x - 1 = 0$ donc vers φ.

2. a. Si $1 \leqslant x \leqslant 2$,

- $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant \sqrt{3}$ donc *a fortiori* $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.
- $1 + \dfrac{1}{2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{x} \leqslant 1 + 1$ donc *a fortiori* $1 \leqslant g(x) \leqslant 2$.

b. Démonstration par récurrence immédiate.

3. On montre par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$

<u>Initialisation</u> : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_0 \leqslant u_1$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Alors $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ donc par croissance de f sur $[1 ; 2]$, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ autrement dit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

<u>Conclusion</u> : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

La suite (u_n) croissante et majorée converge vers une limite ℓ qui appartient à $[1 ; 2]$.

Par unicité de la limite de (u_{n+1}^2), on a $\ell^2 = \ell + 1$ avec $\ell > 0$ donc $\ell = \varphi$.

4. a. $g(\varphi) = 1 + \dfrac{1}{\varphi} = \varphi$ par **A.1.b.**

Donc $g(x) - g(\varphi) = 1 + \dfrac{1}{x} - 1 - \dfrac{1}{\varphi} = -\dfrac{x - \varphi}{x\varphi}$.

De $v_{n+1} = g(v_n)$ et $g(\varphi) = \varphi$ on déduit que $v_{n+1} - \varphi = -\dfrac{v_n - \varphi}{v_n\varphi}$.

On sait que pour tout $n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 1$ donc $v_n\varphi$ est positif et par conséquent $v_{n+1} - \varphi$ et $v_n - \varphi$ sont de signes opposés. Donc v_n et v_{n+1} sont de part et d'autre de φ.

c. $| v_{n+1} - \varphi | = \dfrac{1}{v_n\varphi} | v_n - \varphi |$.

Pour tout $n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 1$ donc $0 < \dfrac{1}{v_n\varphi} \leqslant \dfrac{1}{\varphi}$ et par suite $| v_{n+1} - \varphi | \leqslant \dfrac{1}{\varphi} | v_n - \varphi |$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $|v_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|$.

<u>Initialisation</u> : $[v_0 - \varphi| = |1 - \varphi|$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|v_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|$.

Alors $|v_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi} |v_n - \varphi|$ avec

$\dfrac{1}{\varphi}|v_n - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|$ donc

$|v_{n+1} - j| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}|v_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |1 - \varphi|$.

A fortiori, $|v_{n+1} - j| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |1 - \varphi|$.

<u>Conclusion</u> : pour tout n de $\mathbb{N}$, $|v_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|$.

Comme $0 < \dfrac{1}{\varphi} < 1$, $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Par le théorème des « gendarmes », quand n tend vers $+\infty$, $|v_n - \varphi|$ tend vers 0 donc v_n tend vers φ.

5. $u_0 = 1 = \sqrt{1}$, $u_1 = \sqrt{1 + u_0} = \sqrt{1 + \sqrt{1}}$, $u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$, etc.

L'écriture $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$ traduit le fait que φ est la limite de (u_n).

De même $v_1 = 1 + \dfrac{1}{1}$, $v_2 = 1 + \dfrac{1}{v_1} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1}}$,

$v_3 = 1 + \dfrac{1}{v_2} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1}}}$, etc.

L'écriture $\varphi = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \ldots}}}$ traduit le fait que φ est la limite de (v_n).

⑤ Approximation de e

1. $u_2 = 2{,}5$; $v_2 = 2{,}75$.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ est positif pour tout n donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{nn!} = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$ est négatif pour tout n donc (v_n) est décroissante.

Pour tout n, $u_n \leqslant v_n$ donc $u_1 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$.
Donc (u_n) est majorée par v_1 et (v_n) est minorée par u_1.

c. (u_n) converge car c'est une suite croissante majorée et (v_n) converge car c'est une suite décroissante minorée.
Comme $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n, tend vers $+\infty$, les limites de (u_n) et (v_n) sont égales.

3. a. $f(0) = 1$.

b. f et g sont dérivables sur $[0\,;1]$.

$f'(x) = -\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{n!}(1 - x^n e^{-x})$.

f est décroissante sur $[0\,;1]$ donc $f(0) \geqslant f(1)$ soit $1 \geqslant u_n e^{-1}$ d'où $e \geqslant u_n$.
Sur $[0\,;1]$, $0 \leqslant x^n \leqslant 1$, $0 < e^{-x} \leqslant 1$ donc $1 - x^n e^{-x} \geqslant 0$.
Par conséquent $g'(x) \geqslant 0$ donc g est croissante et en particulier $g(0) \leqslant g(1)$ ce qui s'écrit encore $1 \leqslant u_n\, e^{-1} + \dfrac{1}{n!}$.

On en déduit que $e - \dfrac{e}{n!} \leqslant u_n$.

c. De $e - \dfrac{e}{n!} \leqslant u_n \leqslant e$ où $\dfrac{e}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$.
On sait alors que (u_n) est croissante de limite e donc pour tout n, $u_n \leqslant e$ et (v_n) est décroissante de limite e donc pour tout n, $e \leqslant v_n$.
D'où $u_n \leqslant e \leqslant v_n$ pour tout n.

d. Algorithme

ENTRÉE : Saisir k
INITIALISATION : u←1 ; n←1
TRAITEMENT : Tant que $\dfrac{1}{n!} > 10^{-k}$ faire
n←n+1
u←u+$\dfrac{1}{n!}$
v←u+$\dfrac{1}{nn!}$
FinTant que
AFFICHAGE : Afficher n, u, v

Programme AlgoBox

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  v EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE k
  n PREND_LA_VALEUR 1
  u PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (1/(n*ALGOBOX_FACTORIELLE(n)) >pow(10,-k)) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    u PREND_LA_VALEUR u+1/ALGOBOX_FACTORIELLE(n)
    v PREND_LA_VALEUR u+1/(n*ALGOBOX_FACTORIELLE(n))
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Pour n = "
  AFFICHER n
  AFFICHER u
  AFFICHER v
FIN_ALGORITHME
```

Programme Xcasfr

```
saisir(k);
n:=1 ;u:=1;v:=2;
tantque 1/(n*factorial(n))>10^(-k) faire
n:=n+1;
u:=u+1/factorial(n);
v:=u+1/(n*factorial(n));
ftantque;
afficher("Pour n = "+n);
afficher(u+ "<=e<= "+v);
afficher(evalf(u) + "<=e<= "+evalf(v))::
```

Sur AlgoBox
Pour $k = 6$, on obtient $n = 9$ et l'encadrement
$1.7182815 \leqslant e \leqslant 1.7182818$.
Pour $k = 12$, on obtient $n = 14$ et l'encadrement
$1.7182818 \leqslant e \leqslant 1.7182818$.

Sur Xcasfr
Pour $k = 6$, on obtient $n = 9$ et l'encadrement
$\dfrac{62353}{36288} \leqslant e \leqslant \dfrac{5611771}{3265920}$
soit environ $1.71828152557 \leqslant e \leqslant 1.71828183177$.
Pour $k = 12$, on obtient $n = 14$ et l'encadrement
$\dfrac{29959374721}{17435658240} \leqslant e \leqslant \dfrac{2097156230471}{1220496076800}$
soit environ $1.71828182846 \leqslant e \leqslant 1.71828182846$.

6 Approximation de π

1. Soit I le milieu de [AB]. OAB est isocèle en O donc IOB est rectangle en I et par conséquent
$IB = OB \times \sin\alpha_n = \sin\alpha_n$ car $OB = 1$.
Par suite $AB = 2IB = 2\sin\alpha_n$.
Le périmètre du polygone à 3×2^n côtés est donc $3 \times 2^n \times 2\sin\alpha_n$ et son demi-périmètre est
$p_n = 3 \times 2^n \sin\alpha_n$.
De même (A′B′) est tangente au cercle en I′ milieu de [A′B′] pour des raisons de symétrie, et OI′B′ est rectangle en I′. On a donc $I'B' = OI'\tan\alpha_n$ avec $OI' = 1$ donc $I'B' = \tan\alpha_n$.
Par conséquent $A'B' = 2\tan\alpha_n$.
On en déduit que $q_n = 3 \times 2^n \tan\alpha_n$.

2. a. On a $3 \times 2^n \times (2\alpha_n) = 2\pi$ donc $\alpha_n = \dfrac{\pi}{3 \times 2^n}$.

b. $\alpha_{n+1} = \dfrac{\pi}{3 \times 2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\alpha_n$.

- Montrons que $\sqrt{p_n\, q_{n+1}} = p_{n+1}$.

On a $\sin\alpha_n = 2\sin\dfrac{\alpha_n}{2}\cos\dfrac{\alpha_n}{2}$ donc

$p_n\, q_{n+1} = 3 \times 2^n \sin\alpha_n \times 3 \times 2^{n+1}\tan\dfrac{\alpha_n}{2}$;

$p_n\, q_{n+1} = 3^2\, 2^{2n+1}\, 2\sin\dfrac{\alpha_n}{2}\cos\dfrac{\alpha_n}{2}\tan\dfrac{\alpha_n}{2} = 3^2\, 2^{2n+2}\sin^2\dfrac{\alpha_n}{2}$

d'où $\sqrt{p_n\, q_{n+1}} = 3 \times 2^{n+1}\sin\dfrac{\alpha_n}{2}$ (les deux membres étant positifs) c'est-à-dire

$\sqrt{p_n\, q_{n+1}} = 3 \times 2^{n+1} \sin \alpha_{n+1} = p_{n+1}$.

- Montrons que $\dfrac{2p_n\, q_n}{p_n + q_n} = q_{n+1}$.

$\dfrac{2p_n\, q_n}{p_n + q_n} = \dfrac{3^2 \times 2^{2n+1} \sin\alpha_n \tan\alpha_n}{3 \times 2^n(\sin\alpha_n + \tan\alpha_n)} = 3 \times 2^{n+1} \dfrac{\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n + 1}$

Or $\sin \alpha_n = 2 \sin \dfrac{\alpha_n}{2} \cos \dfrac{\alpha_n}{2}$

et $\cos \alpha_n + 1 = 2 \cos^2 \dfrac{\alpha_n}{2}$

donc $\dfrac{2p_n\, q_n}{p_n + q_n} = 3 \times 2^{n+1} \tan\dfrac{\alpha_n}{2} = q_{n+1}$.

3. a. $q_{n+1} - q_n = q_n\left(\dfrac{2p_n}{p_n + q_n} - 1\right) = q_n \dfrac{p_n - q_n}{p_n + q_n}$.

Or, d'un point de vue géométrique, on a $q_n \geqslant p_n$ donc $q_{n+1} - q_n \leqslant 0$.

$p_{n+1} - p_n = \sqrt{p_n}\left(\sqrt{q_{n+1}} - \sqrt{p_n}\right)$.

Or $p_n < \pi$ et $\pi < q_{n+1}$ donc $p_n < q_{n+1}$ et par suite, $\sqrt{p_n} < \sqrt{q_{n+1}}$ d'où $p_{n+1} - p_n > 0$.

La suite (p_n) est donc croissante et la suite (q_n) décroissante.

b. (p_n) est croissante et majorée par π donc convergente. (q_n) est décroissante et minorée par π donc convergente.

4. a. Comme la suite (p_n) est croissante, on a $p_0 \leqslant \ell$.

De plus la suite (p_n) est majorée par π donc $\ell \leqslant \pi$.

De même (q_n) étant décroissante et minorée par π, on a $\pi \leqslant \ell' \leqslant q_0$.

b. La limite de $\left(\sqrt{p_n\, q_{n+1}}\right)$ est $\sqrt{\ell\ell'}$. De $\dfrac{2p_n\, q_n}{p_n + q_n} = q_{n+1}$, on déduit que la limite de $\left(\sqrt{p_n\, q_{n+1}}\right)$ est aussi ℓ'.

Par unicité de cette limite, $\sqrt{\ell\ell'} = \ell'$ d'où $\ell'(\ell - \ell') = 0$.

Comme $\ell' \geqslant \pi$ on est sûr que $\ell' \neq 0$ et on en déduit que $\ell' = \ell$.

c. On sait que $\ell' = \ell$ avec $\ell' \geqslant \pi$ et $\ell \leqslant \pi$. C'est donc que $\ell' = \ell = \pi$.

4. Algorithme

ENTRÉE : Saisir ε // ε réel strictement positif

INITIALISATION : n←1

TRAITEMENT : Tant que $3\times2^n \left(\tan\left(\dfrac{\pi}{3\times2^n}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3\times2^n}\right)\right) > \varepsilon$ Faire

nn+1

Fin Tant que

p←$3 \times 2^n \sin \dfrac{\pi}{3 \times 2^n}$

q←$3 \times 2^n \tan \dfrac{\pi}{3 \times 2^n}$

SORTIE : Afficher p, q

L'algorithme s'arrête car $3 \times 2^n \left(\tan\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)\right) = q_n - p_n$ tend vers 0 donc deviendra plus petit que ε à partir d'un rang donné et la condition de sortie de la boucle Tant que … Fin Tant que sera alors remplie.

CHAPITRE 5

Fonctions cosinus et sinus

Pour reprendre contact

1 Avec le repérage

1. a. -1 **b.** -1 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. a. $-\frac{1}{2}$ **b.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c.** -1 **d.** $\frac{1}{2}$

2 Avec les équations

a. Sur $[0\,;\pi[$, $x = \frac{\pi}{3}$. Sur $[0\,;2\pi[$, $x = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$. Sur $\mathbb{R}$, $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, ou $\frac{5\pi}{3} + k2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

b. Sur $]-\pi, 0]$, $x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $-\frac{\pi}{6}$. Sur $[0, 2\pi[$, $x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$. Sur $\mathbb{R}$, $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$, ou $-\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 Avec les propriétés de sinus et cosinus

1. a. $\cos t = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b. Voir les rappels de Première page 477.

2. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et de même, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

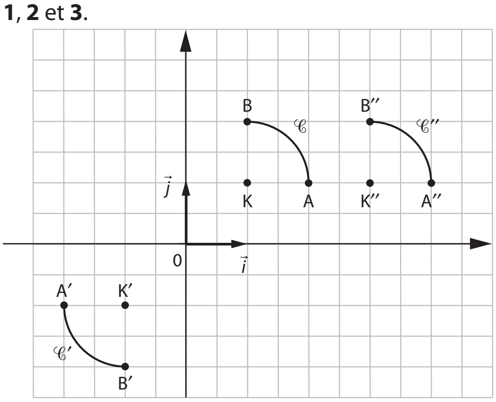
4 Avec la dérivation

1. Sur $\mathbb{R}$: **a.** $f'(x) = 2e^{2x+3}$ **b.** $f'(x) = -3e^{x-2}$

2. a. $g'(x) = 2f'(2x+3)$ **b.** $g'(x) = -3f'(-3x+1)$ **c.** $g'(x) = 3f(x)$ **d.** $g'(x) = -f'(-x)$

5 Avec des transformations

1, **2** et **3**.



4. a. $M'(-x\,;-y)$. **b.** $M''(2+x\,;y)$.

Activité 1. Fonctions cosinus et sinus sur [0 ; π]

A. Voir fichier sur le site Math'x.

B. 1. Quand t augmente de 0 à $\frac{\pi}{2}$, l'ordonnée de M augmente ; quand t augmente de $\frac{\pi}{2}$ à π l'ordonnée de M diminue.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1	↘ 0

2. La courbe représente la fonction sinus.

3. $(0\,;0)$, $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$, $(\pi\,;0)$

C. 1. Quand t augmente de 0 à π, l'abscisse de M diminue.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	0 ↘	1	↘ − 1

2. La courbe représente la fonction cosinus.

3. $(0\,;1)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $(\pi\,;-1)$

Activité 2. Fonctions cosinus et sinus sur ℝ

A. Voir fichier sur le site Math'x.

3. a. M et N semblent symétriques par rapport à l'origine O du repère.

b. $\overrightarrow{ON}(-t, \sin(-t))$ donc $\overrightarrow{ON}(-t, -\sin t) = -\overrightarrow{OM}$: O est le milieu de [MN].

4. a. $\overrightarrow{MP}$ semble constant.

b. $\overrightarrow{MP}(2\pi\,; \sin(t+2\pi) - \sin t)$ donc $\overrightarrow{MP}(2\pi\,;0)$.

La courbe de la fonction sinus est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Remarque : elle l'est aussi par toute translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

B. Voir fichier sur le site Math'x.

M et N semblent symétriques par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

b. $\overrightarrow{ON}(-t, \cos(-t))$ donc $\overrightarrow{ON}(-t, \cos t)$.

M et N sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées car ils ont même ordonnée et des abscisses opposées.

4. a. $\overrightarrow{MP}$ semble constant.

b. $\overrightarrow{MP}(2\pi\,; \cos(t+2\pi) - \cos t)$ donc $\overrightarrow{MP}(2\pi\,;0)$.

La courbe de la fonction cosinus est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Remarque : elle l'est aussi par toute translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. 2. La translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ semble transformer la courbe de la fonction cosinus en celle de la fonction sinus.

On peut créer un réel t (un curseur), puis le point M (t ; cos t), le vecteur $\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ puis le translaté M′ de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

3. On a M(t ; cos t) et $\overrightarrow{MM'}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ donc $M'(t + \frac{\pi}{2}\,; \cos t)$. Or $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$ donc $M'\left(t + \frac{\pi}{2}\,; \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ ce qui prouve que M′ appartient à la courbe de la fonction sinus.

De plus quand t décrit ℝ, $t + \frac{\pi}{2}$ décrit ℝ.

Donc la courbe de la fonction sinus est bien la translatée de celle de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

4. Graphiquement, on lit que :

– la courbe de la fonction sinus (resp. cosinus) admet une infinité de centres de symétrie : tous les points de coordonnées $(k\pi\,;0)$ (resp. $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\,;0\right)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

– la courbe de la fonction sinus (resp. cosinus) admet une infinité d'axes de symétrie : toutes les droites d'équation $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (resp. $x=k\pi$) pour $k \in \mathbb{Z}$.

On peut démontrer le résultat concernant les axes de symétrie :

– on sait déjà que la droite d'équation $x = 0$ est axe de symétrie pour la courbe de la fonction cosinus.

– La droite d'équation $x = \pi$ est aussi axe des symétries de la courbe de la fonction cosinus.

– Considérons pour tout t, les points $M(\pi-t\,;\cos(\pi-t))$ et $N(\pi+t\,;\cos(\pi+t))$ appartenant à la courbe de la fonction cosinus. Par propriété, $M(\pi-t\,;-\cos(t))$ et $N(\pi+t\,;-\cos(t))$, donc M et N sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \pi$;

– par des translations de vecteur $\pm 2\pi\vec{i}$, on en déduit les autres axes annoncés ;

– par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$, on déduit des axes de symétrie de la courbe de la fonction sinus.

On peut démontrer le résultat concernant les centres de symétrie :

– on sait déjà que l'origine du repère est centre de symétrie pour la courbe de la fonction sinus ;

– le point $A(\pi\,;0)$ est aussi centre de symétrie de la courbe de la fonction sinus ;

– considérons pour tout t, les points $M(\pi-t\,;\sin(\pi-t))$ et $N(\pi+t\,;\sin(\pi+t))$ appartenant à la courbe de la fonction sinus. Par propriété, $M(\pi-t\,;\sin(t))$ et $N(\pi+t\,;-\sin(t))$, donc M et N sont symétriques par rapport à A ;

– par des translations de vecteur $\pm 2\pi\vec{i}$, on en déduit les autres centres annoncés pour la courbe de la fonction sinus ;

– par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$, on déduit des axes de symétrie de la courbe de la fonction cosinus.

TP1. Le système bielle-manivelle

1. a. b. c. Voir fichier sur le site Math'x.

d. OB diminue quand t parcourt $[0\,;0{,}5]$ augmente quand t parcourt $[0{,}5\,;1]$, diminue quand t parcourt $[1\,;1{,}5]$, augmente quand t parcourt $[1{,}5\,;2]$.

e. Quand t augmente de 0 à 2 avec un pas régulier (on peut utiliser la flèche sur le fichier pour lancer l'animation), les points B obtenus ne sont pas régulièrement espacés.

La vitesse de B semble la plus grande pour $t = 0{,}2\,;0{,}8\,;1{,}2$ ou $1{,}8$ et la plus petite pour $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ soit $t=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ ou 2.

2. a. $A(\cos\theta\,;\sin\theta)$ soit $A(\cos(2\pi t)\,;\sin(2\pi t))$.

b. Soit H le projeté orthogonal de A sur (OB).

Dans le triangle AHB rectangle en H, $HB^2 = AB^2 - HA^2 = 9 - \sin^2\theta$.

Comme $AB > OA$, on en déduit que l'abscisse de B reste supérieure ou égale à 2, et que celle de $\overrightarrow{HB}$ est positive donc $\overrightarrow{HB}(\sqrt{9-\sin^2\theta}\,;0)$.

Or $\overrightarrow{OH}(\cos\theta\,;0)$ donc $\overrightarrow{OB}(\cos\theta+\sqrt{9-\sin^2\theta}\,;0)$.

L'abscisse de B étant positive, $OB = \cos\theta+\sqrt{9-\sin^2\theta} = \cos(2\pi t)+\sqrt{9-\sin^2(2\pi t)}$.

c. f est dérivable sur $[0\,;2]$ et $f'(t) = -2\pi\sin(2\pi t)+\dfrac{-2\times 2\pi\sin(2\pi t)\cos(2\pi t)}{2\sqrt{9-\sin^2(2\pi t)}}$

d'où $|f'(t)| = 2\pi|\sin(2\pi t)|\left|1+\dfrac{\cos(2\pi t)}{\sqrt{9-\sin^2(2\pi t)}}\right|$.

$|f'(t)| = 0 \Leftrightarrow \sin(2\pi t) = 0$ ou $\cos(2\pi t) = \sqrt{9-\sin^2(2\pi t)}$;

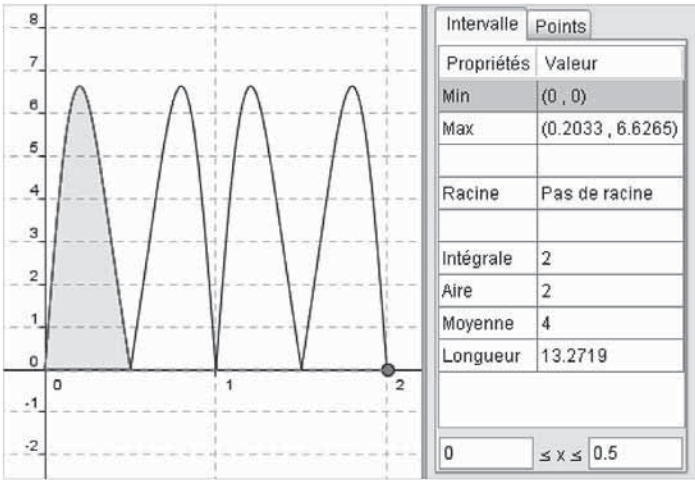
$\sin(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $\frac{1}{2}$ ou 1 ou $\frac{3}{2}$ ou 2 ;

$\cos(2\pi t) = \sqrt{9-\sin^2(2\pi t)} \Rightarrow \cos^2(2\pi t)+\sin^2(2\pi t) = 9$ ce qui est impossible.

Donc la vitesse est nulle pour $t = 0$ ou $\frac{1}{2}$ ou 1 ou $\frac{3}{2}$ ou 2.

d. On peut représenter la fonction $t \mapsto |f'(t)|$ sur [0 ; 2] et lire graphiquement une valeur approchée de son maximum : 6,64.

Par exemple sur GeoGebra avec l'outil Inspecteur de fonction :



Propriétés	Valeur
Min	(0 , 0)
Max	(0.2033 , 6.6265)
Racine	Pas de racine
Intégrale	2
Aire	2
Moyenne	4
Longueur	13.2719

0 ≤ x ≤ 0.5

Ce maximum serait atteint pour $t \approx 0{,}2$; 0,8 ; 1,2 ; 1,8.

TP2. Fonction $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$

A. 1. Voir fichier sur le site Math'x.

2. A est le maximum de f.

3. Pour tout réel t, $f\left(t + \dfrac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin(\omega t + 2\pi + \varphi) = f(t)$.

Quand ω augmente, T diminue donc la courbe semble se « resserrer ».

4. $g\left(t + \dfrac{\varphi}{\omega}\right) = A\sin(\omega t + \varphi) = f(t)$.

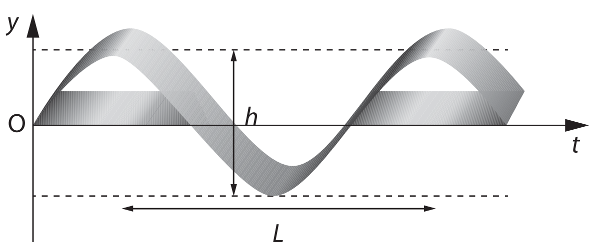
Soit M(t ; $f(t)$) et N($t + \dfrac{\varphi}{\omega}$; $g(t)$). On a alors $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\left(\dfrac{\varphi}{\omega} ; 0\right)$.

Donc N est le translaté de M par la translation de vecteur $\dfrac{\varphi}{\omega}\vec{i}$.

Quand t décrit $\mathbb{R}$, $t + \dfrac{\varphi}{\omega}$ décrit $\mathbb{R}$, donc on en déduit que la courbe représentant g est la translatée de celle de f par la translation de vecteur $\dfrac{\varphi}{\omega}\vec{i}$.

Par suite, la courbe représentant f se déduit de celle représentant g par la translation de vecteur $-\dfrac{\varphi}{\omega}\vec{i}$ de coordonnées $\left(-\dfrac{\varphi}{\omega} ; 0\right)$.

B. Si $f(t)$ exprime la hauteur d'eau en mètres dans le repère ci-dessous, $f(t) = 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{90}t\right)$.



TP3. Un réseau minimal

A. 1. a. Voir fichier sur le site sur le site Math'x.

b. Il semble que la longueur soit minimale quand E est le point d'intersection de [AC] et [BD].

2. a. Inégalité triangulaire : $AC \leqslant AE + EC$; de plus $AC = AE + EC \Leftrightarrow E \in [AC]$.
De même $BD \leqslant BE + ED$; $BD = BE + ED \Leftrightarrow E \in [BD]$.

b. $L = AE + EB + EC + ED \geqslant C + BD$ avec $L = AC + BD$ si et seulement si $E \in [AC]$ et $E \in [BD]$.

B. 1. Il semble que l'on puisse obtenir sur le logiciel une longueur inférieur à la longueur minimale obtenue dans la partie A.

2. a. On conjecture que la longueur minimale est environ 2,7.

b. Par symétrie, $AE = EB = FD = FC$ donc $L(t) = 4AE + EF$.
Soit I le milieu de [AB]. Alors le triangle EIA est rectangle en I car (EI) est aussi hauteur du triangle isocèle AEB donc $AE = \dfrac{AI}{\cos t} = \dfrac{1}{2\cos t}$ et $EI = AI \times \tan t = \dfrac{1}{2}\tan t$.

On en déduit, par symétrie, que $EF = AD - 2EI = 1 - \tan t$.
Par conséquent, $L(t) = \dfrac{2}{\cos t} + 1 - \tan t$.

b. L est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $L'(t) = \dfrac{2\sin t - 1}{\cos^2(t)}$.
Le signe de $L'(t)$ est celui de $2\sin t - 1 = 2\left(\sin t - \dfrac{1}{2}\right)$.
Pour $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{6}$, $\sin t \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $L'(t) \geqslant 0$, donc L est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{6}\right]$.
Pour $\dfrac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $\sin t \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $L'(t) \leqslant 0$, donc L est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.
L admet donc un maximum en $t = \dfrac{\pi}{6}$ et $L\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + 1 \approx 2{,}73$.

La longueur minimale avec un réseau à un nœud serait $AC + BD = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$.

Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 **a.** $\dfrac{1}{2}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
c. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2 **a.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b.** $\dfrac{1}{2}$
c. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3 **a.** $-\pi\,;\pi$ **b.** $-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}$
c. $-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{3}$ **d.** $-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}$

4 **a.** $-\dfrac{\pi}{2}$ **b.** $-\pi\,;0\,;\pi$
c. $-\dfrac{5\pi}{6}\,;-\dfrac{\pi}{6}$ **d.** $\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}$

5 **a.** $[-\pi\,;\pi]$ **b.** $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]$
c. $\left[-\pi\,;-\dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$ **d.** $\left]-\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{6}\right[$

6 **a.** $\cos a \geqslant \cos b$ **b.** $\sin a \leqslant \sin b$
c. $\cos a \leqslant \cos b$ **d.** $\sin a \leqslant \sin b$

7 **a.** $-6\sin(3x)$ **b.** $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$
c. $-2\sin\left(-2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **d.** $3\cos x + 3\cos(3x)$

8 Courbe en rouge : $y = 2\sin(x)$
Courbe en bleu : $y = 2\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

ENTRAÎNEMENT

9 **a.** $1 + \sin x$ **b.** $\sin x + x\cos x$
c. $2x + \cos x$ **d.** $2x\cos x - x^2\sin x$

10 **a.** $-2\sin(2x)$ **b.** $-12\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right)$
c. $-4\sin\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ **d.** $-4\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

11 **a.** $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$
b. $6\cos t\sin t = 3\sin(2t)$

c. $4\sin^3 t\cos t - 4\sin(4t)$

d. $-2\cos\left(-2t-\dfrac{\pi}{4}\right)$

12 **1.** $f'(t) = -2\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(2t-\dfrac{\pi}{3}\right)$

2. $f(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t)-\dfrac{1}{2}\sin(2t)+\dfrac{1}{2}\sin(2t)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t)=0$ pour tout réel t.

On en déduit que $f'(t) = 0$ pour tout réel t.

14 **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

b. $f'(x) = \dfrac{-\sin x - 2\cos^2 x}{\sin^3 x} = \dfrac{-1-\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

15 **1.** $f'(x) = -\sin x$; $f''(x) = -\cos x$; $f^{(3)}(x) = \sin x$.

2. Par récurrence :

Initialisation : l'égalité est vraie pour $n = 1$ car $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$. On suppose que $f^{(n)}(x) = \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Alors $f^{(n+1)}(x) = -\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$= \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

16 Voir corrigé en fin de manuel.

17 **1.** Soit [AB] un côté de ce polygone, I le milieu de [AB] et O le centre du cercle circonscrit au polygone.

AOB est isocèle et rectangle en O donc

$\widehat{IOB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\pi}{n}$ et $IB = OB\sin\widehat{IOB} = \sin\dfrac{\pi}{n}$.

Par conséquent $AB = 2\sin\dfrac{\pi}{n}$ et $p_n = 2n\sin\dfrac{\pi}{n}$.

2. $p_n = 2\pi\dfrac{\sin x}{x}$ avec $x = \dfrac{\pi}{n}$. Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Par théorème de composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 2\pi$, longueur du cercle de centre O et de rayon 1.

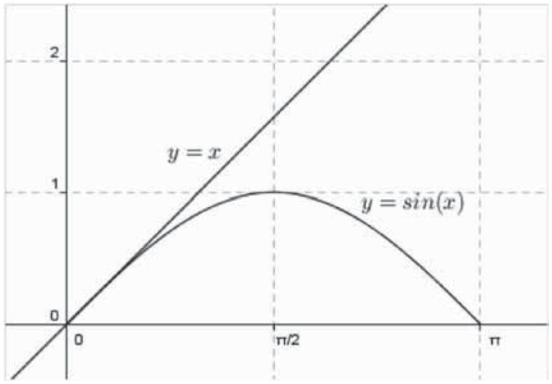
18 Voir corrigé en fin de manuel.

19 **1.** $S = \left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right[$

2. Abscisse de A : $\dfrac{2\pi}{3}$

3. La courbe est au-dessus de la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ sur $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right[$.

20 **1.** T : $y = x$



2. f est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et $f'(x) = 1-\cos x$ est toujours positive ou nulle.

Donc f est croissante sur $[0\,;\pi]$.

3. Pour tout x de $[0\,;\pi]$, on a donc $f(x) \geqslant f(0)$ donc $f(x) \geqslant 0$.

4. Pour tout x de $[0\,;\pi]$, $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \sin x$.

La tangente T est donc au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $[0\,;\pi]$.

22 **1. a.** Les points définissant cette ligne brisée ont pour coordonnées :

$(0\,;0)$, $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(\pi\,;0)$

$$\ell_4 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} + \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$\ell_4 = 2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{16}} + 2\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}+\frac{\pi^2}{16}} \approx 3{,}79.$$

b. Algorithme

```
ENTRÉE : Saisir n
INITIALISATION : L ← 0
TRAITEMENT : Pour k de 0 à n-1 Faire
        a ← k π/n
        b ← (k+1) π/n
        d ← √((b – a)² + (sin b – sin a)²)
        L ← L + d
    Fin Pour
SORTIE : Afficher L
```

2. Voir fichiers sur le site Math'x.

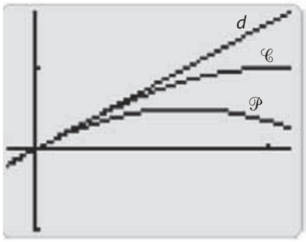
On obtient, par exemple sur Scilab :

$\ell_{10} \approx 3.8152827260884$

$\ell_{100} \approx 3.8201485186953$

$\ell_{1000} \approx 3.8201972963124$

23 **1.**



$\mathscr{P}$ parabole de sommet d'abscisse $1 < \frac{\pi}{2}$. La graduation visible sur l'axe des abscisses correspond donc à $\frac{\pi}{2}$ et celle sur l'axe des ordonnées à 1.

b. On peut conjecturer que pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \sin x \leqslant x$.

2. Voir les questions 2 et 3 de l'exercice 20.

3. a. u est dérivable et $u'(x) = -1 + \sin x$ donc $u'(x) \leqslant 0$ et par conséquent u et décroissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Comme $u(0) = 0$, on a $u(x) \leqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

b. g est dérivable et $g'(x) = u(x)$ donc $g'(x) \leqslant 0$ et g est décroissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

De $g(0) = 0$, on déduit que $g(x) \leqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

4. De $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \leqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on déduit que $x \geqslant \sin x \geqslant x - \frac{x^2}{2}$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ ce qui démontre les conjectures émises.

5. a. $x \geqslant \sin x \geqslant x - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^2}{2}$.

b. De l'encadrement précédent, on déduit que $\sin x \approx x$ à $\frac{x^2}{2}$ près sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $x^2 \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 0{,}1\sqrt{2}$.

$0{,}1\sqrt{2} \approx 0{,}141$ donc pour $0 \leqslant x \leqslant 0{,}14$ on est sûr que $\sin x \approx x$ à 10^{-2} près.

24 **1.** L'aire de la partie en bleu est $\frac{1}{2}r^2 \sin x$ où r est le rayon du cercle.

L'aire du secteur angulaire intercepté par l'angle de mesure x est $\frac{x}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{1}{2}r^2 x$ donc l'aire de la partie en bleu est $\frac{1}{2}r^2 x - \frac{1}{2}r^2 \sin x$.

Les aires des parties en bleu et en vert sont égales si et seulement si $\frac{1}{2}r^2 \sin x = \frac{1}{2}r^2 x - \frac{1}{2}r^2 \sin x$

soit $\sin x - \frac{x}{2} = 0$.

2. a. f est dérivable et $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$.

b. Sur $[0\,;\pi]$, $\cos x \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

c.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

d. Une solution triviale est $x = 0$ et il n'y a pas d'autre solution sur $\left]0\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

Sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$, f est continue car dérivable et strictement décroissante et $0 \in \left[f(\pi)\,;f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

On obtient à la calculatrice $x \approx 1{,}90$ à 10^{-2} près.

25 **1.** $h(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \frac{1}{5}V \sin\alpha$.

Donc $t_0 = \frac{1}{5}V \sin\alpha$.

2. $d(t_0) = V \cos\alpha t_0 = \frac{1}{5}V^2 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{10}V^2 \sin(2\alpha)$.

3. Dans cette question, $d(t_0) = 90\sin(2\alpha)$.

a. Le dégagement le plus long est obtenu pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et a pour longueur 90 m.

b. $d(t_0) = 50 \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \frac{5}{9}$. Pour $0 < 2\alpha < \pi$, il y a deux solutions : $2\alpha \approx 0{,}59$ ou $2 \approx \pi - 0{,}59\alpha$, c'est-à-dire $\alpha \approx 0{,}29$ ou $1{,}21$ en radian (soit 16, 6 ° ou 69,3°).

26 *Erratum : questions 3.b. et 3.c., remplacer* $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ *par* $[0\,;\pi]$.

1. $\widehat{BOM} = 2t$ (théorème de l'angle au centre)

2. Aire de HAM $= \frac{1}{2}$ AH $\times$ HM.

1[er] cas : H $\in$ [OB] : AH $= 1 +$ OH $= 1 + \cos(2t)$ et HM $= \sin(2t)$

2[e] cas : H $\in$ [AO] :

AH $= 1 -$ OH $= 1 - \cos(\pi - 2t) = 1 + \cos(2t)$

et HM $= \sin(\pi - 2t) = \sin(2t)$.

Dans les deux cas, l'aire de HAM est $\frac{1}{2}(1 + \cos(2t))\sin(2t)$ soit $f(2t)$.

3. a. f est dérivable et

$f'(x) = \frac{1}{2}(-\sin x)\sin x + \frac{1}{2}(1 + \cos x)\cos x$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos x$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x) + \frac{1}{2}\cos x$

$f'(x) = \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}$

On vérifie que $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(1 + \cos x) = \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}$.

b. Sur $[0\ ;\ \pi]$:

- $1 + \cos x > 0$
- $\cos x - \dfrac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{3}$

c. $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{3}\right]$, $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\pi\right]$.

4. On en déduit le sens de variation de f sur $[0\ ;\pi]$:

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0

$\dfrac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}65$ à 0,01 près. Sur $[0\ ;\pi]$, l'équation $f(x) = 0{,}5$ a deux solutions α et β avec $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3} < \beta < \pi$.

L'aire de HAM est $f(2t)$, donc est supérieure à 0,5 pour tout x de $\left[\dfrac{\alpha}{2};\dfrac{\beta}{2}\right]$.

27 **1.** $AH = \sin\alpha$; $DC = 1 + 2\cos\alpha$.

2. L'aire est égale à : $2 \times \left(\dfrac{1}{2}DH \times AH\right) + AH \times AB =$

$(DH + AB)\ AH = (1 + \ \cos\alpha)\sin\alpha$

3. a. A est dérivable avec $A'(\alpha) = -\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)\cos\alpha$ $= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos\alpha$.

b. Sur $[0\ ;\pi]$, $\cos t - \dfrac{1}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.

c. $A'(\alpha) = (\cos\alpha + 1)(2\cos\alpha - 1)$ d'après les résultats donnés par le logiciel.

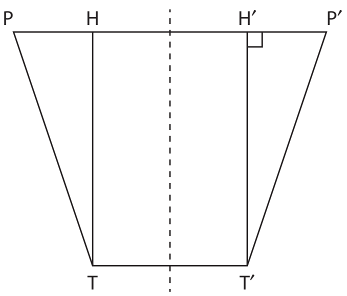
Comme $\cos\alpha + 1 \geqslant 0$, $A'(\alpha)$ est du signe de $2\cos\alpha - 1 = 2\left(\cos\alpha - \dfrac{1}{2}\right)$.

Sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{3}\right]$, $A'(\alpha) \geqslant 0$ donc A est croissante

Sur $\left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\pi\right]$, $A'(\alpha) \leqslant 0$ donc A est décroissante.

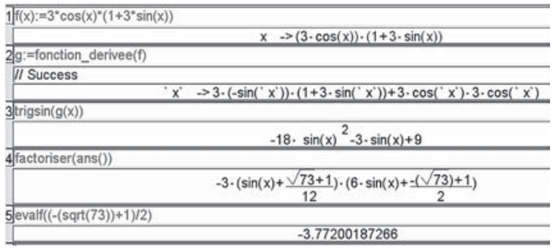
d. L'aire maximale est $A\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

28



L'aire de PP′T′T est égale à $TT' \times T'H' \ + H'P' \times T'H'$ $= (TT' + H'P')T'H' = (1 + 3\sin\alpha)\ 3\cos\alpha$ (en dm²), soit $3\cos\alpha(1 + 3\sin\alpha)$.

Avec Xcasfr



Pour $\alpha \in \left[0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin\alpha + \dfrac{\sqrt{73}+1}{12} > 0$

donc $A'(\alpha)$ est du signe de $-3(6\sin\alpha + m)$ où $m = \dfrac{\left(-\sqrt{73}+1\right)}{2} \approx -3{,}77$.

L'équation $\sin\alpha = -\dfrac{m}{6}$ a une unique solution $\alpha_0 \approx 0{,}68$.

Sur $[0\ ;\alpha_0]$, $A'(\alpha) \geqslant 0$ et sur $\left[\alpha_0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $A'(\alpha) \leqslant 0$.

Donc l'aire est maximale pour $\alpha = \alpha_0$ soit un angle d'environ 39°.

30 **1.** Abscisses de A : $-\dfrac{5\pi}{6}$; de B : $-\dfrac{\pi}{6}$; de C : $\dfrac{7\pi}{6}$; de D : $\dfrac{11\pi}{6}$.

2. $S = \left[-\pi\ ;-\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{11\pi}{6};2\pi\right]$

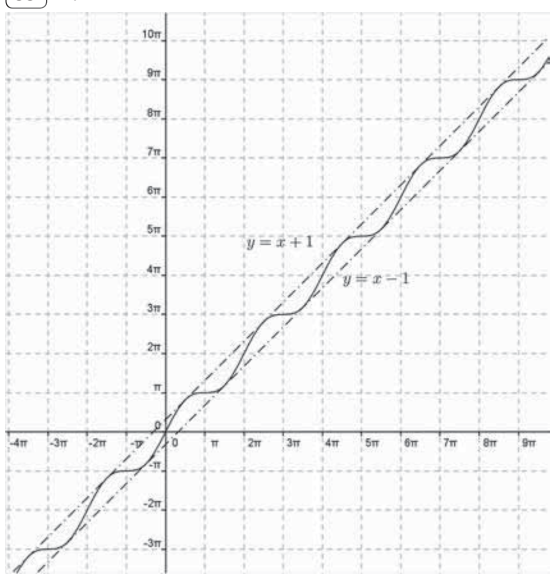
31 **1.** Abscisses de A : $-\dfrac{\pi}{3}$; de B : $\dfrac{\pi}{3}$; de C : $\dfrac{5\pi}{3}$.

2. $S = \left]-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{3};2\pi\right[$.

32 **2.**

x	0		$\dfrac{3\pi}{4}$		$\dfrac{5\pi}{4}$		2π
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

33 **1.**



2. f est dérivable et $f'(x) = 1 + \cos x$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Les tangentes horizontales à $\mathscr{C}$ sont les tangentes aux points de coordonnées $(\pi + k2\pi ; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. a. On constate que $\mathscr{C}$ est comprise entre les deux droites tracées.

b. Sur $\mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.

34 **1.** On cherche les abscisses des points d'intersection éventuels entre la courbe représentant la fonction cosinus et la droite d'équation $y = x$.
Il semble y avoir une unique solution.

2. Pour tout x, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, donc si x est solution de $x = \cos x$, alors $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

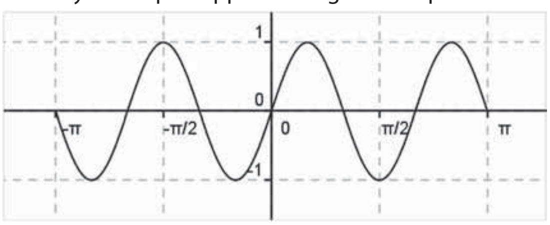
3. f est dérivable et $f'(x) = 1 + \sin x$.
$[-1;1] \subset \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc sur $[-1 ; 1]$, la fonction sinus est croissante donc $\sin(-1) \leqslant \sin x \leqslant \sin 1$ et par conséquent $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $[-1 ; 1]$.

3. a. La fonction f est strictement croissante continue car dérivable sur $[-1 ; 1]$ avec $f(-1) \approx -1{,}5$ et $f(1) \approx 0{,}46$. Donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[-1 ; 1]$ et donc aussi sur $\mathbb{R}$.

b. $x \approx 0{,}739$ à 10^{-3} près.

36 **1.** Pour tout x réel, $f(-x) = -f(x)$.
La fonction f est impaire.

2. Par symétrie par rapport à l'origine du repère :



3. $T = \dfrac{2\pi}{3}$; on vérifie que pour tout x réel,
$f\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x) = f(x)$.

38 **1.** Il semble que f soit paire.
Pour tout x réel, $f(-x) = -x\sin(-x) = x\sin(x) = f(x)$.

2. Il semble que $\mathscr{C}$ soit au-dessous de d sur $[0 ; +\infty[$ et au-dessus de d sur $]-\infty ; 0]$.
Il semble aussi que d soit tangente à la courbe $\mathscr{C}$.
Démonstrations :

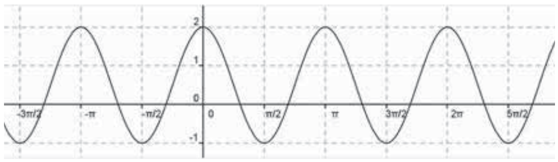
- Pour tout x réel, $\sin x \leqslant 1$ donc pour $x \geqslant 0$, $x\sin x \leqslant x$ et pour $x \leqslant 0$, $x\sin x \geqslant x$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessous de d sur $[0 ; +\infty[$ et au-dessus de d sur $]-\infty ; 0]$.
- $\mathscr{C}$ et d ont pour points communs les points de coordonnées $(0 ; 0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sin x + x\cos x$.

Pour $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $f'(x) = 1$ donc d est la tangente à $\mathscr{C}$ en tous les points de coordonnées
$\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

39 **1.** Sur tout $\mathbb{R}$, $f(-x) = 2\cos(-2x) + (\sin(-x))^2$
$= 2\cos 2x + \sin^2 x = f(x)$ donc f est paire.

2. Sur tout $\mathbb{R}$, $f(x + \pi) = 2\cos(2x + 2\pi) + (\sin(x + \pi))^2$
$= 2\cos(2x) + (-\sin x)^2 = f(x)$ donc f est périodique de période π.

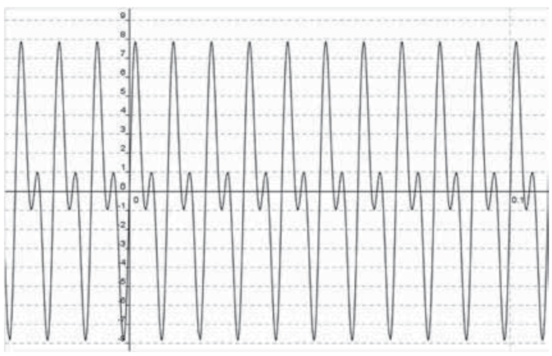
3. On complète la courbe d'abord par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour l'obtenir ainsi sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle d'amplitude π, puis par des translations de vecteur de coordonnées $(\pm\pi ; 0)$.



40 **1. a.** $T = \dfrac{9{,}1}{4} = 2{,}275$ ms.

b. $F \approx 440$ Hz

2. a. f semble périodique mais pas sinusoïdale.



b. $f(t + 0{,}01)(= 5\sin(200\pi t + 2\pi) + 4\sin(400\pi t + 4\pi)$
$= f(t)$ pour tout t réel.
Donc f est périodique de période 0,01 s.

41 **1.** Car cosinus est paire et sinus impaire.

b. Car les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

c. Algorithme

ENTRÉE : Saisir a
TRAITEMENT : Tant que a > π Faire
        a ← a – 2π
    FinTant que
SORTIE : Afficher a

2. On constate que les deux courbes sont presque confondues.

3. Algorithme

```
ENTRÉE : Saisir a
TRAITEMENT : Tant que a > π Faire
        a ← a – 2π
    FinTant que
    s ← (551 a^5 – 22260 a^3 + 166320a) / (75a^4 + 5460a^2 + 166320)
SORTIE : Afficher « approximation : », s
    Afficher « sin a : », sin(a)
```

On obtient sur Xcas fr

```
approximation : 0.956394926339
sin a :0.956375928405
```

42 **1.** Ordonnée de A : $2\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

2. $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} \leqslant 3x - \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{5\pi}{4}$.

Abscisse de B : x_B tel que $3x_B - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ soit $x_B = \dfrac{\pi}{4}$.

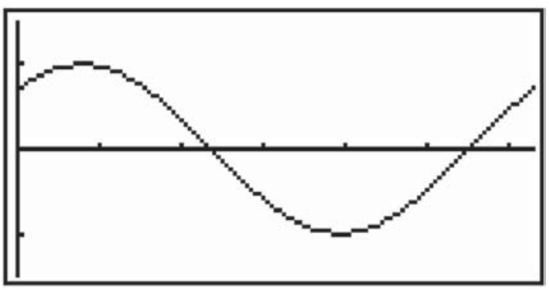
3. a. 6 solutions.

b. $-\pi \leqslant x \leqslant \pi \Leftrightarrow -3\pi - \dfrac{\pi}{4} \leqslant 3x - \dfrac{\pi}{4} \leqslant 3\pi - \dfrac{\pi}{4}$.

Les solutions x sont telles que $3x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{3} - 2\pi, -\dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi, \dfrac{\pi}{3} - 2\pi, \dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi$,

soit $x = -\dfrac{25\pi}{36}, -\dfrac{\pi}{36}, \dfrac{23\pi}{36}, -\dfrac{17\pi}{36}, \dfrac{7\pi}{36}$ ou $\dfrac{31\pi}{36}$.

44 **1.** Sur $[0\,;2\pi]$:



2. $t \in [0\,;2\pi] \Rightarrow t - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{7\pi}{4}\right]$.

3.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
$x = t - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	π	$\frac{7\pi}{4}$
$\cos x = g(t)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗ 1	↘ -1	↗ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

45 **a.**

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$u = 2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin u = f(x)$	0	↗ 1	↘ -1	↗ 0

b.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$u = 3x$	0	π	2π	3π
$\cos u = f(x)$	1	↘ -1	↗ 1	↘ -1

c.

x	0	π
$u = \frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin u = f(x)$	0	↗ 1

d.

x	0	π
$u = \frac{x}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$
$\cos u = f(x)$	1	↘ $\frac{1}{2}$

46 f a même sens de variation que la fonction $t \mapsto \sin\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

t	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$u = t + \frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$
$3\sin u = f(t)$	$-1{,}5$	↘ -3	↗ 3	↘ $-1{,}5$

47

t	0	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$u = 2t + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π	2π	$2\pi + \frac{\pi}{4}$
$\cos u = f(t)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘ -1	↗ 1	↘ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

48 **1.** f est paire car sur tout $\mathbb{R}$,
$f(-x) = (\sin(-x))^2\cos(-2x) = \sin^2 x\,\cos(2x) = f(x)$.

2. Pour tout x réel, $f(x+\pi) = (-\sin x)^2 \cos(2x+2\pi) = f(x)$.

3. On complète la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis on translate la courbe obtenue par des translations de vecteur de coordonnées $(k\pi\,;0)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = 4\sin x \cos x \cos 2x - 4\sin^2 x \sin 2x$.

b. $f'(x) = 4\sin x\,(\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x)$
$= 4\sin x \cos 3x$.

c. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geqslant 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\cos 3x$ avec $0 \leqslant 3x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

Donc sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$, $0 \leqslant 3x \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $f'(x) \geqslant 0$ par conséquent f est croissante, et sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi}{2} \leqslant 3x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ donc $f'(x) \leqslant 0$ et f est décroissante.

La fonction f admet donc son maximum en $\frac{\pi}{6}$; ce maximum est $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$.

49 **1.** $f(x) > 0$ comme produit de deux nombres strictement positifs.

2. a. $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right)$
$= \cos x + \sin x$.

b. $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -\sqrt{2}$ pour tout x donc

$2 + \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$, soit $2 + \cos x + \sin x > 0$.

c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -(2 + \sin x + \cos x)e^{1-x}$.

De **2.b.** et $e^{1-x} > 0$, on déduit que $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Sur $\mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 2 + \cos x \leqslant 3$.

Comme $e^{1-x} > 0$, $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{1-x}$.

b. Il suffit de prendre x_0 tel que $3e^{1-x_0} \leqslant 10^{-6}$ soit $x_0 \geqslant 1 - \ln\left(\frac{10^{-6}}{3}\right)$. Donc $x_0 = 16$ convient.

Sur $[16\,;+\infty[$, la courbe représentant f est située entre l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = 10^{-6}$.

50 **1.** Il semble que Γ soit située entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. La fonction f semble croissante puis décroissante puis croissante.

2. a. $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc
$-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

b. Il suffit de prendre x_0 tel que $e^{-x_0} \leqslant 0{,}01$ soit $x_0 \geqslant -\ln 0{,}01$. Par exemple $x_0 = 4{,}7$ convient.

Sur $[x_0\,;2\pi]$, la courbe représentant f est comprise entre les droites d'équations $y = -0{,}01$ et $y = 0{,}01$.

3. a. $f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. f est dérivable et $f'(x) = e^{-x}(-\sin x + \cos x)$ donc

$f'\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = -e^{-\frac{\pi}{2} - k2\pi}$.

Soit $g(x) = e^{-x}$. Alors g est dérivable et

$g'\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = -e^{-\frac{\pi}{2} - k2\pi}$.

Donc les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont la même tangente en chacun de leur point de contact.

4. $f(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$f'\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = -e^{\frac{\pi}{2} - k2\pi}$ et si

$h(x) = -e^{-x}$, $h'\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = -e^{\frac{\pi}{2} - k2\pi}$,

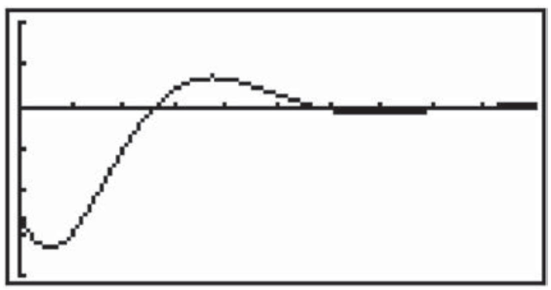
donc les courbes Γ et $\mathscr{C}'$ ont la même tangente en chacun de leur point de contact.

5. a.
$\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-x}\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right)$
$= e^{-x}(\cos x - \sin x) = f'(x)$.

b.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$u = t + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi + \frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$		$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$	$\nearrow$	0

51 **1.**



2. a. $f(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. $f(t + 2\pi) = e^{-\pi} f(t)$. Donc 2π n'est pas une période de f. En revanche 2π est période de $t \mapsto \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ partie de $f(t)$ responsable des oscillations autour de l'axe des abscisses qui se reproduisent périodiquement avec des amplitudes maximales qui vont en décroissant (oscillations amorties).

3. a. $\mathscr{C}$ est située entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

En effet pour tout t, $-1 \leqslant \cos\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right) \leqslant 1$ et $5e^{-\frac{t}{2}} > 0$,

donc $-5e^{-\frac{t}{2}} \leqslant f(t) \leqslant 5e^{-\frac{t}{2}}$.

52 **a.** Faux. Par exemple $x = 0$ est solution.
b. Faux. $2\sin x = \sin 2x \Leftrightarrow 2\sin x(1 - \cos x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos x = 1$ ou $\sin x = 0$.

Par exemple $x = \pi$ est solution de $2\sin x = \sin 2x$ mais n'est pas solution de $\cos x = 1$.

53 Faux. Contre exemple : $v_n = 2\pi - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

54 $y = 2{,}5\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$.

55 **1.** Dans [– 20 ; 74], il y a exactement 95 entiers relatifs. Chacun est l'abscisse d'un point de la courbe d'ordonnée 1. Avec 95 colonnes de pixels, les pixels visibles ont tous pour ordonnée 1.
La courbe tracée semble donc être la droite d'équation $y = 1$. Il s'agit en fait de points d'abscisses entières de la courbe d'équation $y = \cos(2\pi x)$.
2. Par exemple $-20 \leqslant x \leqslant 106$ et $-0{,}5 \leqslant y \leqslant 2$.

APPROFONDISSEMENT

74 **1.**

x	$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

2. a.
$f(\pi - x) + f(x) = (1 + \sin x)(-\cos x) + (1 + \sin x)\cos x = 0$
pour tout x réel.
b. Coordonnées du milieu de [MM′] : $\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

M et M′ sont symétriques par rapport au point A $\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

Quand x décrit $\mathbb{R}$, on en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à A.
c.

x	$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

75 **1. a.** Voir fichier sur le site Math'x.
c. On obtient des résultats qui semblent tous commencer par 0,999.

2. a. $\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$ donc

$\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$.

Pour $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos\dfrac{x}{2} > 0$ donc $\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$.

b. La variable a contient successivement : $\cos x$ (initialisation), $\cos\dfrac{x}{2}$ (pour $k = 0$), $\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$ (pour $k = 1$), …, $\cos\dfrac{x}{2^6}$ (pour $k = 5$).
Le nombre affiché par l'algorithme est donc $\cos\left(\dfrac{x}{2^6}\right)$.

c. Pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, on a $0 \leqslant \dfrac{x}{2^6} \leqslant \dfrac{\pi}{2^7}$ donc

$\cos 0 \geqslant \cos\dfrac{x}{2^6} \geqslant \cos\dfrac{\pi}{2^7}$.

Or $\cos\dfrac{\pi}{2^7} \approx 0{,}99699$, donc pour tout x de $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$0{,}999 \leqslant \cos\dfrac{x}{2^6} \leqslant 1$.

On obtient bien des résultats qui ont une écriture décimale commençant par 0,999, sauf pour $x = 0$ où le résultat affiché est 1.

76 Il suffit de trouver a et b tels que $\begin{cases} -a = b \\ b = 2a + 1 \end{cases}$
$a = -\dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$ conviennent.

77 **1. a.** Soit I le centre du cercle inscrit. En écrivant S comme somme des aires des triangles AIB, BIC et CIA, on obtient $s = \dfrac{1}{2}r(\text{AB} + \text{BC} + \text{CA})$

b. ABC étant isocèle, la bissectrice (AI) est aussi hauteur et médiane du triangle donc BC = 2D et dans le triangle rectangle BAD, $\text{BD} = \text{AB}\sin t$.

Donc $\text{BC} = 2a\sin t$.

c. On en déduit que $\text{S} = \dfrac{1}{2}r(\text{AB} + \text{BC} + \text{CA}) =$
$\dfrac{1}{2}r(2a + 2a\sin t) = ra(1 + \sin t)$.

Or $\text{S} = \dfrac{1}{2}\text{AB}\cdot\text{AC}\sin\widehat{\text{A}} = \dfrac{1}{2}a^2\sin 2t$.

Par suite, $ra(1 + \sin t) = \dfrac{1}{2}a^2\sin 2t$ d'où $r = \dfrac{1}{2}a\dfrac{\sin 2t}{1 + \sin t}$.

2. f est dérivable sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et

$f'(t) = \dfrac{1}{2}a\dfrac{2\cos 2t\,(1 + \sin t) - \sin 2t\cos t}{(1 + \sin t)^2}$.
Donc $f'(t)$ a même signe que
$g(t) = 2\cos 2t\,(1 + \sin t) - \sin 2t\cos t$
$g(t) = 2(1 - 2\sin^2 t)(1 + \sin t) - 2\sin t\,(1 - \sin^2 t)$
$g(t) = 2\,(1 - 2\sin^2 t - \sin^3 t)$
$g(t) = -2(\sin t + 1)(\sin^2 t + \sin t - 1)$.
Donc $f'(t)$ a même signe que $-(\sin t + 1)(\sin^2 t + \sin t - 1)$.

b. $1+\sin t \geqslant 0$ donc $f'(t)$ a le signe opposé à celui de $\sin^2 t+\sin t-1$.

$\sin^2 t+\sin t-1=0 \Leftrightarrow \sin t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ car $0\leqslant \sin t\leqslant 1$.

Il existe un unique $t_0\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin t_0=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Pour $0\leqslant t\leqslant t_0$, $\sin t\leqslant\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

donc $\sin^2 t+\sin t-1\leqslant 0$ et $f'(t)\geqslant 0$.

Pour $t_0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $\sin t\geqslant\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ donc

$\sin^2 t+\sin t-1\geqslant 0$ et $f'(t)\leqslant 0$.

Donc f atteint son maximum en $t_0\approx 0{,}67$.

c. L'aire du triangle est maximale quand $\widehat{A}=2t_0$ soit $\widehat{A}\approx 1{,}33$ rad ou 76,3 °.

78 **1. a.** $b=16-2x$ et si H est le milieu de [BC], $BH=\dfrac{b}{2}=x\cos\theta$ dans le triangle ABH rectangle en H. D'où $x=\dfrac{8}{1+\cos\theta}$ et $b=\dfrac{16\cos\theta}{1+\cos\theta}$.

b. $A(\theta)=\dfrac{1}{2}BC\cdot AH=\dfrac{1}{2}b\,x\,\sin\theta=64\,\dfrac{\sin\theta\,\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}$.

c. A est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $A(\theta)=64\,\dfrac{u(\theta)}{v(\theta)}$ avec $u(\theta)=\sin\theta\cos\theta$ et $v(\theta)=(1+\cos\theta)^2$ d'où

$A'(\theta)=64\,\dfrac{u'(\theta)v(\theta)-u(\theta)v'(\theta)}{(v(\theta))^2}$.

$u'(\theta)v(\theta)-u(\theta)v'(\theta)=$

$(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1+\cos\theta)^2+2\sin^2\theta\cos\theta(1+\cos\theta)=$

$(1+\cos\theta)((\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1+\cos\theta)+2\sin^2\theta\cos\theta)$

En remplaçant $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$:

$A'(\theta)=64\,\dfrac{2\cos^2\theta+\cos\theta-1}{(1+\cos\theta)^3}$.

Donc $A'(\theta)$ est du signe de $2\cos^2\theta+\cos\theta-1$ qui s'annule pour $\cos\theta=-1$ ou $\dfrac{1}{2}$.

Sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$, $\cos\theta\geqslant\dfrac{1}{2}$ donc $2\cos^2\theta+\cos\theta-1\geqslant 0$ et $A'(\theta)\geqslant 0$. Sur $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0\leqslant\cos\theta\leqslant\dfrac{1}{2}$ donc

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1\leqslant 0$ et $A'(\theta)\leqslant 0$.

A est donc maximale pour $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ c'est-à-dire quand le triangle est équilatéral.

3. On a le tableau de variations de A :

θ	0		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$A'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$A(\theta)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{64\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

Avec $\dfrac{64\sqrt{3}}{9}\approx 12{,}3$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $A(\theta)$ a deux solutions, une dans $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$, l'autre dans $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. À la calculatrice : $\theta\approx 0{,}53$ ou 1,39.

79 **1.** $\tan(\alpha)=\dfrac{37{,}3}{x}$; $\tan(\beta)=\dfrac{42{,}9}{x}$.

2.

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}=\frac{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta(\tan\beta-\tan\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta(1+\tan\alpha\tan\beta)}=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

3. a. $\tan'(\theta)=\dfrac{1}{\cos^2\theta}>0$ donc tan est strictement croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b. Conséquence immédiate de **a.**

4. f est dérivable sur [0 ; 100] et

$$f'(x)=\frac{5{,}6(x^2+1\,600{,}17)-11{,}2x^2}{(x^2+1\,600{,}17)^2}=\frac{5{,}6(-x^2+1\,600{,}17)}{(x^2+1\,600{,}17)^2}.$$

Donc sur [0 ; 100], f atteint son maximum en $x_0=\sqrt{1\,600{,}17}$.

b. $\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\dfrac{5{,}6}{x}}{1+\dfrac{1\,600{,}17}{x^2}}=\frac{5{,}6x}{x^2+1\,600{,}17}=f(x).$$

Donc l'angle de tir est maximal pour $x=x_0$ et de ce cas, $\tan\theta=f(x_0)=\dfrac{5{,}6\sqrt{1\,600{,}17}}{2\times 1\,600{,}17}$.

On obtient $f(x_0)\approx 0{,}069996$ soit $\theta\approx 4{,}0°$ à 0,1°.

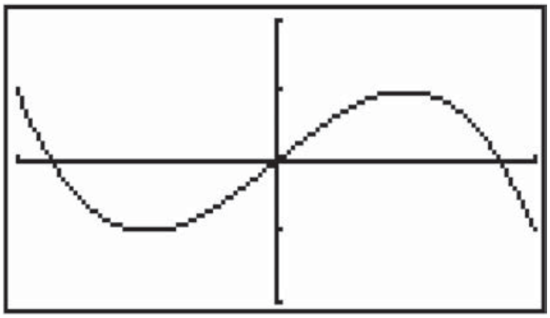
80 **a.** $\sin'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

b. $\sin'(\pi)=-1$

c. $-\cos'(0)=0$

d. $\dfrac{2}{3}\cos'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

81 **A. 1.**



On conjecture que f est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et que sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, l'équation $f(x) = a$ semble avoir une unique solution pour $0 < a < 1$.

2. f est dérivable avec $f'(x) = -12x^2 + 3 = -12\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$.

Sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ $f'(x) \geqslant 0$. f' ne s'annulant qu'en $\frac{1}{2}$, elle f est strictement croissante. Elle est continue car dérivable et $\left[f(0)\,; f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = [0\,;1]$.

Donc pour tout a tel que $0 < a < 1$, l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution.

B. 1. $\sin(3t) = (4\cos^2 t - 1)\sin t = (4(1-\sin^2 t) - 1)\sin t$
$= 3\sin t - 4\sin^3 t$.

2. $f(1°) = -4\,(\sin(1°))^3 + 3\sin(1°) = \sin(3 \times 1°) = \sin(3°)$.
Comme $0 < \sin(1°) < 1$, l'équation $f(x) = \sin(3°)$ a une unique solution entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et cette solution est donc $x = \sin(1°)$.

b. $f(x) = \sin(3°) \Leftrightarrow 4x^3 + \sin(3°) = 3x \Leftrightarrow g(x) = x$.

3. a. Algorithme

ENTRÉE : Saisir a

INITIALISATION : a $\leftarrow \frac{3}{60} + \frac{8}{60^2} + \frac{24}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{59}{60^5}$
$+ \frac{34}{60^6} + \frac{28}{60^7} + \frac{15}{60^8}$

t $\leftarrow \frac{1}{60}$

TRAITEMENT : Pour k de 1 jusque 9 Faire

t $\leftarrow \frac{4}{3}t^3 + \frac{a}{3}$

Fin Pour

SORTIE : Afficher t

b. Voir fichier sur le site Math'x.

c. On obtient, par exemple sur Xcasfr : 0.0174524064373

Sur une calculatrice Casio Graph 35 + :

$\sin 1° \approx 0{,}01745240644$

PROBLÈMES

82 **1. a.** f_1 semble strictement croissante sur $[0\,;2\pi]$.

b. f_1 est dérivable et $f_1'(x) = 1 + \cos x$ est positive ou nulle, ne s'annulant qu'en π sur $[0\,;\,2\pi]$ donc f_1 est strictement croissante sur $[0\,;2\pi]$.

2. $f_k(0) = 0$, $f_k(\pi) = \pi$, $f_k(2\pi) = 2\pi$ pour tout k.
$\mathscr{C}_k$ passe par les points de coordonnées $(0\,;0)$, $(\pi\,;\pi)$ et $(2\pi\,;2\pi)$ pour tout k.

3. a. $f_m'(0) = 1 + m$

b. $f_m'(0) = -1$ donc $m = -2$

c. $f'{}^{(x)}_{-2} = 1 - 2\cos x$.

D'où le tableau de variations de f_{-2} :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		2π
$f'_{-2}(x)$		–	0	+	
$f_{-2}(x)$	0	↘	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	↗	2π

f_{-2} atteint son minimum en $\frac{\pi}{3}$ et son maximum en 2π.

4. a. $\overrightarrow{MM'}(2\pi\,;2\pi)$

b. On obtient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_m$ sur $[2\pi\,;\,2\pi]$ en translatant les portions des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_m$ déjà tracées par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\,;2\pi)$.

83 **1.** $AD = \frac{4}{\cos\theta}$ et $CD = 7 + 4\tan\theta$ (en mètres).

$t_1 = \frac{AD}{30} = \frac{2}{15\cos\theta}$ et $t_2 = \frac{CD}{60} = \frac{7}{60} + \frac{1}{15}\tan\theta$ (en heures).

2. Dire que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion revient à dire que $t_1 < t_2$ soit $\frac{2}{15\cos\theta} < \frac{7}{60} + \frac{1}{15}\tan\theta$ ce qui équivaut à $f(\theta) > 0$.

3. f est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(\theta) = \frac{2 - 4\sin\theta}{\cos^2\theta}$ d'où le tableau de variations de f :

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f(\theta)$		+	0	–	‖
$f(\theta)$	– 0,5	↗	$\frac{7}{2} - 2\sqrt{3}$	↘	‖

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}036$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -1$.

Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$, f est continue car dérivable et strictement croissante et $0 \in \left[f(0)\,; f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$ donc il existe θ_0 tel que $f(\theta_0) = 0$.

Sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ f est continue car dérivable et strictement décroissante et $0 \in \left[f\left(\frac{\pi}{6}\right); f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ donc il existe θ_1 tel que $f(\theta_1) = 0$.

Pour $\theta \leqslant \theta_0$ et pour $\theta \geqslant \theta_1$, $f(\theta) \leqslant 0$ d'après le sens de variation de f.

Le lapin peut traverser avant l'arrivée du camion pour $\theta_0 < \theta < \theta_1$ où $\theta_0 \approx 0{,}4$ par excès et $\theta_1 \approx 0{,}64$ par défaut (soit entre 23° et 36° environ).

84 *Erratum : question B.1.b., remplacer u_n par S_n.*

A. 1. f, g, h sont dérivables.

$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ donc f est croissante sur $[0\,;\pi]$.

Pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $f(0) \leqslant f(x)$ soit $0 \leqslant f(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

2. $g'(x) = f(x)$ donc g est croissante sur $[0\,;\pi]$.

Pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $g(0) \leqslant g(x)$ soit $0 \leqslant g(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

$h'(x) = g(x)$. Donc h est croissante sur $[0\,;\pi]$.

De $h(0) = 0$, on déduit à nouveau que $h(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$.

3. $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \sin x$ sur $[0\,;\pi]$

et $h(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x$ sur $[0\,;\pi]$.

B. 1. a. Voir fichier sur le siteMath'x.

On conjecture que la suite (S_n) converge vers 0,5.

b. $S_n \approx 0{,}5$ à 10^{-4} près si et seulement si

$0{,}4999 \leqslant S_n \leqslant 0{,}5001$.

Le premier entier n tel que $S_n \approx 0{,}5$ à 10^{-4} près est 5 000.

2. a. $V_n = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{2}$.

b. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ est la somme de n termes tous inférieurs ou égaux à n^3 donc

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leqslant n \times n^3$ soit $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leqslant n^4$.

c. Pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3 \leqslant \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$ donc en sommant de $k = 1$ à n :

$V_n - \frac{1}{6}\frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^6} \leqslant S_n \leqslant V_n$.

Or $-\frac{1}{6}\frac{n^4}{n^6} \leqslant -\frac{1}{6}\frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^6}$ donc

$V_n - \frac{1}{6}\frac{1}{n^2} \leqslant S_n \leqslant V_n$.

4. Par le théorème « des gendarmes », la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

85 On conjecture que pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

<u>Démonstration</u>

Soit $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

- De $f'(x) \geqslant 0$, on déduit que f est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $f(x) \geqslant f(0)$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant 0$ ou encore $\sin x \leqslant x$.
- $g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$. Soit $x_0 \approx 0{,}88$ le réel de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ solution de l'équation $\cos x = \frac{2}{\pi}$. Alors g est croissante sur $[0\,;x_0]$ et décroissante sur $\left[x_0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

De $g(0) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on déduit que $g(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$.

86 On peut émettre une conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie ou d'un tableur.

Soit $d_a(x) = f_a(x) - g_a(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

d_a est dérivable et $d'_a(x) = a(\cos(ax) - \cos x)$.

Pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et $0 < a < 1$, $0 \leqslant ax < x \leqslant \pi$ donc $\cos(ax) \geqslant \cos(x)$.

D'où $d'_a(x) \leqslant 0$ donc d_a est croissante sur $[0\,;\pi]$.

Par suite $d_a(x) \geqslant d_a(0)$ soit $d_a(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$.

Donc $f_{a(x)} \geqslant g_a(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

87 Longueur du trajet rouge : $R(t) = 1 + \cos t$.

Longueur du trajet vert : $V(t) = t$.

On étudie la fonction f définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = V(t) - R(t) = t - 1 - \cos t$.

f est dérivable et $f'(t) = 1 + \sin t > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0\,;\pi]$.

$f(0) = -2$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$ donc $0 \in \left[f(0)\,; f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

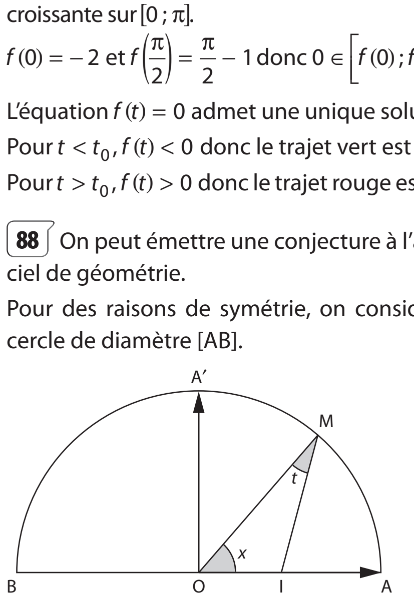
L'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution $t_0 \approx 1{,}29$.

Pour $t < t_0$, $f(t) < 0$ donc le trajet vert est le plus court.

Pour $t > t_0$, $f(t) > 0$ donc le trajet rouge est le plus court.

88 On peut émettre une conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie.

Pour des raisons de symétrie, on considère un demi-cercle de diamètre [AB].



On considère le repère orthonormé $(O\,;\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ comme sur la figure ci-dessus et on note $x = \overrightarrow{OM}$, donc

M a pour coordonnées (cos x ; sin x) et a l'abscisse de I, $0 < a < 1$.

Alors

$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MI} = MO \times MI \times \cos t = \sqrt{(a-\cos x)^2 \ +\sin x^2}\ \cos t$

car OM = 1. D'autre part, $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MI} = (-\cos x)(a-\cos x)$ $+ (-\sin x)(-\sin x) = -a\cos x + 1$

On en déduit que

$\cos t = \dfrac{-a\cos x + 1}{\sqrt{(a-\cos x)^2 + \sin x^2}} = \dfrac{-a\cos x + 1}{\sqrt{1-2a\cos x + a^2}}$

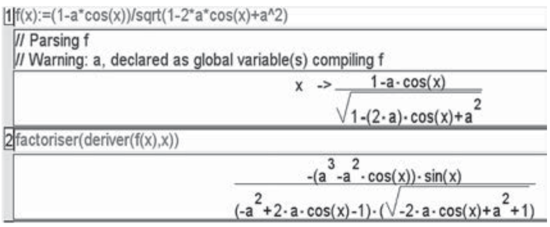
car $\sqrt{(a-\cos x)^2 \ +\sin x^2}$ ne peut pas s'annuler pour $-1 < a < 1$.

Sur $[0\,;\pi]$, la fonction cosinus est décroissante donc chercher t maximal, c'est chercher cos t minimal.

Soit $f(x) = \dfrac{-a\cos x + 1}{\sqrt{1-2a\cos x + a^2}}$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

On montre (par exemple avec un logiciel de calcul formel) que $f'(x) = \dfrac{a^2(a-\cos x)\sin x}{(1-2a\cos x + a^2)\sqrt{1-2a\cos x + a^2}}$

Avec Xcasfr par exemple :



Or $a^2\sin x \geqslant 0$ et $1-2a\cos x + a^2 = (a-\cos x)^2 + \sin x^2$ est positif également donc $f'(x)$ a le signe de $a - \cos x$.

Donc f est minimale pour $x = x_0$ où x_0 est l'unique réel de $[0\,;\pi]$ solution de $\cos x = a(-1 < 0 < a)$, autrement dit quand l'abscisse de M est égale à celle de I.

Pour que $\widehat{OMI}$ soit maximal il faut donc placer M comme l'un des points d'intersection du cercle et de la perpendiculaire à (AB) passant par I.

Remarque : on pourrait aussi nommer $(X\,;Y)$ les coordonnées de M avec $X^2 + Y^2 = 1$ et se ramener à l'étude de la fonction $X \mapsto \dfrac{1-aX}{\sqrt{1-2aX + a^2}}$.

90 On cherche à maximiser $\dfrac{\cos\theta}{d^2}$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

On a $\sin\theta = \dfrac{r}{d}$ donc $\dfrac{\cos\theta}{d^2} = \dfrac{\cos\theta\sin^2\theta}{r^2}$.

Soit $f(\theta) = \sin^2\theta\cos\theta$ pour $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

f est dérivable et $f'(\theta) = \sin\theta\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$

$f'(\theta) = \sin\theta\left(2 - 3\sin^2\theta\right)$.

On en déduit que l'éclairement est maximal pour $\theta = \theta_0$, solution de l'équation $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

La hauteur h correspondante est $h = \dfrac{r}{\tan\theta}$ où

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{2}{3}}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}} = \sqrt{2}$. Donc $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r$.

91 **1.** $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = P_2(\cos t)$.

2. $\cos((n+1)t) = \cos(nt)\cos t - \sin(nt)\sin t$

$\cos((n-1)t) = \cos(nt)\cos t + \sin(nt)\sin t$

d'où le résultat par addition.

3. La formule de la question **2** avec $n = 2$ donne

$\cos(3t) + \cos t = 2\cos(2t)\cos t$

donc $\cos(3t) = -\cos t + 2P_2(\cos t)\cos t = P_3(\cos t)$

avec $P_3(x) = -x + 2\left(2x^2 - 1\right)x = 4x^3 - 3x$.

La formule de la question **2** avec $n = 3$ donne

$\cos(4t) + \cos(2t) = 2\cos(3t)\cos t$

donc $\cos(4t) = -\cos(2t) + 2\cos(3t)\cos(t)$

$\cos(4t) = -P_2(\cos t) + 2P_3(\cos t)\cos t$

soit $\cos(4t) = P_4(\cos t)$

avec $P_4(x) = -P_2(x) + 2xP_3(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

On applique la formule de la question **2** :

$\cos((n+1)t) + P_{n-1}(t) = 2P_n(t)\cos t$

donc $\cos((n+1)t) = P_{n+1}(\cos t)$ avec

$P_{n+1}(x) = -P_{n-1}(x) + 2xP_n(x)$.

On en déduit par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $\cos(nt) = P_n(\cos t)$ où la suite de polynômes P_n est définie par $P_2(x) = 2x^2 - 1$, $P_3(x) = 4x^3 - 3x$ et pour tout $n \geqslant 3$, $P_{n+1}(x) = -P_{n-1}(x) + 2xP_n(x)$.

5. a. $P_5(x) = -P_3(x) + 2xP_4(x) = -4x^3 + 3x + 16x^5 - 16x^3 + 2x$

$P_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

Équation $P_5(x) = 0$:

$P_5(x) = x(16x^4 - 20x^2 + 5)$

$P_5(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.

$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 16X^2 - 20X + 5 = 0$ avec $X = x^2$

d'où les solutions $X = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$ et $X = \pm\sqrt{\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$.

L'équation $P_5(x) = 0$ a donc 5 solutions : 0 et $\pm\sqrt{\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$.

b. $P_5(\cos t) = \cos(5t)$.

Or $\cos(5t) = 0 \Leftrightarrow 5t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\dfrac{7\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)$ sont solutions de $P_5(x) = 0$.

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) > 0$, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right) > 0$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$,

$\cos\left(\dfrac{7\pi}{10}\right) = -\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right) < 0$, $\cos\left(\dfrac{9\pi}{10}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) < 0$

donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$ sont deux solutions positives de $P_5(x) = 0$.

De plus $0 < \dfrac{\pi}{10} < \dfrac{3\pi}{10} < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\dfrac{\pi}{10} > \cos\dfrac{3\pi}{10}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ sont deux solutions positives distinctes de $P_5(x) = 0$ et compte tenu des solutions trouvées, on peut conclure que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

92 On peut émettre des conjectures avec un logiciel.

Ensemble de définition

$1 - 2k\cos x + k^2 = (k - \cos x)^2 + \sin^2 x$ reste toujours positif ou nul.

Il ne peut s'annuler que si l'on a à la fois $\sin x = 0$ et $\cos x = k$ ce qui est impossible car $k \neq 1$ et $k \neq -1$.

Donc f_k est définie sur $\mathbb{R}$.

Périodicité, parité

Pour tout x réel, $f_k(x + 2\pi) = f_k(x)$.

Pour tout x réel, $f_k(-x) = f_k(x)$ donc f_k est impaire

On peut donc réduire l'étude de f_k à $[0 ; \pi]$.

Sens de variation sur $[0 ; \pi]$

$f_k(x) \geqslant 0$ donc f_k a même sens de variation que $f_k^2 : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{1 - 2k\cos x + k^2}$.

$(f_k^2)'(x) = 2\dfrac{\sin x\ (k - \cos x)\ (k\cos x - 1)}{(1 - 2k\cos\ x + k^2)^4}$.

Le sens de variation est donc donné par le signe de $(k - \cos x)(k\cos x - 1)$.

• 1er cas : si $-1 < k < 1$, il existe un unique réel x_k de $[0 ; \pi]$ tel que $\cos x = k$, et dans ce cas, $k\cos x - 1 < 0$.

La fonction f_k est alors croissante sur $[0 ; x_k]$ et décroissante sur $[x_k ; \pi]$.

• 2e cas : si $k < -1$ ou $k > 1$, il existe un unique réel x_k de $[0 ; \pi]$ tel que $\cos x = \frac{1}{k}$, et dans ces deux cas $k - \cos x$ a même signe que k. En étudiant les deux cas $k < -1$ et $k > 1$ séparément, on obtient que la fonction f_k est croissante sur $[0 ; x_k]$ et décroissante sur $[x_k ; \pi]$.

Accompagnement personnalisé

1 Lier cercle trigonométrique et courbes

1. a. $A\left(-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{7\pi}{6} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b. Les solutions dans $[-\pi ; \pi]$: $-\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$; dans $[0 ; 2\pi]$: $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

c. Dans $[-\pi ; \pi]$: $S = \left[-\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right]$;

dans $[0 ; 2\pi]$: $S = \left[0 ; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} ; 2\pi\right]$.

d.

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
signe de $2\cos x + \sqrt{3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	0		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		2π
signe de $2\cos x + \sqrt{3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a. $A\left(-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\pi}{6} ; -\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{7\pi}{6} ; -\frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{11\pi}{6} ; -\frac{1}{2}\right)$.

b.

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		π
signe de $1 + 2\sin x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
signe de $1 + 2\sin x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2 Travailler avec des polynômes en cos *x* ou sin *x*

1. a. $f'(x) = -\sin x - \cos(2x) = -\sin x - (1 - 2\sin^2 x)$

$= 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 2X^2 - X - 1$

b. $f'(x) = (X - 1)(2X + 1) = (\sin x - 1)(2\sin x + 1)$

c. f est décroissante sur $\left[-\pi ; -\frac{5\pi}{6}\right]$ et sur $\left[-\frac{\pi}{6} ; \pi\right]$, croissante sur $\left[-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}\right]$.

2. a. $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

f est décroissante sur $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$, croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$.

b. $f'(x) = 2\sin^2 x - 8\sin x + 2 = 2(2\sin x - 1)^2$.

f est croissante sur $[-\pi ; \pi]$.

c. $f'(x) = 2\sin^2 x + \sin x + 4$ toujours positif, donc f est croissante sur $[-\pi ; \pi]$.

d. $f'(x) = -3\sin(3x) + 3\sin x$ avec $\sin(3x)$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$

$f'(x) = 12\sin^3 x - 6\sin x$

$= 12\sin x\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\sin x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

f est croissante sur $\left[-\pi ; -\frac{3\pi}{4}\right]$, sur $\left[-\frac{\pi}{4} ; 0\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right]$.

f est décroissante sur $\left[-\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4}\right]$, sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{3\pi}{4} ; 2\pi\right]$.

CHAPITRE 6

Limites de fonctions

Pour reprendre contact

1 Avec les suites de référence

a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** $+\infty$ **d.** $+\infty$ **e.** 0 **f.** 0

2 Avec les théorèmes d'opérations

a. $+\infty$ **b.** 2 **c.** $+\infty$ **d.** $-\infty$

3 Avec les théorèmes de comparaison

a. $0\,;-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ **b.** $+\infty\,;u_n \geqslant n^3-1$ **c.** $-\infty\,;u_n \leqslant -2\mathrm{e}^n+1$ **d.** $3\,;\ 3-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3+\dfrac{1}{n}$

4 Avec les définitions de limites

a. Pour tout réel $A > 0$, il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.
b. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $-2-\mathrm{e} < u_n < -2+\mathrm{e}$.

5 Avec les conjectures graphiques

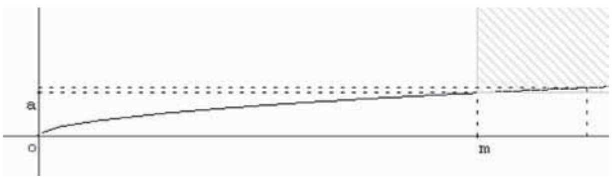
Suite bleue : $+\infty$; suite rouge : 2 ; suite verte : $-\infty$.

6 Avec la dérivabilité

1. a. 1 ; **b.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; **2. a.** 1 ; **b.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$.

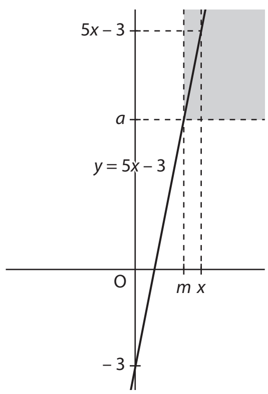
Activité 1. Limite infinie d'une fonction en $+\infty$

1. a. $x > 10^4$; $x > 10^8$; $x > a^2$.



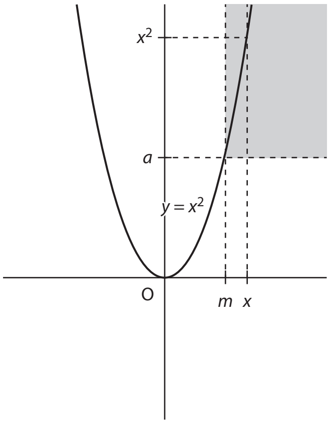
Pour $x > m\ (m = a^2)$, $\sqrt{x} > a$.

b. $x > 21$; $x > 2001$; $x > a+1$



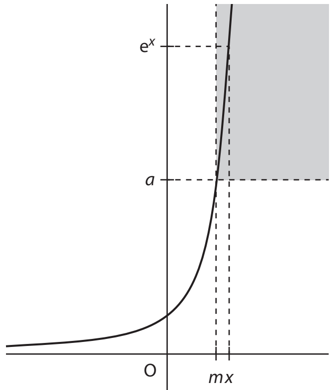
Pour $x > m\left(m = \dfrac{a+3}{5}\right)$, $5x-3 > a$.

c. Il suffit de : $x > 10$; $x > 100$; $x > \sqrt{a}$.



Pour $x > m$ ($m = \sqrt{a}$), $x^2 > a$.

d. $x > 2\ln(10)$ donc $a > 5$ suffit ;
$x > 4\ln(10)$ donc $x > 10$ suffit ; $x > \ln(a)$.



Pour $x > m$ ($m = \ln(a)$), $e^x > a$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x - 3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Activité 2. Limite finie d'une fonction en $+\infty$

A. 1. Exploration numérique

a. $f(x)$ devient très proche de 2.

b. Pour tout $x \neq -1$, $2 + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2(x+1)}{x+1} = \dfrac{2x+5}{x+1}$

c. Pour $\varepsilon > 0$ et $x > -1$, $0 < f(x) - 2 < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \dfrac{3}{x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$.

On peut en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2) = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

2. Interprétation graphique

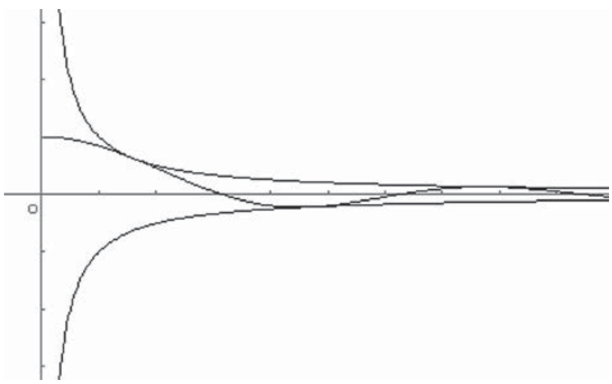
a. Pour $x > -1$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite d d'équation $y = 2$, donc $MN = f(x) - 2 = \dfrac{3}{x+1}$.

b. Pour obtenir : $MN < 10^{-4}$, $x > 30\,000$ suffit ; $MN < 10^{-10}$, $x > 3 \cdot 10^{10}$ suffit ; $MN < \varepsilon$, $x > \dfrac{3}{\varepsilon}$ suffit.

La courbe $\mathscr{C}$ se rapproche autant qu'on veut de la droite d pourvu que x soit assez grand.

B. 1. Pour la courbe voir **2.**. La limite de g en $+\infty$ semble être égale à 0.

2.



Pour $x > 0$, on conjecture $-\dfrac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Démonstration : pour tout réel x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc pour $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

3. a. $0 < \dfrac{1}{x} < 10^{-5} \Leftrightarrow x > 10^5$. Donc pour $\alpha = 10^5$ et $x \geqslant \alpha$, $-10^{-5} < g(x) < 10^{-5}$.

b. $\alpha = \dfrac{1}{\varepsilon}$ suffit.

Activité 3. Limite infinie d'une fonction en un réel

1. Voir sur le site Math'x.

2. $-0{,}58 < x < 0$ ou $0 < x < 0{,}58$.

3. En choisissant, dans le menu *0ptions, Arrondi* puis *2 décimales*,
$f(x) > 50$ pour $-0{,}14 < x < 0$ ou $0 < x < 0{,}14$, $f(x) > 100$ pour $-0{,}1 < x < 0$ ou $0 < x < 0{,}1$,
$f(x) > 140$ pour $-0{,}08 < x < 0$ ou $0 < x < 0{,}08$.

4. $f(x) > a \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} > a \Leftrightarrow 0 < x^2 < \dfrac{1}{a}$; $0 < x^2 < \dfrac{1}{a} \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{1}{a}} < x < 0$ ou $0 < x < \sqrt{\dfrac{1}{a}}$. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Les ordonnées des points sur la courbe représentative peuvent êtres rendues plus grandes que n'importe quel réel $a > 0$ pourvu que les abscisses de ces points soient suffisamment proches de 0.

Activité 4. Composée de deux fonctions

1. a. $1 \mapsto 1$; $2 \mapsto 27$; $-1 \mapsto -27$; $x \mapsto (2x-1)^3$. **b.** $1 \mapsto 1$; $2 \mapsto 15$; $-1 \mapsto -3$; $x \mapsto 2x^3 - 1$.
Les résultats obtenus sont différents sauf pour $x = 1$.

2. a. $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ **b.** $x \mapsto \mathrm{e}^{-3x+4}$ **c.** $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+1}$

3. a. $x \mapsto 2x^2 + 3$ suivie de $x \mapsto \sqrt{x}$ **b.** $x \mapsto x^2 - 4x + 1$ suivie de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ **c.** $x \mapsto 3x + 4$ suivie de $x \mapsto \sin(x)$.

TP1. Limites dans des situations géométriques

A. 1. En utilisant le logiciel GeoGebra on peut conjecturer que h est croissante sur $]0\,;6[$ et $\lim\limits_{r\to 6} h(r) = +\infty$.

2. (OP) et (O'P') sont respectivement perpendiculaires à (SP) en P et P', donc (OP) et (O'P') sont parallèles. Les points O, O' et S étant alignés, on peut appliquer le théorème de Thalès dans le triangle POS. D'où $\dfrac{6}{r} = \dfrac{\text{OS}}{\text{O'S}}$, soit $6(\text{O'S}) = r \cdot \text{OS}$.

Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents extérieurement donc $\text{OO}' = 6 + r$, d'où $\text{O'S} = \text{OS} - (6 + r)$.
Il en résulte $6(\text{OS} - (6 + r)) = r \cdot \text{OS}$, soit $(6 - r)\text{OS} = 6\,(6 + r)$,
comme $0 < r < 6$, $6 - r \neq 0$ donc $\text{OS} = \dfrac{6(6+r)}{(6-r)}$ c'est-à-dire $h(r) = \dfrac{6(6+r)}{(6-r)}$.

h est dérivable sur $]0\,;6[$ comme quotient de deux fonctions dérivables la fonction affine $r \mapsto 6r + 36$ et la fonction affine $r \mapsto -r + 6$ qui ne s'annule pas sur $]0\,;6[$. Donc $h'(r) = \dfrac{72}{(6-r)^2}$. $h'(r) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]0\,;6[$.

$\lim\limits_{r\to 6^-} \dfrac{1}{6-r} = +\infty$ et $\lim\limits_{r\to 6} 6(6+r) = 72$ donc $\lim\limits_{r\to 6^-} h(r) = +\infty$.

B. 1. (HM) et (BG) sont deux droites du plan (BGH). Si (HM) était parallèle à (BG) alors M serait sur la droite (AH) car AHGB est un rectangle. Or le seul point commun à (AH) et (AB) est le point A. Comme, par définition, M est différent de A, (HM) n'est donc pas parallèle à (BG). (HM) et (BG) étant donc non parallèles et coplanaires, sont donc sécantes en un point P.

2. a. On peut conjecturer que f est strictement croissante et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \text{BG} = 6\sqrt{2}$.

b. Pour $\text{M} \neq \text{B}$, (BM)//(HG) en appliquant le théorème de Thalès avec les triangles BPM et GHP, $\dfrac{\text{HG}}{\text{BM}} = \dfrac{\text{PG}}{\text{PB}}$ soit $\dfrac{6}{x} = \dfrac{6\sqrt{2} - \text{BP}}{\text{BP}}$.

Il en résulte $6\text{BP} = x(6\sqrt{2} - \text{BP})$ soit $(x + 6)\text{BP} = 6\sqrt{2}x$, comme $x > 0$, $x + 6 \neq 0$, d'où $\text{BP} = 6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6}$.

Pour $x = 0$, M est en B d'où P = B et PB = 0.

Or pour $x = 0$, $6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6} = 0$. On a donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = 6\sqrt{2}\dfrac{x}{x+6}$.

$x \mapsto \dfrac{x}{x+6}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 6$ dérivables sur $[0\,;+\infty[$ et $x \mapsto x + 6$ ne s'annulant pas sur $[0\,;+\infty[$, donc f est dérivable et pour tout x dans $[0\,;+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{6}{(x+6)^2}$. Donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$. f est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+6} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6\sqrt{2}$. On retrouve les résultats conjecturés.

TP2. Étude des fonctions $x \mapsto e^{-kx}$ et $x \mapsto e^{-kx^2}$

A. 1. $k > 0$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -kx = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ d'où par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} -kx = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ d'où par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. $x \mapsto -kx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout réel x, $f_k'(x) = -ke^{-kx}$. Comme, pour tout réel x, $e^{-kx} > 0$, $f_k'(x) < 0$ pour tout réel x. Il en résulte que f_k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. $0 < k < k'$. $k < k'$ donc $-k > -k'$

Pour $x > 0$, $-kx > -k'x$. Comme $X \mapsto e^X$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $e^{-kx} > e^{-k'x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

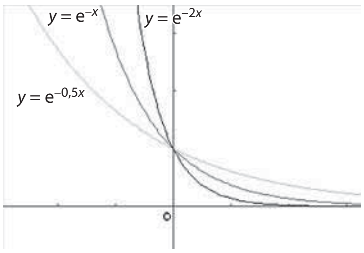
Pour $x < 0$, $-kx < -k'x$ donc $e^{-kx} < e^{-k'x}$ sur $]-\infty\,;0[$.

Pour $x = 0$, $f_k(0) = 1 = f_{k'}(0)$.

Il en résulte que $\mathscr{C}_k$ est au-dessus de $\mathscr{C}_{k'}$ sur $]0\,;+\infty[$ et que $\mathscr{C}_k$ est en dessous de $\mathscr{C}_{k'}$ sur $]-\infty\,;0[$.

$\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k'}$ se coupent au point de coordonnées $(0\,;1)$.

4.



B. 1. Limite de g_k en $-\infty$, limite de g_k en $+\infty$

$-k < 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -kx^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -kx^2 = -\infty$, comme $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$,

par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-kx^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-kx^2} = 0$.

Variations de g_k

$x \mapsto -kx^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto e^{-kx^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}$ pour tout réel x.

Donc pour $x > 0$, $g_k'(x) < 0$, pour $x < 0$, $g_k'(x) > 0$ et $g_k'(0) = 0$.

g_k est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. Elle admet un maximum égal 1 en 0.

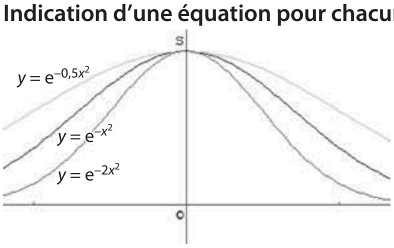
Comparaison de g_k et $g_{k'}$ pour $0 < k < k'$ et interprétation graphique

Si $0 < k < k'$, alors $-kx^2 > -k'x^2$ pour tout réel x non nul. $X \mapsto e^X$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit $e^{-kx^2} > e^{-k'x^2}$ pour tout réel x non nul.

$e^{-kx^2} = e^{-k'x^2} \Leftrightarrow -kx^2 = -k'x^2 \Leftrightarrow (k - k')x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car $k - k' \neq 0$.

Il en résulte que si $0 < k < k'$, Γ_k est donc au-dessus de $\Gamma_{k'}$ sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ et elles ont en commun le point de coordonnées $(0\,;1)$ où elles ont pour tangente commune la droite d'équation $y = 1$.

Indication d'une équation pour chacune des 3 courbes



Γ_k a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées. En effet, pour tout réel x, $e^{-k(-x)^2} = e^{-kx^2}$, g_k est donc une fonction paire.

2. Γ_k est au-dessus de $\mathscr{C}_k$ sur$]0\,;1[$ et Γ_k est en dessous de $\mathscr{C}_k$ sur $]1\,;+\infty[$.

Γ_k et $\mathscr{C}_k$ ont en commun le point de coordonnées $(0\,;1)$ et le point de coordonnées $(1\,;e^{-k})$.

Démonstration : pour tout réel $k > 0$

Si $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$ puis $-kx^2 > -kx$, il en résulte $g_k(x) > f_k(x)$.

Si $1 < x$, alors $x < x^2$ puis $-kx > -kx^2$, il en résulte $f_k(x) > g_k(x)$.

$g_k(0) = 1 = f_k(0)$ et $g_k(1) = e^{-k} = f_k(1)$.

TP3. Une famille de fonctions. Applications en chimie

A. 1. Voir sur le site Math'x.

2. a. f semble strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Lorsque a croît, f croît et la limite de f en $+\infty$ semble être égale à a.
Lorsque K croît, f tend plus lentement vers sa limite en $+\infty$.

3. a. f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$ à savoir $x \mapsto ax$ et $x \mapsto K+x$, avec $K+x$ ne s'annulant pas sur $[0\,;+\infty[$ car $K>0$.

Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{aK}{(K+x)^2}$. Comme $aK>0$, $f'(x)>0$ sur $[0;+\infty[$, f est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{ax}{x} = a$.

La droite d'équation $y=a$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.
On peut contrôler ce résultat sur le logiciel en traçant la droite d'équation $y=a$ et en augmentant xmax ou en observant qu'on peut rendre $a-f(x)<0{,}1$, $a-f(x)<0{,}01$, $a-f(x)<0{,}001$ pourvu que x soit suffisamment grand. D'où le fait observé en **a.** lorsque a augmente.

c. En faisant varier a et K, on observe sur GeoGebra que l'abscisse de A reste égale à K, on conjecture donc qu'elle est égale à K. D'où si K augmente, on retrouve l'impact de K sur la courbe, à savoir que lorsque K croît, f tend plus lentement vers a.

B. 1. a. Pour $x>0$, $\dfrac{aK}{K+x} \neq 0$. Donc on peut passer à l'inverse, d'où $v = \dfrac{aK}{K+x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{v} = \dfrac{K+x}{aK} = \dfrac{K}{a}\cdot\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a}$.

b. $\begin{cases} \dfrac{1}{a} = 748{,}2 \\ \dfrac{K}{a} = 0{,}003 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 1{,}3\cdot10^{-3} \\ K \approx 4\cdot10^{-6} \end{cases}$

2. Voir sur le site Math'x pour l'algorithme. $n=7$

TP4. Dynamique des populations

A. Soit P_0 (avec $P_0>0$) la population pour l'année 0 et S_0 ($S_0>0$) l'ensemble des moyens de subsistance la même année. Si l'ensemble des moyens de subsistance croît selon une progression arithmétique de raison $r>0$ tous les 25 ans et si la population double tous les 25 ans, au bout de n périodes de 25 ans, la population P_n sera égale à $P_0\cdot 2^n$ et l'ensemble des moyens de subsistance S_n sera égal à S_0+nr.

$\dfrac{P_n}{S_n} = \dfrac{P_0}{\left(\dfrac{S_0}{n}+r\right)}\dfrac{2^n}{n}$, $\dfrac{2^n}{n} = \ln(2)\dfrac{e^{n\ln(2)}}{n\ln(2)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_0}{n} = 0$; $\ln(2)>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$. Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$,

il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2)\dfrac{e^{n\ln(2)}}{n\ln(2)} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_0}{\dfrac{S_0}{n}+r} = \dfrac{P_0}{r}$ avec $\dfrac{P_0}{r}>0$.

Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_n}{S_n} = +\infty$, d'où la très grande inquiétude de Malthus.

B. 1. $P(0) = \dfrac{a}{1+be^0} = \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{a}{1+\dfrac{a}{P_0}-1} = P_0$

2. a. $t \mapsto e^{-rt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto -rt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $t\mapsto e^{-rt}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ ainsi que $t\mapsto 1+be^{-rt}$. Comme $e^{-rt}>0$, pour tout réel t et $b>0$, $1+e^{-rt}$ est non nul sur $[0\,;+\infty[$ et $t\mapsto \dfrac{a}{1+be^{-rt}}$ est donc dérivable sur $[0\,;+\infty[$, de dérivée $P'(t) = a\dfrac{-b(-re^{-rt})}{(1+be^{-rt})} = \dfrac{bre^{-rt}}{(1+be^{-rt})^2}$.

Donc $P'(t)>0$ et P est une fonction strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. $\lim\limits_{t\to+\infty} -rt = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-rt} = 0$, il en résulte $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{a}{1+be^{-rt}} = a$, soit $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = a$.

3. 12,37

4. Le modèle logistique obtenu serait en accord avec le scénario moyen.

TP5. Valeur moyenne d'un signal

A. Voir sur le site Math'x. La moyenne est égale à 0,57.

B. 1. Pour tout réel t, $f(t+\pi) = |-\sin t| = |\sin t| = f(t)$.

2. $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left|\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\right|$ comme pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $0 \leqslant \dfrac{k\pi}{n} \leqslant \pi$, on a $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \geqslant 0$,

d'où $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

3. $v_{20} \approx 0{,}635$; $v_{30} \approx 0{,}636$; $v_{40} \approx 0{,}636$; $v_{50} \approx 0{,}636$; $v_{100} \approx 0{,}637$.

4. $v_{200} \approx 0{,}637$; $v_{500} \approx 0{,}637$; $v_{1000} \approx 0{,}637$; $v_{5000} \approx 0{,}637$. On peut conjecturer que la suite (v_n) tend vers une limite voisine de 0,637 quand n tend vers $+\infty$.

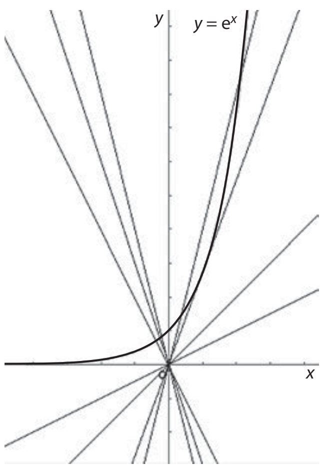
5. $v_n = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$. Donc $v_n = \dfrac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2n} = 0$, $\lim\limits_{X\to 0}\cos(X) = 1$, $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin(X)}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{X}{\sin(X)} = 1$, il en résulte par composition $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)} = 1$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{2}{\pi}$ avec $\dfrac{2}{\pi} \approx 0{,}637$.

TP6. Étudier une équation avec paramètre

A. 1. et **2.**



2. a. $a = 0$; $a = 0{,}5$; $a = 1$; $a = 2$.

b. $a = -3$; $a = -2$; $a = -12$; $a \approx 2{,}7$

c. $a = 3$, $a = 4$, $a = 5$

3. $a < 0$ une seule solution, $0 \leqslant a \leqslant 2{,}71$ aucune solution, $a > 2{,}72$ deux solutions.

B. 1. Pour tout réel x non nul, $e^x = ax \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x} = a$. C'est-à-dire à $f(x) = a$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (résultat du cours) ; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (résultat du cours) et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3. Pour tout réel x non nul, f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables et $f'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}(x-1)$, pour tout réel x. $e^x > 0$ et pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(x-1)$.

De ce qui précède et de **2.** on en déduit le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Par le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires :
- $a \in]-\infty\,;0[$: l'équation $f(x) = a$ a une unique solution, donc l'équation $e^x = ax$ a une unique solution ;
- $a \in]0\,;e[$: l'équation $f(x) = a$ n'a pas de solution, donc l'équation $e^x = ax$ n'a pas de solution ;
- $a = e$: l'équation $f(x) = e$ a pour unique solution $x = 1$, de même pour l'équation $e^x = ex$ et la droite d'équation $y = ex$ est tangente à la courbe d'équation $y = e^x$ au point de coordonnées (1 ; e) ;
- $a \in]0\,;+\infty[$: $f(x) = a$ a exactement deux solutions, donc l'équation $e^x = ax$ aussi.

Pour $a = 0$, comme pour tout réel x, $e^x > 0$ l'équation $e^x = 0$ n'a aucune solution.

On retrouve ainsi les résultats conjecturés en **2.** $e \approx 2{,}718$.

TP7. Déterminer un ensemble de points

1. M décrit le segment [OA] privé de O origine du repère et de A (0 ; 2).

2. a. Par le logiciel $g(a) = \dfrac{1}{a^2+4}\cdot\sqrt{a^2+4}\cdot 4 = \dfrac{4}{\sqrt{a^2+4}}$.

b. g est paire sur $\mathbb{R}^*$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} g(a) = 0 = \lim\limits_{a\to-\infty} g(a)$, $\lim\limits_{a\to 0} g(a) = 2$.

g est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ car la fonction $a \mapsto a^2+4$ est dérivable et strictement positive sur chacun de ces deux intervalles et pour tout réel a non nul $g'(a) = \dfrac{-4a}{(a^2+4)\sqrt{a^2+4}}$.

g est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

a	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(a)$		$+$	||	$-$	
$g(a)$	0	$\nearrow$	2 || 2	$\searrow$	0

3. Par **2.** l'ordonnée de M décrit l'intervalle]0 ; 2[, donc M, ayant pour abscisse 0 d'après le logiciel, décrit le segment [OA] O origine du repère et A(0 ; 2), segment privé de O et de A.

Pour aller plus loin : pour tout réel x, $f'(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{a^2+4}}$.

Pour tout réel a non nul, désignons par T_a et T_{-a} les tangentes respectives aux points d'abscisses a et $-a$ à la courbe $\mathscr{C}$.

$T_a : y = f(a) + f'(a)(x-a)\,;\, T_{-a} : y = f(-a) + f'(-a)(x+a)$.

L'abscisse du point M est donc solution de l'équation : $f(a) + f'(a)(x-a) = f(-a) + f'(-a)(x+a)$.

C'est-à-dire $-a + \sqrt{a^2+4} + \left(-1 + \dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}\right)(x-a) = a + \sqrt{a^2+4} + \left(-1 + \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+4}}\right)(x+a)$.

Ce qui revient à $\dfrac{2ax}{\sqrt{a^2+4}} = 0$, soit $x = 0$ puisque a est non nul.

L'ordonnée de M est alors égale à $f(a) - af'(a)$.

$f(a) - af'(a) = -a + \sqrt{a^2+4} - a\left(-1 + \dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}\right) = \dfrac{4}{\sqrt{a^2+4}}$.

On peut vérifier que $f(-a) + af'(-a) = \dfrac{4}{\sqrt{a^2+4}}$.

On retrouve M (0 ; $g(a)$) donné en **2.** par le logiciel.

Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 **1.** $+\infty$ **2.** 0 **3.** La réponse est c.

2 **a.** $+\infty$ **b.** $+\infty$ en $-\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$

c. $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$

d. $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$

3 **a.** $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$

b. 0 en $-\infty$ et 0 en $+\infty$

c. $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$

d. 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$

4 **a.** $+\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

c. $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

d. $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-4}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-4}{x-1} = -\infty$

ENTRAÎNEMENT

5 **a.** $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$

b. $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$

c. $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$

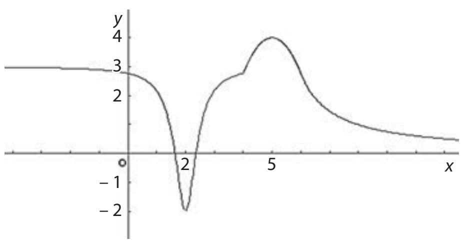
d. 3 en $-\infty$ et 3 en $+\infty$

6 Voir corrigé en fin de manuel.

7 **1. a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b. La courbe représentative de f admet comme asymptotes la droite d'équation $y = 3$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

2.



8 **1.** f n'admet pas de maximum absolu sur $\mathbb{R}$ mais admet un minimum égal à 2.

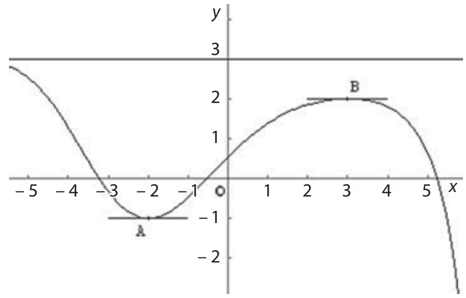
2. Elle admet un maximum local égal à 5 en 3.

9 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

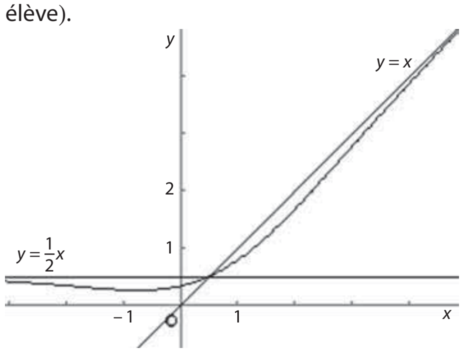
T_1 : $y = -1$ est tangente horizontale à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(-2\,;-1)$.

T_2 : $y = 2$ est tangente horizontale à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(3\,;2)$.

2.



10 Erratum : dans l'énoncé de l'exercice, lire $e^x + 2$ au dénominateur (correction faite dans les exemplaires élève).



En traçant la courbe représentative de f ou avec un logiciel on peut conjecturer que la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe en $-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\dfrac{1}{2}$ et d'après le graphique $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Avec Xcasfr.

Limite((x*e^x +1)/(e^x +2),x,-infinity)

donne $\dfrac{1}{2}$.

Limite((x*e^x +1)/(e^x +2),x,+infinity)

donne $+\infty$.

Remarque : comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (résultats du cours) on en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{e^x\left(x + \dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \dfrac{2}{e^x}\right)} = \frac{x + \dfrac{1}{e^x}}{1 + \dfrac{2}{e^x}},$$

comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

On peut aussi remarquer que

$$f(x) - x = \frac{2x+1}{e^x+2} = \frac{x}{e^x}\left(\frac{2 + \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{2}{e^x}}\right).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (résultat du cours) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{e^x}} = 2.$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$, la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

11 **1. a.** $y = 2$ **b.** $x = -2, x = 3, y = 0$

c. $y = 2, x = -2, x = 4$.

2. Erratum : dans l'énoncé de l'exercice, lire

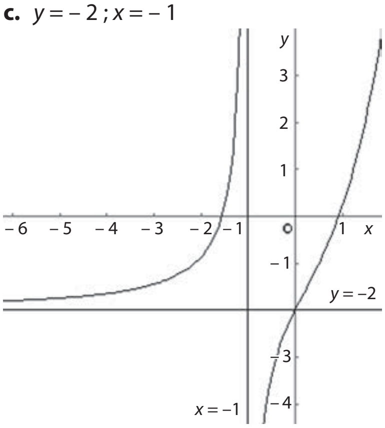
« Avec la calculatrice ou un logiciel, étudier la limite en **– 2** de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+2)^2}$ pour $x \neq$ **– 2** » (correction faite dans les exemplaires élève).

Avec Xcasfr

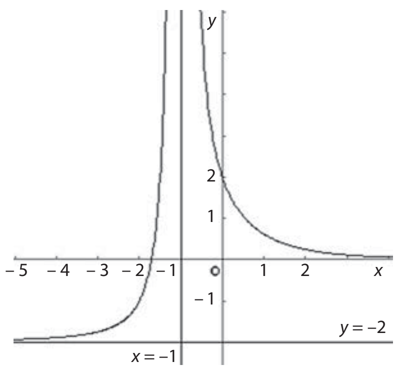
Limite ((2x-1)/((x+2)^2),x,-2) donne ∞.

12 Pour **a.** et **b.** voir corrigé en fin de manuel.

c. $y = -2$; $x = -1$



d. $y = -2, x = -1$



13 **1.** D =]– ∞ ; 3[U]3 ; + ∞[

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. f n'a pas de limite finie en 3, ni de limite infinie en 3 car les limites infinies à gauche et à droite de 3 sont différentes.

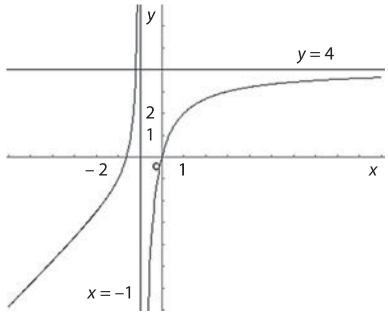
4. a. $f(-8) < f(-2)$; $f(1) > f(2)$, on ne peut comparer ni $f(-2)$ et $f(2)$ ni $f(1)$ et $f(8)$.

5. f admet un maximum local égal à 2 en 0.

14 **1.**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	|	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	2	↗	4

2.



15 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2+3 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+3 = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x+4 = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+4 = +\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d. Pour tout réel x non nul $f(x) = \dfrac{2}{x}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

16 Voir corrigé en fin de manuel.

17 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x = +\infty$, en $+\infty$ on a la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

b. En $+\infty$, on a la forme indéterminée « $0 \times \infty$ » car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$.

c. En $+\infty$ et en $-\infty$ forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

e. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

f. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} e^x - 3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc on a la forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».

18 **1. a.** $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$

b. $+\infty$ en $-\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$

c. $-\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$

d. $-\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$

2. Par la propriété 4, une fonction polynôme a même limite en $-\infty$ et en $+\infty$ que son terme de plus haut degré.

19 **1.** Pour tout réel x non nul

a. $f(x) = \dfrac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}$,

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$,

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b. $f(x) = \dfrac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}$.

Comme $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c. Pour $x \neq \frac{5}{2}$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{5}{x}\right)} = x\dfrac{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{5}{x}\right)}$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$

donc $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{5}{x}} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{5}{x}}$.

Comme $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$,

on en déduit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d. $f(x) = \dfrac{x\left(1+\frac{6}{x}\right)}{x^2\left(3+\frac{4}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{x} * \dfrac{\left(1+\frac{6}{x}\right)}{\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$.

Donc $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1+\frac{6}{x}}{3+\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{3} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{6}{x}}{3+\frac{4}{x^2}}$.

Il en résulte $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Par la propriété 4, une fonction rationnelle a même limite en $-\infty$ et en $+\infty$ que le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2 = 2$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$.

b. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

c. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$.

d. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3x} = 0$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x} = 0$.

20 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$.

De même en $+\infty$. Donc la courbe représentant f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

21 g a pour courbe représentative la courbe de droite qui a pour asymptote la droite d'équation $y = 1$ car $e^{1-x} = \frac{e}{e^x}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, on en déduit $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

La courbe de gauche est la courbe représentative de la fonction h car

$\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc par composition $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$ puis $\lim_{X\to+\infty} h(x) = +\infty$.

22 Voir corrigé en fin de manuel.

23 **a.** $+\infty$ **b.** $+\infty$

c. Pour $x > 0$, $f(x) = x^2(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}})$;

$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} = 1$

puis $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

d. Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}$;

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$;

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, il en résulte $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

24 Voir corrigé en fin de manuel.

25 **a.** $-\infty$ **b.** $+\infty$ **c.** $+\infty$ **d.** $-\infty$

26 Voir corrigé en fin de manuel.

27 **a.** $+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2}{x-4} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2}{x-4} = +\infty$

c. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-3}{6-2x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{-3}{6-2x} = +\infty$

d. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{e^x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^x-1} = +\infty$

28 **1.**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 2

2. f est une fonction dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ comme une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule sur aucun des ces deux intervalles.

Pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

Sur $]-\infty\,;1[$, $f'(x) < 0$ et sur $]1\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = 2,$

de même en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to 1} 2x+1 = 3.$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty,$

donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$

Ces résultats sont conformes au tableau de variations conjecturé en **1**.

29 **1.** Pour tout réel x non nul,

$$f(x) = \frac{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2\,;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1.$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

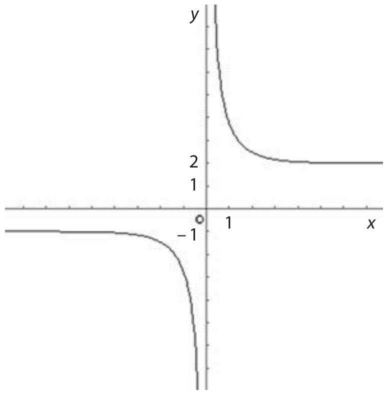
2. $\lim\limits_{x\to 0} 2e^x + 1 = 3\,;$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{e^x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^x-1} = +\infty,$

donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$

La droite des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$.

3. En utilisant un logiciel comme Geoplan ou GeoGebra nous obtenons la courbe ci-dessous conforme aux résultats obtenus.



30 $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}} 4x+3 = 1\,;$ $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^-} \dfrac{1}{2x+1} = -\infty\,;$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} \dfrac{1}{2x+1} = +\infty$, il en résulte $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^-} \dfrac{4x+3}{2x+1} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} \dfrac{4x+3}{2x+1} = +\infty.$

La droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est donc asymptote verticale à la courbe représentative de f.

31 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{4x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{4x} = \dfrac{1}{2}.$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{4x+3} = \dfrac{1}{2}$, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ est donc asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{4}} 2x-1 = -\dfrac{5}{2}\,;$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{4}\right)^-} \dfrac{1}{4x+3} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{4}\right)^+} \dfrac{1}{4x+3} = +\infty.$

Donc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{4}\right)^-} \dfrac{2x-1}{4x+3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{4}\right)^+} \dfrac{2x-1}{4x+3} = -\infty.$

La droite d'équation $x = -\dfrac{3}{4}$ est donc asymptote verticale à la courbe représentative de f.

32 $f(x) = \dfrac{3x-8}{x-2}.$

33 Le graphe 1 correspond à h, le graphe 2 à f, le graphe 3 à g et le graphe 4 à k.

34 **a.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = -\sin(0) = 0.$

b. $\dfrac{\sin(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\sin(x)}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \cos(0) = 1.$

Il en résulte

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin(x)}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x^2} = +\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-1}{x-1} = 10 \times 1^9 = 10$

d. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

35 $m = -3$.

36 **a.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x$

b. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$

c. $f(x) = x + 10$ et $g(x) = x$

d. $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$

37 **a.** $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

c. $f(x) = 10x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

d. $f(x) = x^2$ et $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

38 **a.** $f(x) = e^{x+4}$ **b.** $f(x) = \sqrt{x^2+6}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$

39 **a.** $u(x) = 2x + 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$

b. $u(x) = -x^2$ et $v(x) = e^x$

c. $u(x) = 3x - 5$ et $v(x) = e^x$

d. $u(x) = 2x + 5$ et $v(x) = \sin(x)$

40 Voir corrigé en fin de manuel.

41 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

d. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

42 $\lim\limits_{v\to c} \dfrac{v^2}{c^2} = 1$ avec $\dfrac{v^2}{c^2} < 1$ car $0 \leqslant v < c$

donc $\lim\limits_{v\to c} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = +\infty$.

43 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4} = +\infty$, donc nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ » en utilisant le théorème d'addition.

b. $f(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2+4})(x-\sqrt{x^2+4})}{x-\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{-4}{x-\sqrt{x2+4}}$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2+4} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

44 **a.** $+\infty$ **b.** 0 **c.** 0 **d.** 0

45 **1.** $\cos\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$

2. Par récurrence

Initialisation : $2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^0}\right) = 2\cos(\theta)$, l'égalité est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : pour tout n dans $\mathbb{N}$ par **1.**,

$\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 1.$

Donc si $u_n = \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}$

$= \sqrt{2+2\left(2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)-1\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)}.$

Comme $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \dfrac{\theta}{2^n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) \geqslant 0$,

il en résulte $\sqrt{4\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$.

Conclusion : pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\theta}{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \cos(X) = 1$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) = 1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

46 Voir corrigé en fin de manuel.

47 Voir corrigé en fin de manuel.

48 Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

Donc pour $x \geqslant 0$, $-x \leqslant x\sin(x) \leqslant x$, il en résulte pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant x^2 + x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Pour $x \leqslant 0$, $-x \geqslant x\sin(x) \geqslant x$, il en résulte pour $x \leqslant 0$, $f(x) \geqslant x^2 + x$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

49 Pour tout réel x, $E(x) \in \mathbb{Z}$ donc $(-1)^{E(x)} = 1$ ou $(-1)^{E(x)} = -1$. Il en résulte, pour tout réel x,

$x^2 - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2 + 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

50 **a.** Pour tout réel x, $x - 1 \leqslant x + \cos(x) \leqslant x + 1$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \cos(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x) = +\infty$.

Il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+\cos(x)} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+\cos(x)}$.

$0 \leqslant \left|\frac{\cos(x)}{x+\cos(x)}\right| = \frac{|\cos(x)|}{|x+\cos(x)|} \leqslant \frac{1}{|x+\cos(x)|}$

comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\cos(x)} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\cos(x)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{|x+\cos(x)|} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{|x+\cos(x)|}$, il en résulte par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|$,

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

51 Voir corrigé en fin de manuel.

52 **a.** Pour tout réel x, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ puis

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $f(x) = e^{-x}(1 + xe^x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et

$\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f(x) = xe^x + 3e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

c. Pour tout réel x, $f(x) = e^x(e^x - 1)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

d. Pour tout réel x, $f(x) = e^x(-x+1) + 1$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+1 = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

53 Voir corrigé en fin de manuel.

54 **1.** Pour tout réel x non nul, $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

2. $e^{2x} + 3e^x - 2x + 1 = e^{2x}\left(1 + \frac{3}{e^x} - \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ par **1.**

donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composition

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$.

Il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{e^x} - \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right) = 1$.

Il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x} + 3e^x - 2x + 1) = +\infty$.

55 **a.** 0 **b.** 0

c. $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$.

D'où par composition $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = 0$.

d. Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \cdot \frac{e^x}{x} = \sqrt{x} \cdot \frac{e^x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{e^x}{\sqrt{x}} = f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} \times \frac{e^x}{x} = +\infty$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

56 **1.** On peut conjecturer

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2. $a > 0$ et n un entier naturel ;

$a^n = (e^{\ln(a)})^n = e^{n\ln(a)}$ (car pour tout réel et pour tout entier naturel $n (e^x)^n = e^{nx}$).

3. $\frac{2^n}{n} = \ln(2)\frac{e^{n\ln(2)}}{n\ln(2)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$,

donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{n\ln(2)}}{n\ln(2)} = +\infty$,

comme $\ln(2) > 0$ il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$.

$\frac{1{,}1^n}{100n+200} = \ln(1{,}1) \times \frac{e^{n\ln(1{,}1)}}{n\ln(1{,}1)} \times \frac{1}{100 + \frac{200}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{100 + \frac{200}{n}} = \frac{1}{100}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{n\ln(1{,}1)}}{n\ln(1{,}1)} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1{,}1^n}{100n+200} = +\infty$.

57 Voir corrigé en fin de manuel.

58 **1.** f n'a pas de maximum absolu sur $\mathbb{R}$. f a un minimum absolu sur $\mathbb{R}$ égal à 2 et atteint en 0. f a un maximum local égal 5 atteint en 3.

2. L'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ égale à 0.

L'équation $f(x) = 4$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$ l'une dans l'intervalle $]-\infty\,;0[$ l'autre dans l'intervalle $]0\,;3[$.

3. $m < 2$, aucune solution ;

$m = 2$, une solution unique 0 ;

$2 < m \leqslant 3$, deux solutions ;

$3 < m < 5$, trois solutions ;

$m = 5$, deux solutions dont l'une égale à 3 ;

$m > 5$, une solution.

59 Voir corrigé en fin de manuel.

60 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$;

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1]$;

f est strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$;

f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

$f(-1) = 3$, $f(1) = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Donc un maximum local égal à 3 en -1 et un minimum local égal à -1 en 1.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet alors deux solutions :

– l'une α est dans $]-\infty ; -1[$, $f(-1{,}88) \approx -0{,}005$ et $f(-1{,}87) \approx 0{,}07$ d'où $-1{,}88 < \alpha < -1{,}87$, et par exemple $\alpha \approx -1{,}88$ à 10^{-2} près

– l'autre solution β est dans $]-1 ; 1[$, $f(0{,}34) \approx 0{,}019$ et $f(0{,}35) \approx -0{,}007$ d'où $0{,}34 < \beta < 0{,}35$, donc par exemple $\beta \approx 0{,}35$ à 10^{-2} près.

61 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1$.

Pour tout réel x, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et f est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

$f(0{,}6) \approx -0{,}184$; $f(0{,}7) \approx 0{,}043$.

Donc on peut prendre 0,7 comme valeur approchée de la racine positive du polynôme $x^3 + x - 1$.

62 Posons pour tout réel x, $f(x) = x - e^x + 2$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Pour $x > 0$, $f(x) = e^x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - e^x$.

Sur $]-\infty ; 0[$, $f'(x) > 0$ et sur $]0 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$. f est donc strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$ et f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

D'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions, l'une α strictement négative avec $\alpha \approx -2{,}95$, l'autre strictement positive β avec $\beta \approx 1{,}51$.

63 **1.** Pour tout entier $n \geqslant 2$, $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{n} \in [0 ; 1]$, il en résulte d'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions l'une u_n dans $]0 ; 1[$ et l'autre v_n dans $]1 ; +\infty[$.

2. $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$ donc $f(u_n) > f(u_{n+1})$, avec u_n et u_{n+1} dans $[0 ; 1]$, comme f est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ on en déduit $u_{n+1} > u_n$, la suite (u_n) est donc croissante, comme elle est en plus majorée par 1, elle converge.

$f(v_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(v_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$, $f(v_n) > f(v_{n+1})$ avec v_n et v_{n+1} dans $]1 ; +\infty[$, comme f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ on en déduit $v_{n+1} < v_n$.

La suite (v_n) est donc décroissante sur $[1 ; +\infty[$ comme elle est en plus minorée par 1, elle converge.

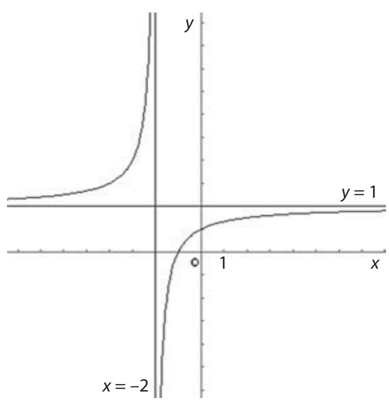
64 **1.** f est dérivable sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]-2 ; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$, pour tout réel $x \neq -2$, $f'(x) > 0$, f est donc strictement croissante sur chacun de ces deux intervalles.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$, de même en $+\infty$;

$\lim\limits_{x \to -2} 2x + 2 = -2$, $\lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$.



2. a. Pour tout réel $x \neq -2$, $2 - \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{2x+4-2}{x+2} = f(x)$.

b. Par **a.** pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) - 2 = -\dfrac{2}{x+2}$.

• Pour $x < -2$, $x + 2 < 0$ donc $f(x) - 2 > 0$,

d'où $f(x) - 2 \geqslant -0{,}01$.

$f(x) - 2 \leqslant 0{,}02 \Leftrightarrow \dfrac{-0{,}02x - 2{,}04}{x+2} \leqslant 0$.

Comme $x + 2 < 0$, $\dfrac{-0{,}02x - 2{,}04}{x+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow 0{,}02x + 2{,}04 \leqslant 0$

soit $x \leqslant -102$.

Donc sur $]-\infty\,;-2[$, $-0{,}01 \leqslant f(x) - 2 \leqslant 0{,}02 \Leftrightarrow x \leqslant -102$.

• Pour $x > -2$, $x + 2 > 0$ donc $f(x) - 2 < 0$,

d'où $f(x) - 2 \leqslant 0{,}02$.

$f(x) - 2 \geqslant -0{,}01 \Leftrightarrow \dfrac{0{,}01x - 1{,}98}{x+2} \geqslant 0$. Comme $x + 2 > 0$,

cela revient à $0{,}01x - 1{,}98 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 198$.

• Conclusion

$-0{,}01 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}02 \Leftrightarrow x \leqslant -102$ ou $x \geqslant 198$.

Graphiquement, pour $x \leqslant -102$ ou $x \geqslant 198$, la différence entre l'ordonnée d'un point M d'abscisse x situé sur la courbe et l'ordonnée du point N situé sur la droite d'équation $y = 2$ de même abscisse x que M est comprise entre $-0{,}01$ et $0{,}02$.

65 **1. a.** g est une fonction polynôme de degré 3 donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$.

g est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$

donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

pour tout réel x, $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$;

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$;

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in\ ]0\,;1[$.

Il en résulte que g est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ et aussi sur $[1\,;+\infty[$.

g est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

b. D'après le tableau de variations, le seul intervalle contenant 0 comme valeur de $g(x)$ est $[-2\,;+\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1\,;+\infty[$ car $g(1) \neq 0$.

$g(1{,}6) \approx -0{,}5$ et $g(1{,}7) \approx 0{,}15$ donc à 10^{-1} près on peut prendre $\alpha \approx 1{,}7$.

D'après le tableau de variations sur $]-\infty, \alpha[$, $g(x) < 0$ et sur $]\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$, d'où le tableau de signes ci-dessous :

X	$-\infty$				$+\infty$
$g(x)$		–	0……	+……	

2. a. f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0$,

de même en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1} 1 - x = 2$,

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{1}{x^3+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{1}{x^3+1} = +\infty$.

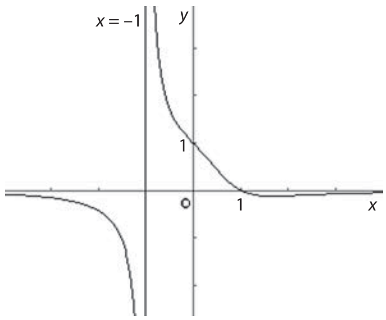
Donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$.

b. g étant une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ est dérivable sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$,

il en résulte que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Donc par **1.a.** on en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		–	‖	–	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	0

De **2.a.** on en déduit que la droite des abscisses est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$ à la courbe représentative de f et que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote.



66 **1.** $t \to e^{-0{,}2t}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et a pour dérivée $-0{,}2\,e^{-0{,}2t}$, donc q est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $q'(t) = 1{,}2\,e^{-0{,}2t}$, comme $e^x > 0$ pour tout réel x, on en déduit que q est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc le condensateur se charge.

2. a. $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}2t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}2t} = 0$. Il en résulte $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = 6 = Q$.

b. La lecture sur le graphique de Q se fait en observant que la droite d'équation $y = 6$ semble être asymptote à la courbe représentative de q en $+\infty$.

3. $q'(0) = 1{,}2$. Une équation de la tangente d à l'origine à la courbe est donc $y = 1{,}2t$.

L'abscisse t du point d'intersection de d et de l'asymptote horizontale d'équation $y = 6$ est solution de l'équation $1{,}2t = 6$.

$1{,}2t = 6 \Leftrightarrow t = \dfrac{6}{1{,}2} = \dfrac{1}{0{,}2}$.

4. $6(1 - e^{-0{,}2t}) = 0{,}99 \cdot 6 \Leftrightarrow e^{-0{,}2t} = 0{,}01 \Leftrightarrow t = 10\ln(10) \approx 23$.

5. a. Avec un tableur le plus petit entier n tel que $q(n+1) - q(n) < 10^{-5}$ est égal à 58.

n	$q(n)$	$q(n+1) - q(n)$	$q(n+1) - q(n) < 10^{-5}$
0	0,0000000	1,0876154815	0
1	1,0876155	0,8904642423	0
2	1,9780797	0,7290504596	0
3	2,7071302	0,5968960319	0
4	3,3040262	0,4886971377	0
5	3,7927234	0,4001113756	0
6	4,1928347	0,3275834878	0
7	4,5204182	0,2682026757	0
8	4,7886209	0,2195857786	0
9	5,0082067	0,1797816299	0
10	5,1879883	0,1471927492	0
11	5,3351810	0,1205112304	0
12	5,4556923	0,0986662505	0
13	5,5543585	0,0807810935	0
14	5,6351396	0,0661379655	0
15	5,7012776	0,0541491863	0
16	5,7554268	0,0443336041	0
17	5,7997604	0,0362972851	0
18	5,8360577	0,0297177035	0
19	5,8657754	0,0243307978	0
20	5,8901062	0,0199203724	0
21	5,9100265	0,0163094215	0
22	5,9263360	0,0133530250	0
23	5,9396890	0,0109325322	0
24	5,9506215	0,0089508003	0
25	5,9595723	0,0073282955	0
26	5,9669006	0,0059999009	0
27	5,9729005	0,0049123034	0
28	5,9778128	0,0040218538	0
29	5,9818347	0,0032928154	0
30	5,9851275	0,0026959292	0
31	5,9878234	0,0022072402	0
32	5,9900307	0,0018071354	0
33	5,9918378	0,0014795573	0
34	5,9933173	0,0012113591	0
35	5,9945287	0,0009917769	0
36	5,9955205	0,0008119983	0
37	5,9963325	0,0006648080	0
38	5,9969973	0,0005442987	0
39	5,9975416	0,0004456341	0
40	5,9979872	0,0003648543	0
41	5,9983521	0,0002987175	0
42	5,9986508	0,0002445692	0
43	5,9988954	0,0002002363	0
44	5,9990956	0,0001639396	0
45	5,9992595	0,0001342224	0
46	5,9993938	0,0001098920	0
47	5,9995037	0,0000899720	0
48	5,9995936	0,0000736628	0
49	5,9996673	0,0000603100	0
50	5,9997276	0,0000493777	0
51	5,9997770	0,0000404270	0
52	5,9998174	0,0000330988	0
53	5,9998505	0,0000270990	0
54	5,9998776	0,0000221868	0
55	5,9998998	0,0000181650	0
56	5,9999180	0,0000148723	0
57	5,9999328	0,0000121764	0
58	**5,9999450**	**0,0000099692**	**1**

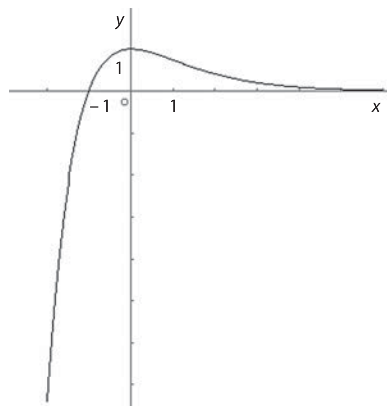
b. Pendant une seconde, le condensateur se charge de moins de 10^{-5} C pour la première fois de la 58ᵉ à la 59ᵉ seconde.

c. Pour tout entier naturel n,
$q(n+1) - q(n) = 6(1 - e^{-0{,}2})e^{-0{,}2n}$.
D'où $q(n+1) - q(n) < 10^{-5} \Leftrightarrow n > -5\ln\left(\dfrac{0{,}00001}{6(1 - e^{-0{,}2})}\right)$;

$-5\ln\left(\dfrac{0{,}00001}{6(1 - e^{-0{,}2})}\right) \approx 57{,}98$ donc, pour tout

entier n tel que $n \geqslant 58$, $q(n+1) - q(n) < 10^{-5}$,
l'algorithme s'arrête donc à $n = 58$.

67 **1.**



D'après le graphique, on peut établir les conjectures suivantes :

• f est strictement croissante sur $]-\infty\,; 0[$ et strictement décroissante sur $[0\,; +\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto e^{-x}$;
$f'(x) = e^{-x} - (x+1)\,e^{-x} = -xe^{-x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, donc sur $]-\infty\,; 0[$, $f'(x) > 0$ et sur $]0\,; +\infty[$, $f'(x) < 0$.
f est donc strictement croissante sur $]-\infty\,; 0]$ et strictement décroissante sur $[0\,; +\infty[$, maximum absolu égal à $1 = f(0)$ en 0.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$f(x) = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

68 **1.** f est dérivable sur $]-1\,; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x + 1$ avec $x \mapsto x + 1$ ne s'annulant pas sur $]-1\,; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Pour tout réel $x > -1$, $x + 1 > 0$ et $e^x > 0$,

il en résulte $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;0[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

f est donc strictement décroissante sur $]-1\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1} e^x = \dfrac{1}{e}$, donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$.

$f(x) = \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$ donc la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = -1$.

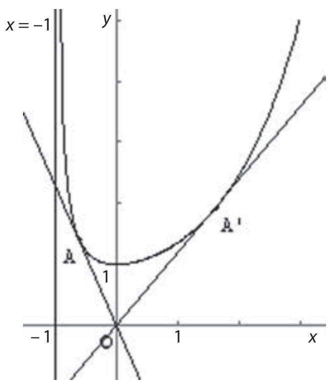
2. $T_a : y = \dfrac{ae^a}{(1+a)^2}(x-a) + \dfrac{e^a}{1+a}$.

$O \in T_a \Leftrightarrow 0 = \dfrac{-a^2e^a}{(1+a)^2} + \dfrac{e^a}{1+a} \Leftrightarrow -a^2 + a + 1 = 0$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$ ou $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}411$.

Donc en $A\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,;2\times\dfrac{e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}{3-\sqrt{5}}\right)$

et en $A'\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;2\times\dfrac{e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{3+\sqrt{5}}\right)$, les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ passent par O.



69 **1. a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{kx+1}{x} = k$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Comme $k < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{kx+1}{x}e^x = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to0} (kx+1)e^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{kx+1}{x}e^x = +\infty$.

b. f_k est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$,

$x \mapsto \dfrac{kx+1}{x}$ et $x \mapsto e^x$.

$f'_k(x) = \dfrac{kx^2+x-1}{x^2}e^x$; $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow kx^2 + x - 1 = 0$.

Le trinôme $kx^2 + x - 1$ a pour discriminant $4k + 1$.

D'où si $k < -\dfrac{1}{4}$, f'_k ne s'annule pas ;

Si $k = -\dfrac{1}{4}$, $f'_k(x) = -\dfrac{(x-2)^2}{4x^2}$ s'annule en 2 ;

Si $-\dfrac{1}{4} < k < 0$, $kx^2 + x - 1 = 0$ a deux solutions distinctes, donc $f'_k(x) = 0$ aussi.

2. La courbe (1) correspond à $k = 0$ car d'après **1.** pour $k < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{kx+1}{x}e^x = -\infty$.

La courbe (2) correspond à $k = -0{,}15$ car pour $-\dfrac{1}{4} < k < 0$, $f'_k(x) = 0$ a deux solutions et $f_{-0{,}15}(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 6{,}7$.

La courbe (3) correspond à $k = -1$ car $f_{-1}(1) = 0$ et pour $k < -\dfrac{1}{4}$, f'_k ne s'annule pas.

La courbe (4) correspond à $k = -0{,}24$ car pour $-\dfrac{1}{4} < k < 0$, $f'_k(x) = 0$ a deux solutions et $f_{-0{,}24}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{25}{6} \approx 4{,}2$.

70 **1.** Pour tout réel x, $f_0(x) = x + 1$, f_0 est donc une fonction affine.

2. • ***k* < 0**

$\lim\limits_{x\to-\infty} kx = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

Donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$, il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{kx} = -\infty$.

Pour tout réel x, $f_k(x) = \dfrac{1}{k}(kxe^{kx}) + e^{kx}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} kx = -\infty$, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$

donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} kxe^{kx} = 0$.

Il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$.

• ***k* > 0**

Pour tout réel x, $f_k(x) = \dfrac{1}{k}(kxe^{kx}) + e^{kx}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} kx = -\infty$, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$.

Donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} kxe^{kx} = 0$.

Il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} kx = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

Donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$, il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{kx} = +\infty$.

3.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	1	$+$	
e^x-1		$-$	$e^{-1}-1$	$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour tout réel x, $f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)e^{kx}(e^x-1)$.

Pour tout réel x, $e^{kx}>0$, donc $f_{k+1}(x)-f_k(x)$ est du signe de $(x+1)(e^x-1)$.

Désignons par $\mathscr{C}_{k+1}$ et $\mathscr{C}_k$ les courbes représentatives respectives de f_k et f_{k+1}.

D'après le tableau de signes de $(x+1)(e^x-1)$, pour tout réel k, nous en déduisons que :

sur $]-\infty\,;-1[$, $\mathscr{C}_{k+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_k$;

sur $]-1\,;0[$, $\mathscr{C}_{k+1}$ est en dessous de $\mathscr{C}_k$;

sur $]0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}_{k+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_k$.

Les courbes $\mathscr{C}_{k+1}$ et $\mathscr{C}_k$ ont deux points en commun $A(-1\,;0)$ et $B(0\,;1)$.

4. Pour tout réel k et tout réel x, f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x\mapsto x+1$ et $x\mapsto e^{kx}$, $f'_k(x)=e^{kx}(kx+k+1)$.

Comme pour tout réel k et tout réel x, $e^{kx}>0$, $f'_k(x)$ est du signe de $kx+k+1$.

• $\boldsymbol{k<0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{k+1}{k}$		$+\infty$
$kx+k+1$		$+$	0	$-$	

Il en résulte $f'_k(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{k+1}{k}$

et, sur $]-\infty\,;-\dfrac{k+1}{k}[$, $f'_k(x)>0$, sur $]-\dfrac{k+1}{k}\,;+\infty[$, $f'_k(x)<0$.

f_k est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;-\dfrac{k+1}{k}]$ et strictement décroissante sur $[-\dfrac{k+1}{k}\,;+\infty[$.

D'où le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\dfrac{k+1}{k}$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{k}e^{-(k+1)}$	$\searrow$	0

• $\boldsymbol{k>0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{k+1}{k}$		$+\infty$
$kx+k+1$		$-$	0	$+$	

Il en résulte $f'_k(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{k+1}{k}$ et sur $]-\infty\,;-\dfrac{k+1}{k}[$, $f'_k(x)<0$, sur $]-\dfrac{k+1}{k}\,;+\infty[$, $f'_k(x)>0$.

f_k est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;-\dfrac{k+1}{k}]$ et strictement croissante sur $[-\dfrac{k+1}{k}\,;+\infty[$.

D'où le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\dfrac{k+1}{k}$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{k}e^{-(k+1)}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. D'après les tableaux de variations établis en **4.** et d'après la position des courbes établie en **3.** La courbe rouge correspond à $k=-1$, la courbe violette à $k=-3$, la courbe bleue à $k=1$ et la courbe verte à $k=2$.

71 « Il suffit ».

72 Pour tout réel t, $-1\leqslant \cos(2t+\dfrac{\pi}{3})\leqslant 1$.

Comme pour tout réel t, $e^{-t}>0$, on déduit que pour tout réel t, $-e^{-t}\leqslant e^{-t}\cos(2t+\dfrac{\pi}{3})\leqslant e^{-t}$ et *a fortiori* pour $t\geqslant 0$.

2. $-e^{-t}\leqslant e^{-t}\cos(2t+\dfrac{\pi}{3})\leqslant e^{-t} \Leftrightarrow |f(t)|\leqslant e^{-t}$, donc $e^{-t}\leqslant 10^{-4}$ suffit pour que $-10^{-4}\leqslant f(t)\leqslant 10^{-4}$.

73 Raisonnement faux car e^{-x} n'est pas une constante.

Pour tout réel x, $(x+1)e^{-x}=xe^{-x}+e^{-x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}=0$.

74 **1.** Il semble que la limite de f en 0 est égale à 0.

2. a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

b. Par exemple min : – 0.1 max : 0.1 pour les abscisses et min : – 0,01 ; max : 0,01 pour les ordonnées.

Faire le point sur le cours

75 $x\mapsto x$; $n\in\mathbb{N}^*$, $x\mapsto x^n$, $x\mapsto e^x$, $x\mapsto \ln(x)$.

76 Non

77 $\infty-\infty$; $0\times\infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$.

78 0

79 **a.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

b. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

80 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

APPROFONDISSEMENT

95 **1. a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables et $f'(x) = 1 - \sin(x)$.

Pour tout réel x, $1 - \sin(x) \geqslant 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Il en résulte que f' est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en ces points isolés $\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $x - 1 \leqslant x + \cos(x) \leqslant x + 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. f est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 0 étant dans $]-\infty\,;+\infty[$ ensemble des valeurs prises par f et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Par approximations successives, on obtient $\alpha \approx -0{,}739$ à 10^{-3} près.

Remarque

$x + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\cos(x)$ comme pour tout réel x, $-1 \leqslant -\cos(x) \leqslant 1$. Il en résulte que les solutions de l'équation $x + \cos(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ si elles existent sont dans $[-1\,;1]$.

$f'(x) = 1 - \sin(x)$ et $1 - \sin(x) > 0$ sur $[-1\,;1]$ car $[-1\,;1] \subset \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc f est strictement croissante sur $[-1\,;1]$.

$f(-1) = -1 + \cos(-1) = -1 + \cos(1)$ et $-1 + \cos(1) < 0$.

$f(1) = 1 + \cos(1)$ et $1 + \cos(1) > 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique α dans $[-1\,;1]$ et donc sur $\mathbb{R}$. $\alpha \approx -0{,}739$ à 10^{-3} près.

2. a. $\sin(x) - \dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \dfrac{x}{2}$.

Comme $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, il est donc nécessaire pour que x soit solution que $-1 \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant 1$, c'est-à-dire $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

b. Pour tout réel x, posons $g(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{2}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto -\dfrac{x}{2}$. $g'(x) = \cos(x) - \dfrac{1}{2}$.

Par **a.** toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont situées dans $[-2\,;2]$. On étudiera donc g sur $[-2\,;2]$ et g étant impaire sur $[-2\,;2]$ on réduira l'étude de g à $[0\,;2]$.

Sur $[0\,;2]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right[$ et $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{\pi}{3}\,;2\right]$.

g est donc strictement croissante sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;2\right]$.

D'où le tableau de variations de g suivant sur $[0\,;2]$.

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		2
$g'(x)$	$\dfrac{1}{2}$	$+$	0	$-$	$\approx -0{,}9$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}37$	$\searrow$	$\approx -0{,}09$

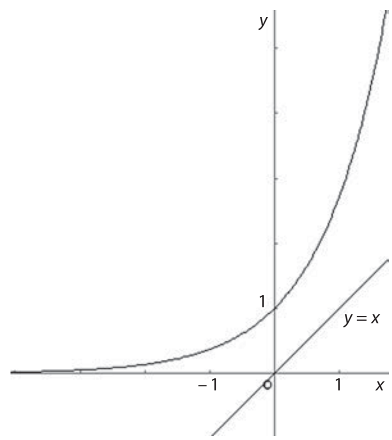
D'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0 = \sin(x) - \dfrac{x}{2}$ a donc deux solutions dans $[0\,;2]$: 0 et une solution α dans $\left]\dfrac{\pi}{3}\,;2\right[$. Comme g est impaire sur $[-2\,;2]$, l'équation $\sin(x) - \dfrac{x}{2} = 0$ a donc aussi pour solution $-\alpha$.

Toutes les solutions de l'équation $\sin(x) - \dfrac{x}{2} = 0$ dans $\mathbb{R}$ étant dans $[-2\,;2]$, il en résulte que l'équation (E) a exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$: $-\alpha\,;0\,;\alpha$,

$g(1{,}895) > 0$ et $g(1{,}896) < 0$.

Pour α, la plus grande solution, on peut donc prendre par exemple, comme valeur approchée à 10^{-3} près 1,895.

96 **1. a.**



Graphiquement, on constate que la courbe d'équation $y = e^x$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x$, d'où $e^x > x$.

b. Pour tout réel x, posons $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -\dfrac{x^2}{2}$.

$f'(x) = e^x - x$, donc par **a.**, pour tout réel x, $f'(x) > 0$. Il en résulte que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ d'où, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.

Comme $f(0) = 1$, on en déduit que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$ soit $e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$.

2. a. Pour tout réel x et pour tout entier $p \geqslant 2$,

$$g_p'(x) = e^x - p\frac{x^{p-1}}{p!} = e^x - \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} = g_{p-1}(x).$$

b. Par récurrence

Initialisation : pour tout réel $x \geqslant 0$, par **1.a**.
$e^x \geqslant x$ d'où $g_1(x) \geqslant 0$.

Hérédité : pour tout entier p dans $\mathbb{N}^*$ si pour tout $x \geqslant 0$, $g_p(x) \geqslant 0$ alors comme par **a.** $g'_{p+1} = g_p$, g_{p+1} est croissante sur $[0\,;+\infty[$, il en résulte que pour tout $x \geqslant 0$, $g_{p+1}(x) \geqslant g_{p+1}(0)$ avec $g_{p+1}(0) = 1$, donc pour tout $x \geqslant 0$, $g_{p+1}(x) \geqslant 0$.

Conclusion : pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, $g_p(x) \geqslant 0$.

3. a. Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{e^x}{x^n} - \frac{x}{(n+1)!} = \frac{e^x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{x^n} = \frac{g_{n+1}(x)}{x^n}.$$

Par **2.** $g_{n+1}(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$, comme $x^n > 0$ il en résulte $\dfrac{g_{n+1}(x)}{x^n} \geqslant 0$, d'où $\dfrac{e^x}{x^n} \geqslant \dfrac{x}{(n+1)!}$.

b. Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{(n+1)!} = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Pour tout $x > 0$, $x^n e^{-x} = \dfrac{x^n}{e^x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^n}}$, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$,

il en résulte $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^n}} = 0$, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

97 **1.** Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n) = \sin(2n\pi) = 0$.
Donc la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0.

2. Pour tout entier naturel n, $f\left(\dfrac{n}{4}\right) = 0$ pour n pair,
$f\left(\dfrac{n}{4}\right) = -1$ ou $f\left(\dfrac{n}{4}\right) = 1$ pour n impair.

Donc la suite $\left(f\left(\dfrac{n}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, il en résulte que f n'a pas de limite en $+\infty$.

98 **a.** Pour tout $x > 0$, $x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

$$= \frac{(x+1-\sqrt{x^2+2x+2})(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - x^2 - 2x - 2}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{-1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2x + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = +\infty$, puis

$\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = +\infty$.

Il en résulte $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}} = 0$.

Soit $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 0$.

b. Pour tout $x < 0$, $\sqrt{x^2+1} = -x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ d'où

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \frac{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}{x} = -1 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -1 - \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -2$.

Soit $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = -2$.

c. Pour $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x^2} = \dfrac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-2\right)}{x^2}$

$$= \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\right).$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} - 2 = -1$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, il en résulte $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-2\right) = 0$.

Soit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x^2} = 0$.

d. Pour $x < 0$, $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x^2} = \dfrac{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+2\right)}{x^2}$

$$= -\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right).$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x^2} = 0$.

99 **1.** Pour tout réel x, posons $f(x) = 2x^3 + 3x^2$.
f étant une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$.
Pour tout x dans $]-\infty\,;-1[$, $f'(x) > 0$.
Pour tout x dans $]-1\,;0[$, $f'(x) < 0$.
Pour tout x dans $]0\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$.
Il en résulte que f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$, strictement décroissante sur $[-1\,;0]$ et strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$.

D'où le tableau de variations de f ci-dessous :

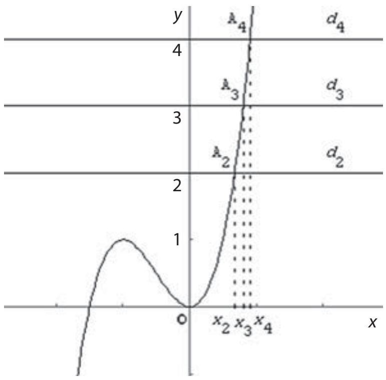
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 2$ et pour tout réel x, $2x^3 + 3x^2 - n = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 = n \Leftrightarrow f(x) = n$.

Comme $n \geqslant 2$, n n'est ni dans $]-\infty\,;\,1]$, ni dans $[0\,;\,1]$, d'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = n$ n'a donc de solution ni dans $]-\infty\,;\,-1]$ ni dans $[-1\,;\,0]$.

En revanche, n est dans $[0\,;\,+\infty[$, ensemble des valeurs prises par f lorsque x décrit $[0\,;\,+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires comme f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique x_n dans $[0\,;\,+\infty[$.

2.



A_2, A_3, A_4 sont les points d'intersections respectifs des droites $d_2 : y = 2$, $d_3 : y = 3$ et $d_4 : y = 4$ avec la courbe d'équation $y = 2x^3 + 3x^2$.

x_2, x_3, x_4 sont les abscisses respectives de A_2, A_3, A_4.

3. Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 2$,

$f(x_{n+1}) = n + 1$ et $f(x_n) = n$. Par **1.** on sait que $x_n \geqslant 0$ et que f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc, comme $n + 1 > n$, on en déduit $x_{n+1} > x_n$.

La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est donc croissante et même strictement croissante.

4. Pour tout réel a, $a > 0$ et pour tout entier naturel n, $n \geqslant 2$ et $n \geqslant f(a)$, f étant croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, comme $f(x_n) = n$ on en déduit $x_n \geqslant a$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ n'est donc pas majorée. Toute suite convergente étant bornée, elle ne peut donc pas converger.

5. Par **3.** la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et par **4.** on sait qu'elle n'est pas majorée, elle diverge donc vers $+\infty$.

100 $f(g(x)) = (\sin(x) + \cos(x))^2 + \pi = \sin(2x) + \pi + 1$.

Donc $x \mapsto f(g(x))$ a pour dérivée $x \mapsto 2\cos(2x)$ et le nombre dérivé en 0 est donc égal à 2.

$g(f(x)) = \sin(x^2 + \pi) + \cos(x^2 + \pi)$

donc $x \mapsto (g(f(x))$ a pour dérivée

$x \mapsto 2x\cos(x^2 + \pi) - 2x\sin(x^2 + \pi)$ et le nombre dérivé en 0 est donc égal à 0.

101 **1.** g est la composée de $x \mapsto -\dfrac{x}{4}$ suivie de $x \mapsto e^x$, deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$, comme pour tout réel X, $e^X > 0$, il en résulte $g'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{4}x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{4}x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{4}x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{4}x} = 0$.

2. La courbe de h représente un phénomène d'oscillation, dû à la fonction cosinus, amorti par la fonction g.

h s'annule sur $[0\,;\,+\infty[$ en tout point $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

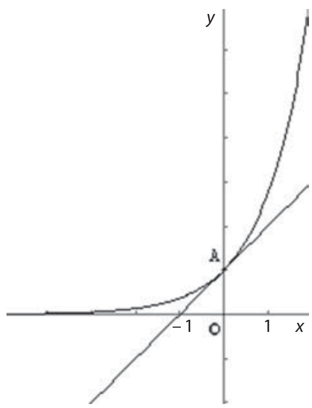
Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $h(n\pi) = \left(-\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\right)^n$.

De plus $0 < \dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}} < 1$ donc la suite $\left(\left(-\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0.

102 **1.** La suite semble être croissante et converger vers 0.

2. a. Toute suite croissante et majorée converge, donc (u_n) converge.

b.



La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $x \mapsto e^x$ au point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et $\mathscr{C}$ est située au-dessus de sa tangente en A, donc pour tout réel x

$$e^x \geqslant x + 1 \text{ et } e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

c. Par **a.** la suite (u_n) converge. Sa limite l est une solution de l'équation $e^x = x + 1$ qui a pour seule solution 0. Donc $l = 0$.

103 **1.** Pour tout entier k, $k > 1$, on peut remarquer que $f_k(0) = 0$ et $f_k(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc les points $O(0\,;\,0)$ et $A\left(1\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sont communs à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$.

Ce sont les deux seuls points car

$f_{k+1}(x) = f_k(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

2. a. Pour tout réel x, $x > 0$;

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$.

b. Pour $k \geqslant 2$ et pour $x > 0$, $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} x^{k-1}$

$k - 1 \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{k-1} = +\infty$,

comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$, il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$.

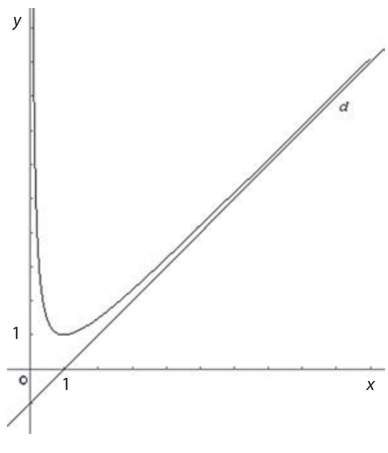
3. Pour tout réel $x > 0$, $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} = x$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} = +\infty$.

4. $\mathscr{C}_1$ est la courbe verte car $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$.

$\mathscr{C}_3$ est la courbe rouge et $\mathscr{C}_2$ la courbe bleue car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_3(x)}{f_2(x)} = +\infty$.

104 **1. a. b.**



2. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$: $x \mapsto x - 1$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Donc $f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ sur $]0\,;1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$.
f est donc strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} x - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, la courbe $\mathscr{C}$ a donc l'axe des ordonnées pour asymptote.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour tout $x > 0$, $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x}$ donc $f(x) - (x - 1) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc au-dessus de la droite d.

4. a. $PM = |y_M - y_P|$ comme $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite d. $y_M - y_P > 0$, donc
$PM = |y_M - y_P| = y_M - y_P = f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x}$.

b. Pour de grandes valeurs de x, PM prend des valeurs proches de 0.

c. Pour avoir $PM < 0{,}001$, il suffit que $0 < \frac{1}{x} < 0{,}001$, soit $x > 1000$.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} PM = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. La courbe $\mathscr{C}$ et la droite d deviennent aussi proches l'une de l'autre qu'on le veut dès que x est assez grand.

105 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+3} = 0$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 = -\infty$, il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f(x) - (x + 2) = -\frac{4e^x}{e^x+3}$,

on a vu en **1.** que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+3} = 0$;

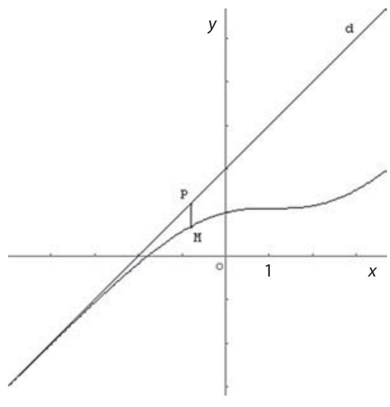
donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x + 2) = 0$ et $|f(x) - (x + 2)| = \frac{4e^x}{e^x+3}$.

$\frac{4e^x}{e^x+3} < 0{,}001 \Leftrightarrow 3{,}999e^x < 0{,}003$

$\Leftrightarrow e^x < \frac{1}{1\,333}$ c'est-à-dire $x < -\ln(1333)$.

$-\ln(1333) \approx -7{,}2$.
Donc si $a < -7{,}2$,
pour $x < a$, $|f(x) - (x + 2)| < 0{,}001$.

3. a.



b. $PM = |f(x) - (x + 2)| = \left|\frac{-4e^x}{e^x+3}\right| = \frac{4e^x}{e^x+3}$ car pour tout réel x, $e^x > 0$.

c. On a vu en **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+3} = 0$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} PM = 0$.
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite d deviennent aussi proches l'une de l'autre qu'on le veut dès que x est suffisamment voisin de $-\infty$.

106 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Pour tout réel x différent de 2 et de 0,
$f(x) - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x-2}$, sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;2[$, $\frac{1}{x-2} < 0$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donc en dessous de la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{2x}$ sur chacun des intervalles $]-\infty\ ; 0[$ et $]0 ; 2[$.

Sur $]2 ; +\infty[$, $\dfrac{1}{x-2} > 0$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc au-dessus de la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{2x}$ sur $]2 ; +\infty[$.

3. $\text{PM} = \left|f(x) - \dfrac{1}{2x}\right| = \left|\dfrac{1}{x-2}\right|$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-2}$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{PM} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{PM}$.

Les deux courbes sont aussi proches l'une de l'autre que l'on veut dès que x est suffisamment voisin de $-\infty$, ou de $+\infty$.

107 Voir fichier sur le site Math'x.

1. Sur GeoGebra créer le curseur a avec min:1 et max:20 et en l'incrémentant de 1. Créer le curseur b avec min:0 et max:20 en l'incrémentant de 1.

2. On conjecture $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} -bt = -\infty$ car $b > 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

Donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-bt} = 0$,

il en résulte $\lim\limits_{t\to+\infty} ae^{-bt} = 0$, comme $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$,

on en déduit par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{ae^{-bt}} = 1$.

3. a. p est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, car p est la composée de $t \mapsto ae^{-bt}$ dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, suivie de $X \mapsto e^X$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel t dans $[0 ; +\infty[$,
$p'(t) = (-a)(-be^{-bt})\,e^{-ae^{-bt}} = ab\,e^{-bt}\,e^{-ae^{-bt}}$,
pour tout réel X, $e^X > 0$, donc $e^{-bt} > 0$ et $e^{-ae^{-bt}} > 0$,
il résulte que $p'(t)$ a le même signe que ab et donc $p'(t) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$, p est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b.

t	0	$+\infty$
$p'(t)$	$+$	
$p(t)$	e^{-a} ↗	1

4. Observation du comportement de la courbe donnée par l'énoncé de cette question **4.**

5. a.

a	6	2	2	3
b	1	1	2	3
x_A	1,8	0,6	0,3	0,35
y_A	0,37	0,33	0,33	0,35

L'ordonnée de A semble être constante et voisine de 0,3 à 10^{-1} près.

b. $p''(t) = -ab^2\exp(-bt)\cdot\exp(-a\exp(-bt)) + ab\exp(-bt)(ab\exp(-bt)\exp(-a\exp(-bt)))$
$= ab^2\exp(-bt)\exp(-a\exp(-bt))(-1 + a\exp(-bt))$.

Comme $ab^2\exp(-bt)\exp(-a\exp(-bt)) > 0$ car pour tout réel X $e^X > 0$ et $ab > 0$, $p''(t)$ est du signe de $ae^{-bt} - 1$.

c.

t	0		$t_0 = \dfrac{\ln(a)}{b}$		$+\infty$
$p''(t)$		$+$	0	$-$	

d. $p(t_0) = \exp\left(-a\exp\left(-b\cdot\dfrac{\ln(a)}{b}\right)\right)$
$= \exp\left(-a\exp\left(\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)\right) = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$.

Pour déterminer sur la courbe le moment où la croissance ralentit, on détermine le point d'intersection A de la courbe et de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{e}$, puis on lit l'abscisse de A.

108 $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x-a}{b} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

Donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right) = +\infty$,

puis $\lim\limits_{x\to-\infty} -\exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right) = -\infty$, comme $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(-\exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right)\right) = 0$.

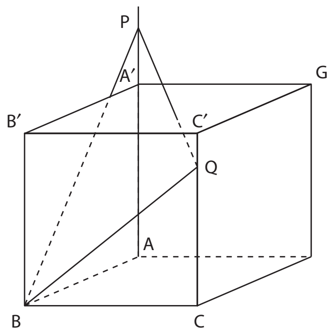
$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x-a}{b} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} -\exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right) = 0$,

comme $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$ par composition

$\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(-\exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right)\right) = 1$.

109 **1.**



2. C(3 ; 4 ; 0), C′(3 ; 4 ; 4), Q(3 ; 4 ; 3).

3. a. $\text{PB} = \sqrt{z^2 + 9}$.

$\text{PQ} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (z-3)^2} = \sqrt{25 + (z-3)^2}$.

b. En appliquant la formule d'Al-Kashi dans le triangle PBQ : $PQ^2 = BP^2 + BQ^2 - 2BP \times BQ\cos(\widehat{PBQ})$. Soit $25 + (z-3)^2 = (z^2+9) + 25 - 2\sqrt{z^2+9}\cdot\sqrt{25}\cdot\cos(\widehat{PBQ})$.
D'où $\cos(\widehat{PBQ}) = \cos(\alpha) = \dfrac{3z}{5\sqrt{z^2+9}}$. Comme $z > 0$,
$$\frac{3z}{5\sqrt{z^2+9}} = \frac{3z}{5z\sqrt{1+\dfrac{9}{z^2}}} = \frac{3}{5\sqrt{1+\dfrac{9}{z^2}}} = \cos(\alpha).$$

4. $z > 0$, $\sqrt{1+\dfrac{9}{z^2}} > 1$, donc $0 < \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{9}{z^2}}} < 1$

puis $0 < \dfrac{3}{5\sqrt{1+\dfrac{9}{z^2}}} < \dfrac{3}{5}$. Il en résulte $0 < \cos(\alpha) < \dfrac{3}{5}$.

5. $\lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{1}{z^2} = 0$ donc $\lim\limits_{z\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{9}{z^2}} = 1$ et

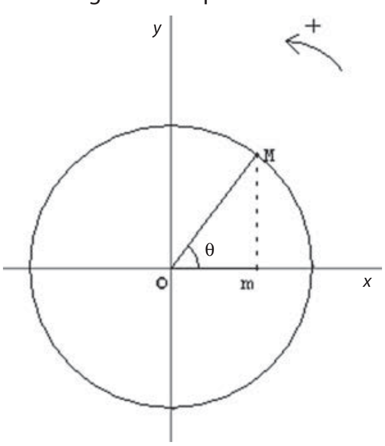
$\lim\limits_{z\to+\infty} \cos(\alpha) = \dfrac{3}{5}$.

6. a. La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1 ↘	0

$\dfrac{3}{5}$ appartient à l'intervalle $[0\,;1]$ qui est l'ensemble des valeurs prises pas la fonction cosinus sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel θ dans $[0\,;\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{3}{5}$.
Comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, ce réel θ est unique.

b. Soit $m(\frac{3}{5}\,;0)$ et M le point du cercle trigonométrique d'ordonnée positive tel que m soit le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. M est l'image de θ sur le cercle trigonométrique.



c. La limite de l'angle α lorsque z tend vers $+\infty$ est égale à l'angle $\widehat{mOM}$.

d. Une mesure de $\widehat{mOM}$ dans $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ est θ, $\theta \approx 0{,}9$ rad à 10^{-1} près (ou $53{,}1°$ à 10^{-1} près).

e. $B'Q = \sqrt{17}$, $BB' = 4$ et $BQ = 5$.
En appliquant la formule d'Al-Kashi dans le triangle B′BQ, $B'Q^2 = BQ^2 + BB'^2 - 2BQ \times BB'\cos(\widehat{B'BQ})$.
C'est-à-dire $17 = 41 - 40\cos(\widehat{B'BQ})$.
Soit $\cos(\widehat{B'BQ}) = \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$.
D'où $\widehat{B'BQ} = \theta$.
Lorsque z tend vers $+\infty$ la demi-droite [BP) tend vers la demi-droite [BB′) et donc l'angle $\widehat{PBQ}$ tend vers l'angle $\widehat{B'BQ}$.

PROBLÈMES

110 **1.** $f(0) = 220$.

2. $t \mapsto \exp(-\frac{t}{2})$ est de la forme e^u avec u fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ici $u : t \mapsto -\dfrac{t}{2}$ et $I = [0\,;+\infty[$.
Pour tout réel t dans $[0\,;+\infty[$, $f'(t) = -100e^{-\frac{t}{2}}$.
Comme pour tout réel x, $e^x > 0$, $f'(t) < 0$ sur $[0\,;+\infty$.
F est donc strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
$\lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{t}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{2}} = 0$. Il en résulte $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$.

3. a. d_n représente la différence de température entre l'heure n et l'heure $(n+1)$.
b. $d_0 = f(0) - f(1) \approx 78{,}7$ à 10^{-1} près
$d_1 = f(1) - f(2) \approx 47{,}7$ à 10^{-1} près
c. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 20$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 20$, il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

4. a. $d_n = f(n) - f(n+1) = \left(200e^{-\frac{n}{2}} + 20\right) - \left(200e^{-\frac{n+1}{2}} + 20\right) = 200e^{-\frac{n}{2}}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

b. Pour tout entier naturel n,
$200e^{-\frac{n}{2}}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) = 200\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)(e^{-\frac{1}{2}})^n$.
(d_n) est donc une suite géométrique de premier terme $d_0 = 200\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)$, avec $200\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \approx 78{,}7$ à 10^{-1} près et de raison $e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
Pour tout entier naturel n,
$d_{n+1} - d_n = d_0q^{n+1} - d_0q^n = d_0q^n\,(q-1)$ avec $q = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
$d_0 > 0$ et $0 < \dfrac{1}{\sqrt{e}} < 1$ donc $d_{n+1} - d_n < 0$.
Il en résulte que la suite (d_n) est décroissante.

5. a. Par exemple sur tableur on trouve $d_{13} \approx 0{,}12$ et $d_{14} \approx 0{,}07$.

Donc comme (d_n) est décroissante, $n_0 = 14$.

b. Voir fichier sur le site Math'x.

c. $d_n < 0{,}1 \Leftrightarrow d_0 q^n < 0{,}1 \Leftrightarrow n\ln(q) < \ln\left(\dfrac{0{,}1}{d_0}\right)$.

$q = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ donc $\ln(q) = -\dfrac{1}{2} < 0$ d'où $n > -2\ln\left(\dfrac{0{,}1}{d_0}\right)$.

$-2\ln\left(\dfrac{0{,}1}{d_0}\right) \approx 13{,}3$, donc comme n est entier la plus petite valeur n_0 telle que pour $n \geqslant n_0$ l'abaissement de la température soit inférieur à 0,1 °C est égale à 14.

111 **A. 1. a.** $f(x) = -\dfrac{x^2}{10} + 2x$, f est dérivable sur $[0\,;20]$ et $f'(x) = -\dfrac{x}{5} + 2$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$

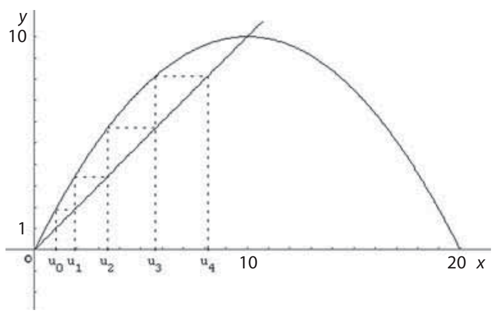
$0 \leqslant x < 10$, $f'(x) > 0$; $10 < x \leqslant 20$, $f'(x) < 0$.

Donc f est strictement croissante sur $[0\,;10]$ et décroissante sur $[10\,;20]$.

x	0		10		20
$f'(x)$	2	+	0	–	– 2
$f(x)$	0	↗	10	↘	0

b. D'après le tableau de variations de f sur $[0\,;20]$, f admet un maximum absolu sur $[0\,;20]$ égal à 10 et un minimum absolu égal à 0 donc pour tout $x \in [0\,;20]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 10$.

2. a.



b. On peut conjecturer que la suite est croissante et majorée par 10.

3. Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}9$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$.

Hérédité : pour tout n dans $\mathbb{N}$, si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

Alors $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(10)$.

Comme $f(0) = 0$, $f(10) = 10$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ on en déduit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$.

Conclusion : pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. Sa limite l est une solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0\,;10]$.

$f(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{10} + x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{10}x(10 - x) = 0$.

Donc $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 10$.

La suite étant croissante tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à u_0. Donc $l \geqslant u_0$, comme $u_0 = 1$, $l = 0$ est exclu donc $l = 10$.

B. 1. $t \mapsto \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)$ est de la forme e^u avec u fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ici $u : t \mapsto -\dfrac{x}{2}$ et $I = [0\,;+\infty[$.

Donc $x \mapsto 9e^{-\frac{x}{2}} + 1$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et comme pour tout réel x, $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $9e^{-\frac{x}{2}} + 1 \neq 0$ sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et

$g'(x) = 45\dfrac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2}$.

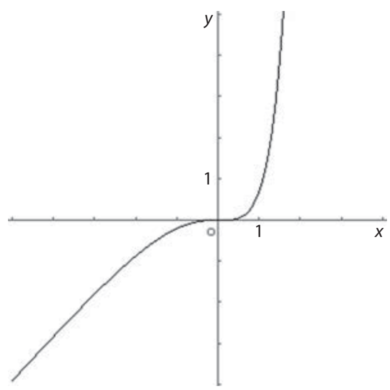
Donc pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) > 0$. Il en résulte que g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{2}x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, donc par composition

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0$, il en résulte $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 10$.

Avec le temps, le nombre de foyers possédant un téléviseur à écran plat tend à se rapprocher de 10 millions et à se stabiliser.

112 **1.**



2. À partir du graphique, il semble que :

a. la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

b. l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique égale à 0.

3. a. En posant $X = e^x$,

$e^{2x} - 2{,}1e^x + 1{,}1 = X^2 - 2{,}1X + 1{,}1$;

$X^2 - 2{,}1X + 1{,}1 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 1{,}1$.

Il en résulte $X^2 - 2{,}1\,X + 1{,}1 = (X - 1)(X - 1{,}1)$.

D'où, pour tout réel x,

$e^{2x} - 2{,}1e^x + 1{,}1 = (e^x - 1)(e^x - 1{,}1)$.

x		0		ln(1,1)	
$e^{2x} - 2{,}1e^x + 1{,}1$	+	0	…–…	0	+

$e^{2x} - 2{,}1e^x + 1{,}1 > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > \ln(1{,}1)$.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables : $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$, $x \mapsto -2{,}1e^{x}$ et $x \mapsto 1{,}1x + 1{,}6$.

$f'(x) = e^{2x} - 2{,}1e^{x} + 1{,}1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1{,}1x + 1{,}6 = -\infty$.

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\frac{1}{2}e^{2x} - 2{,}1e^{x} = e^{2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{2{,}1}{e^{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{2{,}1}{e^{x}}\right) = \frac{1}{2}$.

$e^{2x} = (e^{x})^2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$.

Il en résulte $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De ces résultats et de **3.a**., on en déduit le tableau de variations de f ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$\ln(1{,}1)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\approx -0{,}00016$	$\nearrow$	$+\infty$

c. Par le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, l'une égale à 0 l'autre dans $]\ln(1{,}1) ; +\infty[$ et égale à 0,14131 à 10^{-5} près.

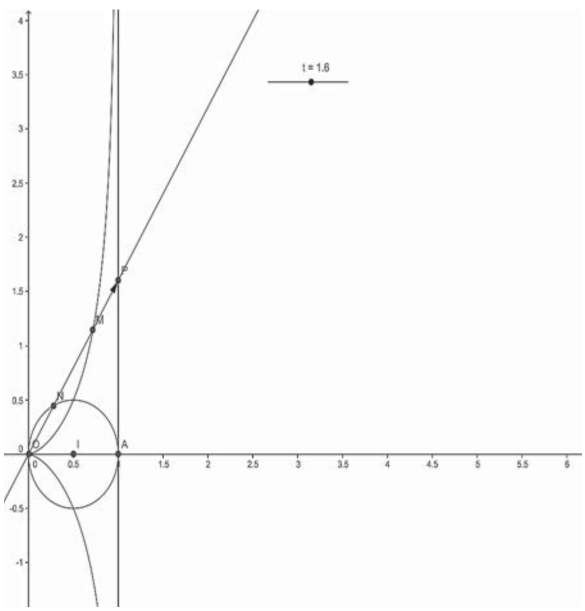
Remarque

Les conjectures faites en **2.a.** à partir du graphique sont donc fausses.

4. $-0{,}0002 \leqslant y \leqslant 0{,}0002$.

113 **A. 1. et 2.** Voir fichier sur le site Math'x.

Avec GeoGebra on obtient la figure ci-dessous :



B. 1. $\Delta_t : y = tx$ d'où $P(1 ; t)$.

2. $\mathscr{C} : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

$$M(x ; y) \in \mathscr{C} \cap \Delta_t \iff \begin{cases} y = tx \\ (x - \frac{1}{2})^2 + t^2x^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^3}{t^2+1} \end{cases}$$

3. $(x ; y)$ coordonnées de M point d'intersection de Δ_t et de $\mathscr{C}$ donc

$$x(x^2 + y^2) - y^2 = \frac{t^2}{t^2+1}\left(\frac{t^4}{(t^2+1)^2} + \frac{t^6}{(t^2+1)^2}\right) - \frac{t^6}{(t^2+1)^2}$$
$$= \frac{t^2}{t^2+1}\left(\frac{t^4(t^2+1)}{(t^2+1)^2}\right) - \frac{t^6}{(t^2+1)^2}$$
$$= \frac{t^6}{(t^2+1)^2} - \frac{t^6}{(t^2+1)^2} = 0.$$

4. a. $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0 \iff x^3 + y^2(x - 1) = 0$.

Comme pour tout réel y, $1 \cdot (1 + y^2) - y^2 = 1$, pour tout réel y les couples $(1 ; y)$ ne sont pas solution de l'équation $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$.

Remarque

Cela signifie que la droite $d : x = 1$ et l'ensemble $\mathscr{E}$ n'ont pas de point commun.

Il en résulte que pour tout point $M(x ; y)$ de $\mathscr{E}$, $x \neq 1$, d'où

$x^3 + y^2(x - 1) = 0 \iff y^2 = -\frac{x^3}{x-1} = \frac{x^3}{1-x}$.

Remarque

Comme $y^2 \geqslant 0$ et $\frac{x^3}{1-x} = \frac{x \times x^2}{1-x}$ on en déduit que $\frac{x}{1-x} \geqslant 0$ c'est-à-dire $0 \leqslant x < 1$.

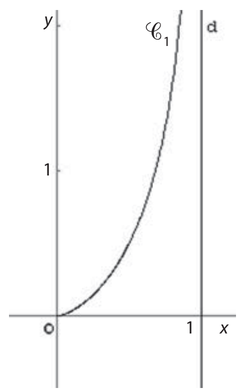
Donc $y^2 = \frac{x^3}{1-x} \iff y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

$\mathscr{E}$ est donc la réunion de la courbe $\mathscr{C}_1$ d'équation

$y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = f(x)$ et de la courbe $\mathscr{C}_2$ d'équation

$y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = -f(x)$ qui est donc la symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.

b.



5. a. g est une fonction paire donc on peut réduire son étude à $[0\,;+\infty[$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car g est une fonction rationnelle dont le polynôme au dénominateur t^2+1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$g'(t)=\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ donc $g'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$ et pour $t>0$, $g'(t)>0$, donc g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{t^2}=1$. g étant paire, on en déduit le tableau de variations ci-dessous :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

b. Il en résulte d'après le tableau de variations que, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $g(t)$ décrit $[0\,;1[$.

c. $h: t \mapsto \dfrac{t^3}{1+t^2}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty} t=+\infty$.

De même $\lim\limits_{t\to-\infty} h(t)=-\infty$.

Pour tout réel t, $h'(t)=\dfrac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)2}$.

$h'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$ donc pour $t\neq 0$, $h'(t)>0$, h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où le tableau de variations ci-dessous :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

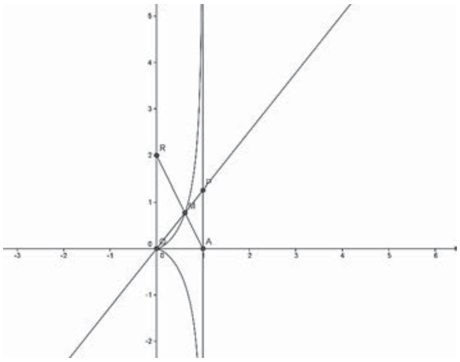
Donc d'après le tableau de variations de h, $h(t)$ décrit $\mathbb{R}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Comme pour tout réel t, $g(t)$ et $h(t)$ sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de tout point M de Γ, Γ est l'ensemble des points de $\mathscr{C}$ dont les abscisses décrivent $[0\,;1[$ et les ordonnées décrivent $\mathbb{R}$, or par **4.a.** tout point M de $\mathscr{C}$ a son abscisse qui décrit $[0\,;1[$ et son ordonnée qui décrit $\mathbb{R}$, donc $\mathscr{C}=\Gamma$.

6. a. Pour $x=0$, $y=t^3$, donc $\mathrm{R}(0\,;t^3)$.

b. Soit $\mathrm{R}(0\,;2)$, la droite (AR) coupe la cissoïde en $\mathrm{M}\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\,;\dfrac{2}{1+t^2}\right)$ avec t tel que $t^3=2$; la droite $(\mathrm{OM})=\Delta_t$, coupe la droite $d: x=1$ en $\mathrm{P}(1\,;t)$. Comme $t^3=2$, $t=\sqrt[3]{2}$ est l'ordonnée du point P.

c. Avec GeoGebra, on obtient la configuration suivante :



R a pour coordonnées $(0\,;2)$, la droite (AR) coupe la cissoïde en M, la droite (OM) coupe $d: x=1$ en $\mathrm{P}(1\,;\sqrt[3]{2})$ et $\sqrt[3]{2}\approx 1{,}126$.

114 En rapprochant les limites en $+\infty$ ou en $-\infty$, et en $(-3)^+$ ou $(-3)^-$ de $x\mapsto\dfrac{ax+b}{x+c}$ avec les asymptotes d'équations $y=-2$ et $x=-3$.

On peut supposer $a=-2$ et $c=3$ puis déterminer b pour que le point de coordonnées $(1\,;-1)$ soit sur la courbe.

Il nous suffit alors de vérifier que pour la courbe d'équation $y=\dfrac{-2x-2}{x+3}$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x}=-2$ de même en $+\infty$, donc la courbe a bien pour asymptote la droite d'équation $y=-2$.
- $\lim\limits_{x\to-3} -2x-2=-8$, $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{1}{x+3}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{1}{x+3}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{-2x-2}{x+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{-2x-2}{x+3}=-\infty$, la courbe a donc pour asymptote la droite d'équation $x=-3$.
- $\dfrac{-2\times 1-2}{1+3}=-1$ donc la courbe passe par le point de coordonnées $(1\,;-1)$.

115 $a\neq 0$ car sinon la courbe serait la droite d'équation $y=0$.

Posons, pour tout réel x, $f(x)=a(1-\mathrm{e}^{bx})$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-ab\mathrm{e}^{bx}$.

La droite (OA) est la droite d'équation $y=x$, donc $f'(0)=1$.

$f'(0)=1 \Leftrightarrow ab=-1$.

Il en résulte $f(x)=a\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$,

si $a<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

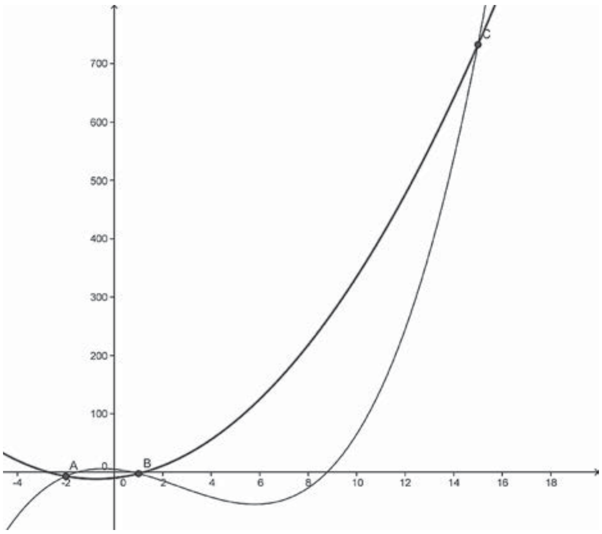
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$, donc comme $a\neq 0$, $a>0$.

Avec $a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}=0$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$.

Donc $a = 4$ et $b = -\frac{1}{4}$.

On vérifie que la courbe d'équation $y = 4\left(1 - e^{-\frac{x}{4}}\right)$ correspond bien à la courbe du graphique.

116 Avec GeoGebra en traçant les courbes d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 4x + 5$ et $y = 3x^2 + \frac{9}{2}x - 10$ avec $-15 \leqslant x \leqslant 20$ et $-100 \leqslant y \leqslant 800$, en utilisant « point commun à deux objets » et en cliquant sur chacune des deux courbes trois points en commun avec leurs coordonnées s'affichent : A (– 2 ; – 7), B (1 ; – 2,5) et C (15 ; 732,5).



Comme

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times (-2)^3 - 4 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 5 = -7 \\ \frac{1}{2} \times 1^3 - 4 \times 1^2 - 4 \times 1 + 5 = -2{,}5 \\ \frac{1}{2} \times 15^3 - 4 \times 15^2 - 4 \times 15 + 5 = 732{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \times (-2)^2 + \frac{9}{2} \times (-2) - 10 = -7 \\ 3 \times 1^2 + \frac{9}{2} \times 1 - 10 = -2{,}5 \\ 3 \times 15^2 + \frac{9}{2} \times 15 - 10 = 732{,}5 \end{cases}$$

les coordonnées des points A, B et C vérifient bien l'équation de chacune des courbes, ils sont donc bien communs aux deux courbes.

L'abscisse x de tout point commun aux deux courbes est solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 4x + 5 = 3x^2 + \frac{9}{2}x - 10$.

C'est-à-dire de $\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 - \frac{17}{2}x + 15 = 0$.

Donc – 2 ; 1 et 15 sont solutions de cette équation.

Les solutions de l'équation $\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 - \frac{17}{2}x + 15 = 0$ sont les racines du polynôme $\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 - \frac{17}{2}x + 15$, qui est de degré 3 et a donc au plus 3 racines. Il en résulte que les courbes n'ont pas d'autres points communs que les trois points A, B et C.

Autre méthode

L'abscisse x de tout point commun aux deux courbes est solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 - \frac{17}{2}x + 15 = 0$. En étudiant les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 7x^2 - \frac{17}{2}x + 15$ et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{14 - \sqrt{247}}{3}$		$\frac{14 + \sqrt{247}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\approx 17{,}5$	↘	≈ -270	↗	$+\infty$

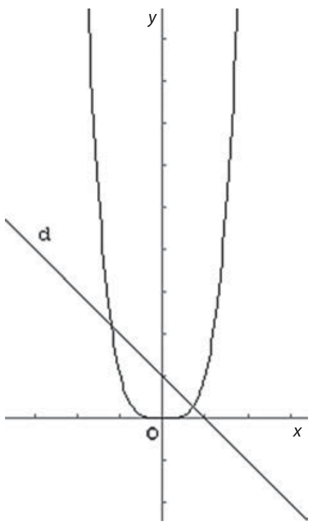
Donc d'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions respectivement dans $\left]-\infty ; \frac{14 - \sqrt{247}}{3}\right[$; $\left]\frac{14 - \sqrt{247}}{3} ; \frac{14 + \sqrt{247}}{3}\right[$, $\left]\frac{14 + \sqrt{247}}{3} ; +\infty\right[$.

Les deux courbes ont donc trois points en commun.

117 $n = 0$ pas de solution x^0 n'est pas défini en 0.

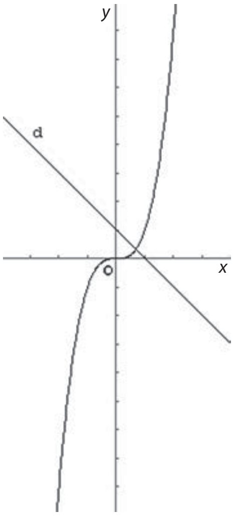
$n = 1$ une seule solution : 1.

On peut commencer par une étude graphique n pair et $n \geqslant 2$, toute courbe $\mathscr{C}_n$ d'équation $y = x^n$ a l'allure de la courbe ci-dessous et la droite $d : y = 1 - x$ coupe $\mathscr{C}_n$ en deux points distincts. L'équation $x^n = 1 - x$ a donc deux solutions distinctes : les abscisses des deux points d'intersection de $\mathscr{C}_n$ et d.



• *n* impair et $n \geqslant 3$

Toute courbe $\mathscr{C}_n$ d'équation $y = x^n$ a l'allure de la courbe ci-dessous et la droite $d : y = 1 - x$ coupe $\mathscr{C}_n$ en un seul point distinct. L'équation $x^n = 1 - x$ a donc une unique solution : l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_n$ et d.



• Algébriquement

$n = 2$ deux solutions : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Pour $n \geqslant 3$, $x^n = 1 - x \Leftrightarrow x^n + x - 1 = 0$.

Posons pour tout réel x, $f_n(x) = x^n + x - 1$.

• *n* pair

n pair et $n \geqslant 3$ donc $n \geqslant 4$.

$f'_n(x) = nx^{n-1} + 1$. $f''_n(x) = n(n-1)x^{n-2}$.

$n - 2$ est pair et $n - 2 \geqslant 2$, donc pour tout réel x non nul $f''_n(x) > 0$ et $f''_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

f'_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$n - 1 \geqslant 3$ et $n - 1$ impair donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} f'_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'_n(x) = +\infty$.

D'où le tableau de variations suivant de f_n :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''_n(x)$		$+$	0	$+$	
$f'_n(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

Il en résulte que $f'_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}$. $f'_n(0) = 1$ donc $f'_n(x_n) < f'_n(0)$. Comme f'_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• $x_n < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ car n est pair.

D'où le tableau de variation de f_n

x	$-\infty$		x_n		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$			
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_n(x_n)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$x_n < 0$, comme f_n est strictement croissante sur $[x_n ; +\infty[$, $f_n(x_n) < f_n(0)$, $f_n(0) = -1$ donc $f_n(x_n) < 0$.

Il en résulte d'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, l'une dans $]-\infty ; x_n[$, l'autre dans $]x_n ; +\infty[$, car $f_n(x_n) \neq 0$ puisque $f_n(x_n) < 0$.

Donc l'équation $x^n = 1 - x$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

• Conclusion pour *n* pair

Comme on a vu que pour $n = 2$ l'équation $x^n = 1 - x$ a deux solutions distinctes, on en conclut que pour tout entier ***n* pair et $n \geqslant 2$**, l'équation $x^n = 1 - x$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

• *n* impair

Le cas $n = 1$ ayant été traité, on suppose $n \geqslant 3$.

Pour tout réel x, $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1$.

n pair et $n \geqslant 3$ donc $n - 1$ pair et $n - 1 \geqslant 2$.

Il en résulte que pour tout réel x, $f'_n(x) > 0$, f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ car n est impair.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

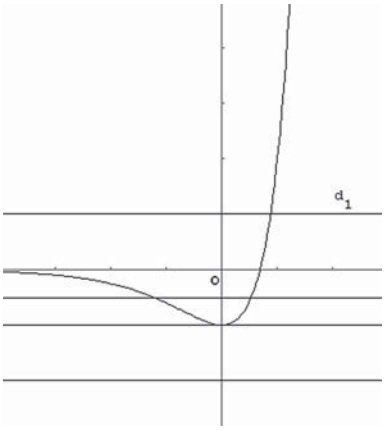
D'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une solution unique sur $\mathbb{R}$, donc l'équation $x^n = 1 - x$ aussi.

• Conclusion pour *n* impair

Comme on a vu que, pour $n = 1$, l'équation $x^n = 1 - x$ a une solution, on en conclut que pour tout entier ***n* impair,** l'équation $x^n = 1 - x$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

118 On peut commencer par une étude graphique en traçant sur la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel la courbe d'équation $y = e^{2x} - 2e^x$ puis faire des conjectures.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 2e^x - m = 0$, revient à résoudre l'équation $e^{2x} - 2e^x = m$, c'est-à-dire à déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite $d_m : y = m$ et de la courbe d'équation $y = e^{2x} - 2e^x$.



À partir de ce graphique, on peut conjecturer que, pour $m < -1$, l'équation (E_m) n'a pas de solution.

Pour $m = -1$, l'équation $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ a une solution unique 0.

Pour $-1 < m < 0$, l'équation (E_m) a deux solutions, l'une négative et l'autre positive.

Pour $m \geqslant 0$, l'équation (E_m) a une unique solution qui est positive.

Remarque : pour $m = 0$, la solution unique est égale à $\ln(2)$ car $e^{2x} - 2e^x = e^x(e^x - 2)$.

Donc à partir de cette étude graphique seule la réponse D est juste.

Autre méthode : on étudie les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - e^x$, sa limite en $-\infty$ et sa limite en $+\infty$.

$f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1 - \dfrac{2}{e^x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On obtient le tableau de variations ci-dessous :

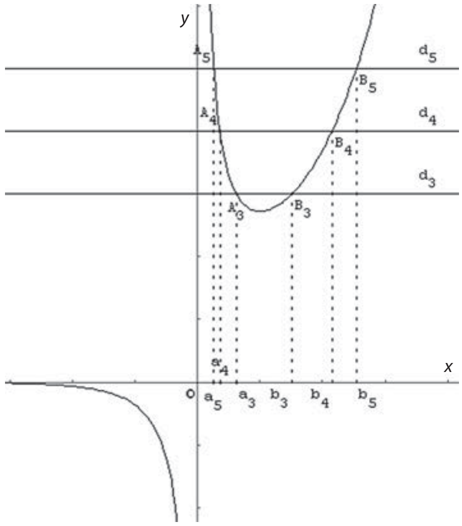
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Par le théorème des valeurs intermédiaires et d'après le tableau de variations on retrouve les résultats conjecturés dans l'étude graphique.

119 Quel que soit l'entier naturel n, $n \geqslant 3$, 0 n'est pas solution de l'équation $e^x = nx$, car $e^0 \neq 0$.

D'où $e^x = nx \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x} = n$.

Conjectures : pour n entier naturel, $n \geqslant 3$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = nx \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x} = n$, revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \dfrac{e^x}{x}$ avec la droite $d_n : y = n$.



En traçant à la main ou avec un logiciel la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d_3, d_4, d_5, on peut conjecturer qu'il y a deux solutions, l'une a_n avec $0 < a_n < 1$ et l'autre b_n avec $b_n > 1$, que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et que la suite $(b_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Résolution : soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$ avec $x \mapsto x$ ne s'annulant ni sur $]-\infty\,;0[$ ni sur $]0\,;+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Sur $]-\infty\,;0[$, $f'(x) < 0$; sur $]0\,;1[$, $f'(x) < 0$;
sur $]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

Donc sur $]-\infty\,;0[$ f est strictement décroissante, sur $]0\,;1]$ f est strictement décroissante et sur $[1\,;+\infty[$ f est strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to0} e^x = 1$, $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'où le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

$e < 3$, donc d'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = n$, $n \geqslant 3$,

• n'a pas de solution dans $]-\infty\,; 0[$;
• a une seule solution a_n dans $]0\,; 1]$ avec $0 < a_n < 1$, car $f(1) < 3$;
• a une seule solution b_n avec $b_n > 1$.

$f(a_n) = n$ et $f(a_{n+1}) = n + 1$ donc $f(a_n) < f(a_{n+1})$.
Comme f est strictement décroissante sur $]0\,; 1]$,
$f(a_n) < f(a_{n+1})$ entraîne $a_n > a_{n+1}$. La suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est donc strictement décroissante $f(b_n) = n$ et $f(b_{n+1}) = n + 1$ donc $f(b_n) < f(b_{n+1})$.
Comme f est strictement croissante sur $[1\,; +\infty[$
$f(b_n) < f(b_{n+1})$ entraîne $b_n < b_{n+1}$. La suite $(b_n)_{n\geqslant 3}$ est donc strictement croissante.

Étudions la limite de $(a_n)_{n\geqslant 3}$.
Pour tout réel ε, $0 < \varepsilon < 1$, soit un entier naturel n_0, $n_0 \geqslant 3$, tel que $n_0 > f(\varepsilon)$, alors $f(a_{n_0}) > f(\varepsilon)$ puis comme f est strictement décroissante sur $]0\,; 1]$, $0 < a_{n_0} < \varepsilon$.
Comme $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante, pour tout entier n, $n \geqslant n_0$, $0 < a_n \leqslant a_{n_0} < \varepsilon$.

Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Étudions la limite de $(b_n)_{n\geqslant 3}$.
Pour tout réel a, $a > 1$, soit un entier naturel n_0, $n_0 \geqslant 3$, tel que $n_0 > f(a)$, alors $f(b_{n_0}) > f(a)$ puis comme f est strictement croissante sur $[1\,; +\infty[$, $b_{n_0} > a$.
La suite $(b_n)_{n\geqslant 3}$ étant strictement croissante, on en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $b_n \geqslant b_{n_0} > a$.
Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $n \geqslant 3$, dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = nx \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x} = n$, a deux solutions a_n et b_n avec $0 < a_n < 1$ et $b_n > 1$.
La suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante.
La suite $(b_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement croissante.
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

120 L'affirmation est fausse.
En effet, posons $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 1$ et non 0.

121 Soit g la fonction définie sur $[0\,; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$, $g(0) = f(0)$ et $g(1) = f(1) - 1$.
Comme pour tout réel x de $[0\,; 1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) \leqslant 0$. f et $x \mapsto -x$ sont continues sur $[0\,; 1]$ donc g somme de f et de $x \mapsto -x$ est aussi continue sur $[0\,; 1]$. Il en résulte que par le théorème des valeurs intermédiaires g prend toute valeur α telle que $g(1) \leqslant \alpha \leqslant g(0)$, comme $g(1) \leqslant 0 \leqslant g(0)$ il existe donc au moins un réel a dans $[0\,; 1]$ tel que $g(a) = 0$, c'est-à-dire telle que $f(a) = a$. L'équation $f(x) = x$ a donc au moins une solution dans $[0\,; 1]$.

122 Pour tout réel x,

$$(x + \alpha)^3 + p(x + \alpha) + q = x^3 + 3\,\alpha x^2 + (3\,\alpha^2 + p)x + \alpha^3 + p\,\alpha + q.$$

Donc pour que, pour tout réel x,
$x^3 + ax^2 + bx + c = (x + \alpha)^3 + p(x + \alpha) + q$.
Il suffit que

$$\begin{cases} 3\alpha = a \\ 3\alpha^2 + p = b \\ \alpha^3 + p\alpha + q = c \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{3} \\ p = b - \dfrac{a^2}{3} \\ q = c - \dfrac{ab}{3} + \dfrac{2a^3}{27} \end{cases}$$

Il en résulte qu'alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} X^3 + pX + q = 0 \\ x = X - \alpha \end{cases}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + p$.

• $\boldsymbol{p = 0}$: $f(x) = x^3 + q$ et $f'(x) = 3x^2$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et pour $x \neq 0$, $f'(x) > 0$.
f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	q	$\nearrow$	$+\infty$

• $\boldsymbol{p > 0}$: $3x^2 + p > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• $\boldsymbol{p < 0}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ ou $x = \sqrt{-\dfrac{p}{3}}$.

D'où le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$		$\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right)$	$\searrow$	$f\left(\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour $p \geqslant 0$, d'après les deux tableaux de variations établis en **2.** et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Pour $p < 0$, $f\left(-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right) = -\dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}} + q$ et

$f\left(\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right) = \dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}} + q$.

Si $f\left(-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right) < 0$ c'est-à-dire $q < \dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ soit

$4p^3 + 27\,q^2 > 0$, d'après le tableau de variations établi en **2.** et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Si $f\left(\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right) > 0$ c'est-à-dire $q > -\dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$

soit $4p^3 + 27\,q^2 > 0$ d'après le tableau de variations établi en **2.** et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Si $f\left(-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right) = 0$ ou $f\left(\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right) = 0$ c'est-à-dire $q = \dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$

ou $q = -\dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$

soit $4p^3 + 27\,q^2 = 0$, d'après le tableau de variations établi en **2.** et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$, l'une des deux étant soit égale à $-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$, soit égale à $\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$.

Si $f(-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}) > 0$ c'est-à-dire $q > \dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$

et $f(\sqrt{-\dfrac{p}{3}}) < 0$ c'est-à-dire $q < -\dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$

soit $4p^3 + 27\,q^2 < 0$, d'après le tableau de variations établi en **2.** et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$.

Conclusion

• $4p^3 + 27q^2 > 0$
$x^3 + px + q = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.

• $4p^3 + 27q^2 = 0$
$x^3 + px + q = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$.

• $4p^3 + 27q^2 < 0$
$x^3 + px + q = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$.

Remarque : dégager dans l'étude $4p^3 + 27q^2$ n'est pas nécessaire, cela a juste été fait pour revenir à un résultat connu.

4. Pour tout réel x,

• $f(x) = x^3 - 27$; une seule solution : 3.
Remarque : $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

• $f(x) = x^3 - 3x + 2$; deux solutions.
Remarque : $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$

• $f(x) = x^3 - 2x + 1$; 3 solutions.
Remarque : $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$

123 **a.** Courbe verte **b.** Courbe rouge
c. Courbe bleue **d.** Courbe violette

Exemples
a. $f(x) = e^x$ **b.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2 + 1}$
c. $f(x) = \sqrt{|x|}$ **d.** $f(x) = 2x - 1$

Accompagnement personnalisé

1 Interpréter graphiquement des limites

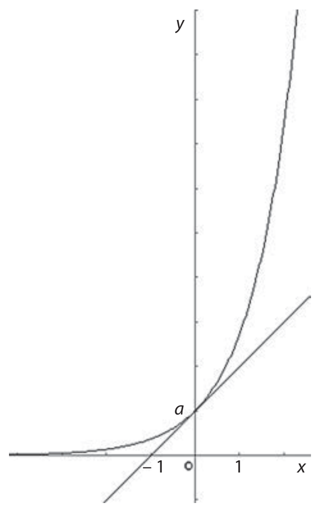
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{f(x) - 4}{x - 6} = 0$

2. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

b.



2 Lever des formes indéterminées avec des exponentielles

1. Le point sur les connaissances

a. $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$

b. Pour $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant x^2$ d'où pour $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} \geqslant x$;
comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ par comparaison on en déduit

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Pour tout réel x, $xe^x = -\dfrac{-x}{e^{-x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ et par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{e^{-x}} = 0$, il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, car $\exp'(0) = 1$.

c. Pour $x > 0$, $\dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

$xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ donc on revient au résultat précédent.

$\dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}$; comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

2. Lever les formes indéterminées

a. e^{2x} « écrase » e^x en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x = +\infty$.

$e^{2x} - e^x = e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{e^x} = 1$.

$e^{2x} = e^x \cdot e^x$ donc par l'opération produit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et par l'opération produit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right) = +\infty$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x = +\infty$.

b. La courbe d'équation $y = e^x + 4$ est l'image de la courbe d'équation $y = e^x + 1$ par la translation de vecteur $3\vec{j}$, $\vec{j}$ étant le vecteur unitaire du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Donc $x \mapsto e^x + 1$ et $x \mapsto e^x + 4$ ont le même comportement en $+\infty$ et aucune n'écrase l'autre.

On conjecture $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x + 4} = 1$.

$$\frac{e^x + 1}{e^x + 4} = \frac{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{4}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{4}{e^x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{4}{e^x}} = 1$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x + 4} = 1$.

c. En $+\infty$, $x \mapsto e^x$ écrase $x \mapsto x+4$ qui a le même comportement que $x \mapsto x$.

On conjecture $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - (x + 4) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x + 4} = +\infty$.

Démonstration

$e^x - (x + 4) = e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{4}{e^x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{4}{e^x} = 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, par l'opération produit on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{4}{e^x}\right) = +\infty$.

Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - (x + 4) = +\infty$

Pour x > 0, $\dfrac{e^x}{x + 4} = \dfrac{e^x}{x} \dfrac{1}{1 + \frac{4}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{4}{x}} = 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ par l'opération produit on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \dfrac{1}{1 + \frac{4}{x}} = +\infty$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x + 4} = +\infty$.

d. À partir de représentations graphiques à l'aide d'un logiciel ou de calculs pour de grandes valeurs de x, on conjecture $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - e^x - 5 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x}{e^x + 5} = +\infty$.

Démonstration

Pour $x > 0$, $xe^x - e^x - 5 = xe^x\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{xe^x}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{xe^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{xe^x} = 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, par l'opération produit on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{xe^x}\right) = +\infty$

soit $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - e^x - 5 = +\infty$.

$$\frac{xe^x}{e^x + 5} = \frac{xe^x}{e^x\left(1 + \frac{5}{e^x}\right)} = x\frac{1}{1 + \frac{5}{e^x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{5}{e^x}} = 1$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par l'opération produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{1}{1 + \frac{5}{e^x}} = +\infty$,

soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x}{e^x + 5} = +\infty$.

e. Pour tout réel x, $(2x + 3)e^x = 2xe^x + 3e^x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc par l'opération d'addition $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x + 3e^x = 0$, soit $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x + 3)e^x = 0$.

f. Pour tout réel x, $xe^{3x} = \frac{1}{3}(3xe^{3x})$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$

donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^{3x} = 0$,

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3}(3xe^{3x}) = 0$ soit $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{3x} = 0$.

g. Pour tout réel x, $xe^{-2x+5} = \frac{e^5}{2}\frac{2x}{e^{2x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ d'où par composition

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$, il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x+5} = 0$.

h. Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x(e^{\frac{1}{x}} - 1)} = \frac{1}{\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$, donc par composition

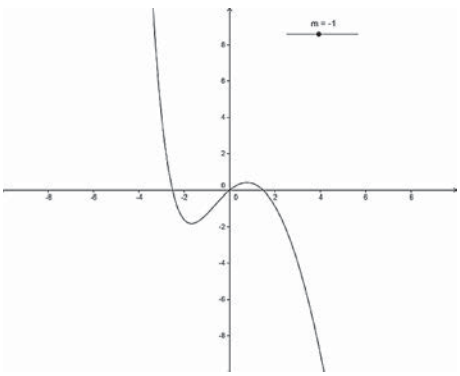
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$, d'où par passage à l'inverse

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x(e^{\frac{1}{x}} - 1)} = 1$.

3 Équations avec paramètres

Étape 1 – Pour conjecturer

En utilisant le logiciel GeoGebra créer un curseur m de -10 à 10 avec un incrément de 0,1 et entrer dans la zone de saisie f(x)=-x²+2x-1-meˣ. Par le menu *Options* choisir *Configuration* puis *Graphique* et régler l'axe X à min=-5 et max=5.



À la lecture graphique en observant les points où la courbe d'équation $y = -x^2 + 2x - 1 - me^{-x}$ a des points sur l'axe des abscisses, lorsqu'on fait varier m on peut conjecturer qu'on peut avoir :

0 solution, par exemple pour $m = 2$

1 solution par exemple pour $m = -2$

3 solutions par exemple pour $m = -1$ comme sur le graphique ci-dessus.

Il est plus difficile de faire apparaître en manipulant le curseur deux solutions mais on peut faire l'hypothèse que pour $m \approx -1{,}5$ il y en aurait 2.

Étape 2 – Pour démonter

1. Le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Sur $\mathbb{R}$,

$-x^2 + 2x - 1 - me^{-x} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 - \frac{m}{e^x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(-x^2 + 2x - 1)e^x - m}{e^x} = 0$

$\Leftrightarrow (-x^2 + 2x - 1)e^x = m$ car pour tout réel x, $e^x \neq 0$.

$(-x^2 + 2x - 1)e^x = m \Leftrightarrow f(x) = m$.

3. On peut remarquer que pour tout réel x,

$f(x) = -(x-1)^2 e^x$, donc pour tout réel x, $f(x) \leqslant 0$.

Il en résulte que pour $m > 0$ l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto -x^2 + 2x - 1$ et $x \mapsto e^x$.

Pour tout réel x, $f'(x) = (1 - x^2)e^x$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$.

$x^2e^x = 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0$, il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$f(x) = -x^2e^x + 2xe^x - e^x$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = -x^2e^x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc par l'opération produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$. Il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		
$f(x)$	0	↘	$-\frac{4}{e} \approx -1{,}5$	↗	0	↘	$-\infty$

D'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, dans $\mathbb{R}$:

$m > 0$: l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution

$m = 0$: 1 est l'unique solution

$-\frac{4}{e} < m < 0$: 3 solutions

$m = -\frac{4}{e}$: 2 solutions

$m < -\frac{4}{e}$: une seule solution

4. On retrouve les conjectures faites dans l'étape 1.

(4) La fonction tangente

1. Dans $\mathbb{R}$, $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. M étant un point image du réel x avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sur le cercle trigonométrique, M n'est pas l'un des deux points d'intersection de l'axe des ordonnées avec le cercle trigonométrique. Il en résulte que la droite (OM) n'est pas confondue avec l'axe des ordonnées. Elle n'est donc pas parallèle à la droite d. Les droites d et (OM) sont donc sécantes en un point T.

M a pour coordonnées $(\cos(x) ; \sin(x))$, avec $\cos(x)$ non nul. Une équation de la droite (OM) est donc $y = \tan(x)t$. Pour $t = 1$, $y = \tan(x)$, donc $T(1 ; \tan(x))$.

3. a. Le point image M de x et M′ de $-x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Les points d'intersection T et T′ des droites (OM) et (OM′) avec d sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses et ont donc des ordonnées opposées, d'où $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Le point M image de x et le point M′ image de $x + \pi$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à O. Les points O, M et M′ sont donc alignés, les droites (OM) et (OM′) sont alors confondues et ont le même point d'intersection T avec d, d'où $\tan(x + \pi) = \tan(x)$.

b. Lorsque x croît en restant dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ l'ordonnée de T croît, donc tan est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

c. Lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ et $x < \frac{\pi}{2}$ l'ordonnée de T tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$.

4. Pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

$x + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $x + \pi \notin D \Leftrightarrow x \notin D$,

d'où pour tout $x \in D$, $x + \pi \in D$.

Pour tout x dans D :

$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$

tan est dérivable sur D comme quotient de deux fonctions dérivables sur D et avec la fonction sinus au dénominateur ne s'annulant pas sur D.

Pour tout x dans D,

$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Pour tout x dans D, $1 + \tan^2(x) > 0$ donc tan est strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$ avec $\cos(x) > 0$ pour $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, donc $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$, soit $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$	$+$
$\tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$

5. a. $\tan(0) = 0$ et $\tan'(0) = 1$ et donc une équation de la tangente en O à Γ est $y = x$.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à Γ.

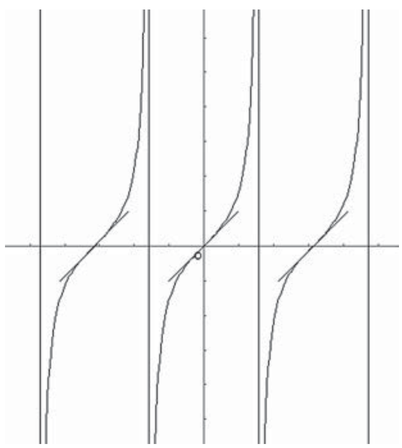
b. La fonction tangente étant impaire sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ la partie de Γ sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ est la symétrique de la partie tracée sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par rapport à l'origine 0, donc la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$, est aussi asymptote à Γ.

La fonction tan ayant pour période π, les tracés de Γ sur $\left]-3 ; -\frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2} ; 3\frac{\pi}{2}\right[$ s'obtiennent à partir de celui réalisé sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ respectivement par la translation de vecteur $-\pi\vec{i}$, et par la translation de vecteur $\pi\vec{i}$.

Donc les droites d'équation $x = -3\frac{\pi}{2}$ et $x = 3\frac{\pi}{2}$ sont aussi asymptotes à Γ.

La tangente Δ en O ayant pour équation $y = x$ les tangentes aux points de coordonnées $(-\pi ; 0)$ et $(\pi ; 0)$ sont parallèles à Δ et ont pour équations respectives $y = x + \pi$ et $y = x - \pi$.

On peut remarquer que Γ traverse ses tangentes en O et aux points de coordonnées $(-\pi ; 0)$ et $(\pi ; 0)$.



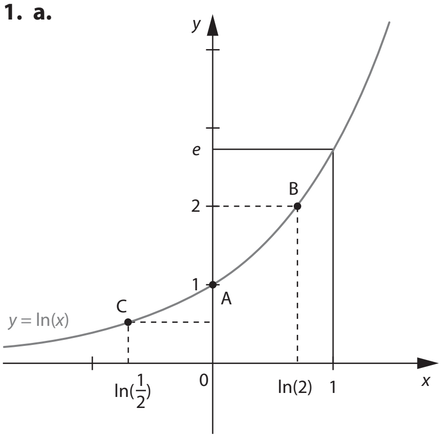
CHAPITRE 7

Logarithme népérien

Pour reprendre contact

1 Avec l'exponentielle

1. a.



b. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ **c.** $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \approx 0{,}69$ **d.** $e^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{1}{2} \approx -0{,}69$

2 Avec les propriétés de calcul

1. Pour tout réel x,

a. $e^2 \times (e^{-x})^2 = e^{-2x+2}$ **b.** $e^{-x}(2e^x + e^{3x}) = 2 + e^{-2x}$ **c.** $3e^{2x} - 4e^x = e^x(3e^x - 4)$

2. Pour tout réel x,

a. $e^{x-3} = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 + 3$ **b.** $3e^x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$ **c.** $e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

d. $e^x + e^{-x} = 2 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3 Avec les limites en l'infini

1. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de la fonction exp en $-\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

2. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ **d.** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x = +\infty$

④ Avec la dérivation

1. f dérivable en a signifie que la limite en 0 de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est égale à un réel l. On a alors $f'(a) = l$.

2. a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} = 3$

⑤ Avec le calcul des dérivées

a. Pour tout réel x, $f'(x) = -2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

b. Pour $x \in]-2\,;2[$, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

c. Pour tout réel x, $f'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x-3}$

d. Pour tout réel x, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$

e. Pour tout réel x, $f'(x) = e^x$

Activité 1

1.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$\exp(x)$	0	b	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation $\exp(x) = b$ admet une seule solution a pour tout réel $b > 0$.

2. $e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln 1 = 0\,;\; e^1 = e \Leftrightarrow \ln e = 1$

$\ln e^2 = 2\;;\; e^{-1} = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{e} = -1$

3. a. $M(a\,;b) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow b = e^a \Leftrightarrow a = \ln b \Leftrightarrow M'(b\,;a) \in \Gamma$

b. et **c.** M′ est l'image de M par la symétrie axiale d'axe la droite d'équation $y = x$.
En effet, cette symétrie « échange » abscisse et ordonnée d'un point.

4. Conjectures

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty\,;\; \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$

Si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$.

Si > 1, $\ln x > 0$.

Activité 2

A. Exploration d'une table

1. Vérification immédiate.

2.

15	$1{,}099 + 1{,}609 = 2{,}708$
21	$1{,}099 + 1{,}946 = 3{,}045$
100	$2 \times 2{,}303 = 4{,}606$
10^3	$3 \times 2{,}303 = 6{,}909$
10^6	$2 \times 6{,}909 = 13{,}818$

3. a. 0 $(2 = 2 \times 1)$

b. 0,5 : 0 – 0,693 = – 0,693

0,1 : – 2,303

10^{-3} : – 6,909

c. 1,5 : 1,099 – 0,693 = 0,406

1,25 : 0,223

0,75 : – 0,287

0,25 : – 1,386

0,125 : – 2, 079

d. 0,223 + 2,485 = 2,708

B. Une fonction solution

1. a. $e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab$

b. On en déduit : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

c. Vérification immédiate.

2. a. Pour $a > 0$, $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$ puisque $\ln 1 = 0$ donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

b. Pour $a > 0$ et $b > 0$,

$$\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b.$$

c. $\ln a^2 = \ln(a \times a) = 2\ln a$; $\ln a^3 = 3\ln a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln a^n = n\ln a$.

3. $f_k(ab) = k\ln(ab) = k\ln a + k\ln b = f_k(a) + f_k(b)$. La fonction f_k est également solution.

TP1. Des lois en physique

A. À la suite de Kepler

1. Impossibilité de distinguer les positions des quatre premières planètes, la grandeur des nombres ne rendant pas possible cette distinction.

2. 3. 4. Voir fichier sur le site, la droite d'ajustement obtenue a pour équation $y = 1{,}5x - 21{,}3$.

5. $\ln T = 1{,}5\ln r - 21{,}3 \Leftrightarrow T = e^{1{,}5\ln r} e^{-21{,}3} \Leftrightarrow T = e^{3\ln\sqrt{r}} e^{-21{,}3} = e^{\ln\left(\left(\sqrt{r}\right)^3\right)} e^{-21{,}3} = e^{-21{,}3}\left(\sqrt{r}\right)^3$

D'où le résultat avec $k = e^{-21{,}3} \approx 5{,}6 \times 10^{-10}$.

B. À la suite de Richter

1. La courbe de tendance logarithmique est affichée avec comme équation : $M = 0{,}3\ln E - 3{,}2$.

2. Affirmation (A) : énergie dégagée par un séisme de magnitude 7 : $E = e^{10{,}2}$ j ;

énergie dégagée par 30 séismes de magnitude 6 : $E' = 30e^{9{,}2}$ j.

$E' > E$: affirmation incorrecte. En fait, un séisme de magnitude 7 correspond à 3 séismes de magnitude 6.

Affirmation (B) : $0{,}3\ln 1000E - 3{,}2 = 0{,}3\ln 1000 + 0{,}3\ln E - 3{,}2 \approx 2 + M$

Affirmation correcte.

3. $\frac{M}{2{,}3} = 0{,}3\log E - \frac{3{,}2}{2{,}3}$ car $\ln 10 \approx 2{,}3$ donc $\log E = \frac{M}{0{,}3 \times 2{,}3} + \frac{3{,}2}{0{,}3 \times 2{,}3} \approx 1{,}45M + 4{,}64$.

Résultat remarquable compte tenu que nos calculs ne se basent que sur 5 observations.

TP2. Aire sous l'hyperbole

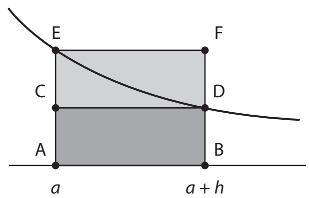
2.

a	$A(a)$
1	0
2	0,6931
3	1,0986
4	1,3863
5	1,6094
6	1,7918
7	1,9459
8	2,0794

3. Conjecture : $A(ab) = A(a) \times A(b)$

4. a. $A(a+h) - A(a)$ est l'aire de la partie du plan délimité par $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = a + h$.

b.



- $Aire(\text{ABDC}) \leqslant A(a+h) - A(a)$ donc $h \times \dfrac{1}{a+h} \leqslant A(a+h) - A(a)$
- $A(a+h) - A(a) \leqslant Aire(\text{ABFE})$ donc $A(a+h) - A(a) \leqslant h \times \dfrac{1}{a}$.

c. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{a+h} = \dfrac{1}{a}$; $\dfrac{1}{a+h} \leqslant \dfrac{A(a+h) - A(a)}{h} \leqslant \dfrac{1}{a}$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{A(a+h) - A(a)}{h} = \dfrac{1}{a}$.

La fonction A est dérivable en a et $A'(a) = \dfrac{1}{a}$.

5. f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et $f'(a) = 0$ donc f est une fonction constante ; $f(1) = 0$ d'où $f(a) = 0$ et donc $A(a) = \ln a$ pour tout $a \geqslant 1$.

TP3. Distance d'un point à la courbe de ln

A. Le point M_0 cherché semble avoir pour coordonnées $(a ; 1)$, $a \approx 2{,}65$ et en ce point, la tangente à la courbe Γ et la droite (AM_0) semblent perpendiculaires.

B. 1. Pour $x > 0$, $d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (\ln x)^2}$.

2. Pour $x > 0$, $d'(x) = \dfrac{x - 3 + \dfrac{\ln x}{x}}{\sqrt{(x-3)^2 + (\ln x)^2}}$. donc est de même signe que $f(x) = x - 3 + \dfrac{\ln x}{x}$.

3. a. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Pour $x > 0$, $\ln x < x < x^2 + 1$; $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$ donc $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

c. D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone sur $]0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α, avec $2{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}7$.

d.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$	$d(\alpha)$	$\nearrow$	

4. La fonction d admet donc un minimum en α.

En ce point, la tangente T à Γ a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1 ; \dfrac{1}{\alpha}\right)$ et la droite (AM_0) a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(\alpha - 3 ; \ln\alpha)$.

$\vec{u}.\vec{v} = \alpha - 3 + \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} = f(\alpha) = 0$ donc $T \perp (AM_0)$.

TP4. Logarithme décimal

1. a. $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$; $\log 10^k = k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

b. La fonction log a le même sens de variation que la fonction ln car pour $x > 0$, $(\log x)' = \dfrac{(\ln x)'}{\ln 10}$.
$\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$.

c. $\log(ab) = \dfrac{\ln(ab)}{\ln 10} = \dfrac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$ pour tous réels a et b strictement positifs.

2. a. $\text{pH} = 5 - 2\log 2$ **b.** 10^{-7}

c. Le pH augmente lorsque la concentration diminue.
Quand la concentration est divisée par 10 (par 100), le pH augmente de 1 (de 2).

d. Quand le pH augmente de 1 (de 2), la concentration est multipliée par 10 (par 100).

TP5. Les chiffres de 2*n*

1. a.

Nombre de termes à	
1 chiffre	3
2 chiffres	3
3 chiffres	3
4 chiffres	4
5 chiffres	3
k chiffres	3 ou 4

b. Conjecture : Le nombre de termes de la forme 2^n à k chiffres est soit 3, soit 4.

2. Soit m un entier à p chiffres. $10^{p-1} \leqslant m < 10^p$

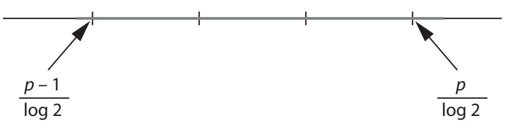
3. a. $\log 10 = 1$; $\log 100 = \dfrac{2\ln 10}{\ln 10} = 2$; $\log 1000 = \dfrac{3\ln 10}{\ln 10} = 3$

b. Soit a un entier > 0.
$\log a^k = \dfrac{k \ln a}{\ln 10} = k \log a$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

c. La fonction log a le même sens de variation que la fonction ln car pour $x > 0$, $(\log x)' = \dfrac{(\ln x)'}{\ln 10}$.

2^n s'écrit avec p chiffres si et seulement si $10^{p-1} \leqslant 2^n < 10^p$ soit $\log 10^{p-1} \leqslant \log 2^n < \log 10^p$ soit $p - 1 \leqslant n \log 2 < p$ soit $\dfrac{p-1}{\log 2} \leqslant n < \dfrac{p}{\log 2}$. La longueur de cet encadrement est $\dfrac{1}{\log 2} \approx 3{,}3$.

4. Dans tout intervalle de longueur environ 3,3 il y a trois entiers n possibles. On a donc au moins 3 puissances de 2 ayant p chiffres. Un tel intervalle peut contenir 4 entiers comme illustré ci-dessous. C'est le cas pour $p = 4$ par exemple.



En revanche un tel intervalle ne peut pas contenir 5 entiers ou plus car son amplitude devrait être supérieure ou égale à 4.

TP6. Approximation de ln2

A. 1. La somme écrite en c., soit $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$

2. Voir fichier sur le site. Pour $n = 10$, on obtient $u = 0{,}6687714 < \ln 2$.

Pour $n = 100$, on obtient $u = 0{,}69065343 < \ln 2$.

Pour $n = 1000$, on obtient $u = 0{,}69289724 < \ln 2$.

B. 1. Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-x}{x}$ et $g'(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	|| $+$	0	$-$
$f(x)$	|| $\nearrow$	0	$\searrow$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	|| $-$	0	$+$
$g(x)$	|| $\searrow$	0	$\nearrow$

Pour $x > 0$, $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ donc $1-\frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x-1$.

2. $k \in \mathbb{N}^*$; $x = \frac{k+1}{k}$.

$$1-\frac{1}{\frac{k+1}{k}} \leqslant \ln\frac{k+1}{k} \leqslant \frac{k+1}{k}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1)-\ln k \leqslant \frac{1}{k}.$$

3. En sommant les inégalités précédentes obtenues pour les valeurs entières de k de n à $2n-1$, on a :

$$u_n \leqslant \underbrace{\ln 2n - \ln n}_{\ln 2} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{2n-1}}_{\frac{1}{n}+u_n-\frac{1}{2n}=u_n+\frac{1}{2n}}$$

4. a. Pour $n > 0$, $0 \leqslant \ln 2 - u_n \leqslant \frac{1}{2n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

b. u_n est une valeur approchée par défaut de ln2 à $\frac{1}{2n}$ près.

TP7. Équations avec paramètres

A 1. Voir fichier sur le site. Il semble que si :

$k \leqslant 0$: l'équation a une solution

$0 < k \leqslant 0{,}36$: l'équation a deux solutions

$k = 0{,}36$: l'équation a une solution

$k > 0{,}36$: l'équation n'a pas de solution

2. Pour $x > 0$, posons $g(x) = \ln x - kx$; $g'(x) = \frac{1-kx}{x}$. $g'(x)$ a même signe que $1-kx$.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

- Cas1 $k \leqslant 0$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	|| $\nearrow$	

D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty\,;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

- Cas2 $k > 0$

x	0	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$g(x)$	|| $\nearrow$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$

$g\left(\dfrac{1}{k}\right) = -\ln k - 1.$

$-\ln k - 1 > 0 \Leftrightarrow k < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Donc, si $k < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué deux fois pour une fonction strictement croissante sur $\left]0; \dfrac{1}{k}\right]$ et pour une fonction strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{k}; +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions.

Si $k = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation admet une seule solution : e

Si $k < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation n'admet pas de solution.

B. Il semble que si :

$k < 0$: l'équation a une solution

$0 < k < 0{,}2$: l'équation a deux solutions

$k = 0{,}2$: l'équation a une solution

$k > 0{,}2$: l'équation n'a pas de solution

Pour $x > 0$, posons $h(x) = \ln x - kx^2$; $h'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}$. $g'(x)$ a même signe que $1 - 2kx^2$.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

- Cas 1 $k < 0$

x	0		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$\nearrow$	

D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ à valeurs dans $]-\infty ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

- Cas 2 $k > 0$

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$\nearrow$	$g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right)$	$\searrow$	

$g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \dfrac{-1}{2}(\ln(2k) + 1)$

$g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right) > 0 \Leftrightarrow k < \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

Donc, si $k < \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué deux fois pour une fonction strictement croissante sur $\left]0; \dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right]$ et pour une fonction strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2k}}; +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions.

Si $k = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$, l'équation admet une seule solution : $\sqrt{\mathrm{e}}$

Si $k < \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$, l'équation n'admet pas de solution.

TP8. Suite de Fibonacci

A. 1. $F_1 = 1\,(1)$; $F_2 = 2\,(1+1\,;2)$; $F_3 = 3(1+1+1;1+2\,;2+1)$; $F_4 = 5\,(1+1+1+1;1+1+2\,;1+2+1;2+1+1;2+2)$

2. Si on possède un récipient de $(n+2)$ litres, on peut soit enlever 1 litre et donc il y a F_{n+1} façons mesurer la capacité, soit enlever 2 litres et il y a F_n façons mesurer la capacité. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

B. Voir fichier sur le site.

$\ln F_n = 0{,}483n - 0{,}348$; $F_n = \dfrac{e^{0{,}482n}}{e^{0{,}340}}$. Pour $n = 100$ par exemple, cette approximation conduit à $F_n \approx 6 \times 10^{20}$.

C. 1. Déterminer les suites géométriques (q^n) qui vérifient l'équation (R) revient à résoudre l'équation $q^2 = q + 1$.

Deux solutions : $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $q' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

2. $(aq^{n+2} + bq'^{n+2}) = a(q^{n+1} + q^n) + b(q'^{n+1} + q'^n) = (aq^{n+1} + bq'^{n+1}) + (aq^n + bq'^n)$.

3. $\begin{cases} aq + bq' = 1 \\ aq^2 + bq'^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aq + bq' = 1 \\ aq + bq' + a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aq + bq' = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1-q'}{q-q'} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{10} \\ b = 1 - a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$

Pour $n \geqslant 1$, $F_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

D. 1. La suite (u_n) semble décroissante (à partir du rang 41 !) et divergente (vers $-\infty$).

2. Dans ces conditions, $a = 0$ et $b == -\sqrt{5} - 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_n = -(1+\sqrt{5})\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Suite convergente vers 0.

Le tableur est pris en défaut car u_2 est remplacée par une valeur approchée, décimale, qu'on notera α.

La suite (u_n) étudiée sur le tableur est donc une suite de Fibonacci avec $u_1 = 1$ et $u_2 = \alpha$.

Si on cherche les valeurs de a et b correspondant à cette suite, on n'a plus $a = 0$ mais $a < 0$.

Donc $u_n = aq^n + bq'^n$ avec a < 0 et $q > 1$; la suite entrée sur le tableur a donc pour limite $-\infty$.

Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 $\mathscr{C}_1 : y = |\ln x|$ $\quad \mathscr{C}_2 : y = \ln x - 2$

$\mathscr{C}_3 : y = \ln(x+2)$ $\quad \mathscr{C}_4 : y = 2\ln(-x)$

2 La deuxième courbe représente la fonction f (où $a = 1$). La première courbe représente la fonction g, la troisième la fonction h (où $b = 1$).

3 Réponse **a.** car $\ln\dfrac{a}{b} + \ln\dfrac{b}{a} = \ln 1 = 0$.

4 **a.** aucune solution **b.** aucune solution

c. deux solutions : $\sqrt{e}$ et $-\sqrt{e}$ **d.** une solution : $e^{-2} - 2$

5 **a.** $A = \ln 12$ d'où $A > B$ **b.** $A = \ln 4{,}5$ d'où $A < B$

c. $= \ln 3e^2 ; 3e^2 \approx 22$; donc $A > B$.

6 **a.** $A = B = 15$ **b.** $A = 2$ et $B = \dfrac{3}{2}$ donc $A > B$.

ENTRAÎNEMENT

7 **a.** $x = \ln 4 = 2\ln 2$ **b.** $x = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$

c. $x = -\dfrac{1}{2}\ln 16 = -2\ln 2$ **d.** $x = \ln 2$

e. $x = -\ln\dfrac{1}{4} = 2\ln 2$ **f.** aucune solution

8 Corrigé dans le manuel.

9 **a.** $x = e$ ou $x = e^{-2}$ **b.** $x = e^3$ ou $x = e^{-\frac{5}{2}}$

c. $x = 0$ ou $x = \ln 4 = 2\ln 2$

10 **a.** $g(0) = 10^6$

b. *Par 2* : on résout l'équation $g(t) = 2 \Leftrightarrow t = 4\ln 2$ (environ 2 h 45).

Par 3 : on résout l'équation $g(t) = 3 \Leftrightarrow t = 4\ln 3$ (environ 4 h 25).

11 **a.** Couple solution $\left(e^{\frac{1}{3}} ; e^{\frac{2}{3}}\right)$

b. Couple solution $(e^{-3} ; e^5)$

12 **a.** $\left]\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$ **b.** $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ **c.** $]0 ; e[\cup]e ; +\infty[$

13 **a.** $x = \dfrac{e+3}{2}$ **b.** $x = \sqrt{e}$ ou $x = -\sqrt{e}$

c. $x = e^{-1} + 1$ **d.** $x = \dfrac{3 - e^{-2}}{2}$

e. $x = 2 - e$ ou $x = 2 + e$ **f.** $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

14 **a.** $]-\infty ; 3[$ **b.** $]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$ **c.** $\mathbb{R}^*$ **d.** $\mathbb{R}_+^*$

15 **a.** $3\ln 2$ **b.** $-4\ln 2$ **c.** $2+\ln 2$

16 Corrigé dans le manuel.

17 **a.** $6\ln 2+\ln 5$ **b.** $2\ln 5-4\ln 2$ **c.** $6(\ln 5+\ln 2)$

18 **a.** $2\ln 2$ **b.** $4\ln 2$ **c.** $\ln\frac{1}{50}=-\ln 2-2\ln 5$

d. pour tout x réel, $\ln e^{2x}-\ln 2e^{x}=x-\ln 2$

19 Corrigé dans le manuel.

20 **1. 2.** $x\in\,]1;+\infty[$

21 Rien à l'écran… aucun réel n'a une image par f (attention : f n'est pas la fonction nulle).

22 **a.** Faux **b.** Vrai **c.** Faux **d.** Vrai

23 **1.** $\ln k\approx -12\,394\times\frac{1}{T}+30{,}6$

2. $k\approx e^{-12\,394\times\frac{1}{T}+30{,}6}$ donc $k=A\times e^{\frac{-\alpha}{T}}$.

$A=e30{,}6$ et $\alpha=12\,394$

24 **1. a.** Le logiciel permet ici de développer l'expression de $f(x)$ en utilisant les propriétés remarquables de la fonction ln.

b. Résultat valable si $x^3+3x^2-4>0$,

donc si $x\in\,]1;+\infty[$.

2. Résultat vrai pour tout x réel. En effet, pour tout x réel, $e^x-2x>0$.

25 **a.** À résoudre dans $\left]-2;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$: deux solutions ; $-\frac{3}{4}$ et 1.

b. À résoudre dans $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$: une solution ; 1.

c. À résoudre dans $]1;+\infty[$: aucune solution.

26 Corrigé dans le manuel.

27 **a.** À résoudre dans $]13;+\infty[$: aucune solution.

b. À résoudre dans $]2;+\infty[$: une solution ; $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. À résoudre dans $]2;+\infty[$: une solution ; 3.

28 Corrigé dans le manuel.

29 **a.**

x	0		e		$+\infty$
$x(\ln x-1)$	||	$-$	0	$+$	

b.

x	0		e		$+\infty$
$\frac{x}{\ln x-1}$	||	$-$	||	$+$	

c.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-1$	||	$-$		$-$	0	$+$	
produit	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

d.

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$1-\ln x$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$1+\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
quotient	||	$-$	||	$+$		$-$	

30 **a.** Dans $]0;+\infty[$: ensemble solution $=\,]2;+\infty[$

b. Dans $]0;+\infty[$: ensemble solution $=[1;e^2]$

c. Dans $]13;+\infty[$: aucune solution

d. Dans $]0;+\infty[$: solution $=\,]0;e^{-2}[\,\cup\,]e^3;+\infty[$

31 Corrigé dans le manuel.

32 **a.** $n\geqslant 6$ **b.** $n\geqslant 42$

33 **a.** 20 ans **b.** 33 ans

34 Pour $n\geqslant 7$

35 $x\leqslant e^{\frac{26{,}72}{8{,}68}}$ soit une pression inférieure à 21,7 bars.

36 Corrigé dans le manuel.

37 Pour $x>0$ **a.** $f'(x)=\frac{4x^2-1}{x}$

b. $f'(x)=\frac{3}{x(\ln x+1)^2}$ $(x\neq e^{-1})$

c. $f'(x)=\ln x\left(\ln x+\frac{2x+4}{x}\right)$

d. $f'(x)=x(2\ln x+1)$

38 La tangente T cherchée coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;\ln a-1)$.

39 Corrigé dans le manuel.

40 **1.** Les deux courbes demandées semblent symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Soit M′ le symétrique d'un point $M(x;y)$ de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses. M′ a pour coordonnées $(x;-y)$:

$-y=-\ln x=\ln\frac{1}{x}\Leftrightarrow M'\in\mathscr{C}_2$.

3. Les tangentes en A(1; 0) à ces deux courbes ont pour coefficients directeurs respectifs 1 et -1 ; elles sont donc perpendiculaires.

41 **1.** T a pour équation $y = x$.
2. Pour $x > 0$, $f(x) - x = (\ln x)^2 \geqslant 0$.
$\mathscr{C}$ est au-dessus de T.

42 **1.** T a pour équation $y = -2x + 3$.
2. Pour $x > 0$, on pose
$g(x) = f(x) - (-2x + 3) = \dfrac{1}{x} - \ln x + 2x - 3$.
$g'(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{x^2}$.
$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$: g est strictement décroissante sur $]0\,;1[$, strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
$g(1) = 0$ donc g est positive sur $]0\,;+\infty[$. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.

43 **1.** $T_a : y = \dfrac{x}{a} - 1 + \ln a$.
2. Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \ln x - \dfrac{x}{a} + 1 - \ln a$.
$g'(x) = \dfrac{a - x}{ax}$.
$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < a$: g est strictement croissante sur $]0\,;a[$, strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$.
3. $g(a) = 0$ donc g est négative sur $]0\,;+\infty[$. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de T.

44 Soit k un réel fixé. Les tangentes à ces deux courbes en leur point commun d'abscisse a ont pour coefficients directeurs respectifs $\dfrac{1}{a}$ et $-a$; elles sont donc perpendiculaires.

45 Corrigé dans le manuel.

46 Corrigé dans le manuel.

47 **a.** en 0 : $-\infty$; en $+\infty$: 0 **b.** en 0 : 1 ; en $+\infty$: 0
c. en 0 : $+\infty$; en $+\infty$: $-\infty$ **d.** en 0 : $+\infty$; en $+\infty$: $+\infty$

48 **a.** ln2 **b.** en 2^+ : $+\infty$; en $+\infty$: ln2
c. en 0 : 0 ; en $+\infty$: $+\infty$; en 1^- : $-\infty$; en 1^+ : $+\infty$

49 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

50 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

51 $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

52 **1.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = (\ln 1)' = 1$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = 1$
d'après 1.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln(1 + \mathrm{e}^x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x} = 1$
d'après 1.

53 En posant $X = \sqrt{x}$, $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{2 \ln X}{X}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

54 **a.** Vrai **b.** Faux $(-\infty)$ **c.** Faux (deux cas à traiter)
d. Vrai

55 **1.** Faux (4) **2.** Faux $(-\infty)$ **3.** Faux (0)
4. Vrai **5.** Vrai

56 **a.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.
f est strictement décroissante sur $]0\,;1]$, strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f'(x) = \ln x + 1$.
f est strictement décroissante sur $\left]0\,;\mathrm{e}^{-1}\right]$, strictement croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty\right[$.
c. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x}$.
f est strictement croissante sur $]0\,;\mathrm{e}]$, strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.
d. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x}$.
f est strictement décroissante sur $]0\,;\mathrm{e}]$, strictement croissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

57 **a.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0,5} f(x) = -\infty$; $f'(x) = \dfrac{-2}{-2x+1}$.
f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0,5[$.
b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $f'(x) = 1 - 2\ln x$.
f est strictement croissante sur $\left]0\,;\mathrm{e}^{0,5}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{0,5}\,;+\infty\right[$.
c. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f'(x) = x \ln x$.
f est strictement décroissante sur $]0\,;1]$, strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
d. Pour $x > 1$. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.
f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

58 Corrigé dans le manuel.

59 Soit $k > 0$.
a. Pour $x > -k$, $f_k'(x) = 1 + \dfrac{k}{x+k}$.
b. Pour $x > 0$, $f_k'(x) = \dfrac{k(1-x)}{\mathrm{e}^x + kx}$.

60 **a.** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim_{x\to-2} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$;

$f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$. f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.

b. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

61 **1.** $2x+\ln(1-e^{-x})=\ln e^{2x}+\ln(1-e^{-x})$

$=\ln(e^{2x}(1-e^{-x}))=f(x)$

$x+\ln(e^x-1)=\ln e^x+\ln(e^x-1)=\ln(e^x(e^x-1))=f(x)$.

2. a. forme 2 $(+\infty)$ **b.** forme 1 $(-\infty)$ **c.** forme 1

d. forme 3 **e.** forme 2

62 **2. a.** $\lim_{x\to0} f_k(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=+\infty$.

b. $f_k'(x)=\dfrac{x-1}{x}$. f_k est strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$. f_k admet donc un minimum en 1 valant $1+\ln k$.

3. a. b. c. Pour $x>0$, $f_{k+1}(x)-f_k(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

$\mathscr{C}_{k+1}$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_k$ par translation de vecteur $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\vec{j}$. $\mathscr{C}_{k+1}$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_k$.

$\lim_{k\to+\infty} f_{k+1}(x)-f_k(x)=0$. L'écart entre les deux courbes tend vers 0 lorsque $k\to+\infty$.

63 $f'(x)=0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}5-\dfrac{2}{x+1}=0{,}1 \Leftrightarrow x=4$.

Point cherché : A(4 ; 3 – 2 ln5).

64 **a.** Le centre du repère est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

b. Pour $x\in\,]-1\,;1[$, $f(-x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=-\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=-f(x)$.

c. $\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to1} f(x)=-\infty$; $f'(x)=\dfrac{-2}{1-x^2}$.

f est strictement décroissante sur $]-1\,;1[$.

65 **1.** Pour $x>-1$, $f'(x)=2ax+b+\dfrac{2}{x+1}$.

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ f'(0)=-1 \\ f'(3)=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b+2=-1 \\ 6a+b+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=-3 \\ a=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Ainsi $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+2+2\ln(x+1)$.

2. Pour $x>-1$, $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x+1}$, le signe de $f'(x)$ correspond à celui de x^2-2x-1. $\Delta=8$; racines $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. f est strictement croissante sur $\left]-1\,;1-\sqrt{2}\right]$, strictement décroissante sur $\left[1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left[1+\sqrt{2}\,;+\infty\right[$.

66 **1.** $\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$.

f est strictement décroissante sur $]0\,;1]$, strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$. $f(1)=0$.

2. Si $m<0$, l'équation $f(x)=m$ n'a pas de solution, si $m=0$, une solution (1) et deux solutions si $m>0$.

67 $h=e^{0,5}$.

68 **1.** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$; la droite d'équation $y=0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

2. Pour tout x réel, $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Coefficient directeur de T_0 : $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Coefficient directeur de (AB) : $\dfrac{\ln(e+1)-\ln(e^{-1}+1)}{2}=\dfrac{1}{2}$

Les droites T_0 et (AB) sont parallèles.

4. $T_1 : y=\dfrac{-1}{e+1}(x-1)+\ln(e^{-1}+1)$

$T_{-1} : y=\dfrac{-e}{e+1}(x+1)+\ln(e+1)$

T_1 et T_{-1} se coupent en A(0 ; ln2).

Remarque : l'égalité $\ln(e+1)-\ln(e^{-1}+1)=1$ joue un rôle important ici.

69 **1.** $E=\,]-2\,;0[\,\cup\,]0\,;3[$

2. $\lim_{x\to-2} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to3} f(x)=-\infty$.

3. Pour $x\in E$, $f(x)=0 \Leftrightarrow u(x)=1 \Leftrightarrow x=-1$ *ou* $x=2$.

$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en A(– 1 ; 0) et B(2 ; 0).

4. $f'=\dfrac{u'}{u}$ donc f' et u' ont le même signe sur E.

f est strictement décroissante sur $]-2\,;0[$ et strictement croissante sur $]0\,;2]$, strictement décroissante sur $[2\,;3[$. $f(2)=0$.

70 Corrigé dans le manuel.

71 **1. a.** Pour $x>0$, $h'(x)=6x^2+2x+\dfrac{1}{x}$, $h'(x)>0$.

h est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b. $\lim_{x\to0} h(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

c. Théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement croissante. $0{,}542<\alpha<0{,}543$.

d. Si $x\in\,]0;\alpha[$, $h(x)<0$ et si $\in\,]\alpha;+\infty[$, $h(x)>0$.

2. a. $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
b. $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ d'où le résultat.
c. f est strictement décroissante sur $]0\,;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

72 **1. a.** $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
b. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. a. Pour $x > 0$, $f'(x) = 2x - \ln x - 1 - \dfrac{1}{x}$
et $f''(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2}$.
b. $2x^2 - x + 1 : \Delta = -7$. Pour $x > 0$, $f''(x) > 0$.
f' est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
c. $f'(1) = 0$. Si $x \in\,]0;1[$, $f'(x) < 0$ et si $\in\,]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$.
3. f est strictement décroissante sur $]0\,;1[$ et strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$. $f(1) = 1$.

73 **1.** $\lim_{x\to 0} f_k(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$; f_k semble strictement décroissante sur $]0\,;k[$, strictement croissante sur $]k\,;+\infty[$.
2. Pour $x > 0$, $f_k'(x) = \dfrac{(x-k)(x+k)}{kx^2\left(\dfrac{x}{k} + \dfrac{k}{x}\right)}$ donc le signe de $f_k'(x)$ correspond à celui de $x - k$ d'où le résultat annoncé.

74 **1.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ donc $f'(x) \geqslant 0$.
f est donc strictement croissante sur $[0\,;1]$.
Si $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [f(0)\,;f(1)] \subset [0\,;1]$.
3. Récurrence immédiate qui découle de la question 2.
4. Soit $n > 0$. $u_{n+1} - u_n = -\ln\Big(\underbrace{u_n^2 + 1}_{>1}\Big) < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.
5. (u_n) est décroissante, minorée par 0. (u_n) est convergente. Sa limite est 0 d'après la question 1.

75 Corrigé dans le manuel.

76 **a.** Vrai **b.** Faux **c.** Vrai **d.** Faux

77 Seule l'affirmation b est correcte ($x = 4$ solution)

78

Hausse de 3 dB	Vrai car $10\log 2 \approx 3{,}01$
Hausse de 10 dB	Vrai car $10\log 10 = 10$
Hausse de 20 dB	Vrai car $10\log 100 = 20$
Baisse de 3 dB	Divisée par 2
Baisse de 10 dB	Divisée par 10
Baisse de 20 dB	Divisée par 100

79 **1.** $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^n = 2 \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)}$

2. $n \approx \dfrac{0{,}72}{\dfrac{t}{100}} = \dfrac{72}{t}$

80 à **101**. Corrigés dans le manuel.

APPROFONDISSEMENT

102 **a.** Couples solutions
$\left(\dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2} ; \dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2}\right)$ et
$\left(\dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2} ; \dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2}\right)$
b. Couples solutions : $(e^{-1};e^{3})$ et $(e^{3};e^{-1})$

103 **1.** La dérivée, pour $k > 0$ *et* $x > 0$ de $g : x \mapsto \ln(kx) - \ln k - \ln x$ est la fonction nulle. Puisque $g(1) = 0$ alors $g(x) = 0$ d'où l'égalité.
2. Pour $x > 0$,
$x\dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \ln\left(x\dfrac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x + \ln\dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$.
3. Pour x et y positifs,
$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln\left(x\dfrac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\dfrac{1}{y} = \ln x - \ln y$.
4. Une seule solution : 3

104 **1.** Pour $0 < x < 2$, $\varphi'(x) = \dfrac{-2x + 2}{-x^2 + 2x}$.
Le signe de $\varphi'(x)$ correspond à celui de $-2x + 2$.
φ est strictement croissante sur $]0\,;1]$ et strictement décroissante sur $[1;2[$. $\varphi(1) = 0$.
2. $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 2} \varphi(x) = -\infty$.
Les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ sont asymptotes à Γ.
3. Pour $|a| < 1$, $\varphi(1 - a) + \varphi(1 + a) = 0$.
La droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de Γ.

105 **1.** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour $x < -1$ ou $x > 2$,
$f'(x) = 1 + \dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$ (> 0) donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]2\,;+\infty[$.
2. Pour $|a| > \dfrac{3}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2} - a\right) + f\left(\dfrac{1}{2} + a\right) = 1$. Le point $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

106 **2. a.** Pour tout x, $u'(x) = 1 - e^{-x}$.
$u'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. u est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ croissante sur $[0\,;+\infty[$, $u(0) = 2$ donc $u(x) > 0$ pour tout x réel.

b. Pour tout x, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc f' et u' ont le même signe sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(0) = \ln 2$.

3. a. Pour tout x, $-x + \ln(xe^x + e^x + 1)$
$= \ln e^{-x} + \ln(xe^x + e^x + 1) = \ln\left(e^{-x}(xe^x + e^x + 1)\right) = f(x)$.

b. Pour tout x, $f(x) - (-x) = \ln\left(xe^x + e^x + 1\right)$.
$xe^x + e^x + 1 > 1 \Leftrightarrow (x+1)e^x > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
$\mathscr{C}$ est au-dessous de d sur $]-\infty;-1]$, au-dessus sur $[-1;+\infty[$.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$. d est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

4. a. Pour $x > 0$, $f(x) - \ln x = \ln\left(\dfrac{x+1+e^{-x}}{x}\right)$.

$1 + e^{-x} < 2$ donc $\ln\left(\dfrac{x+1+e^{-x}}{x}\right) < \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$.

$\dfrac{x+1+e^{-x}}{x} > 1$ donc $f(x) - \ln x > 0$.

b. La courbe $\mathscr{C}$ est donc située au-dessus de Γ.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \ln x = 0$. Γ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

107 Pour $x > -1$, $MN = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$.

108 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. a. Les suites (P_n) et (S_n) semblent décroissantes et convergentes.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \dfrac{1.3.2.4.3.5\ldots n(n+2)}{2^2 3^2 4^2 5^2 \ldots n^2(n+1)^2} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \ln P_n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2}$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

109 **1.** $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - \dfrac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)$

$\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}} - 1 = \dfrac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2\sqrt{ab}} \geqslant 0$ donc $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$

2. L'image par la fonction ln d'une demi-somme est supérieure à la demi-somme des images.

111 **1.** 2 000 € **2. a.** 1 500 € puis 2 250 €

b. Suite géométrique de raison $1 + \dfrac{1}{n}$.

c.

$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
2 370,37	2 441,41	2 488,32

2. a et b. $\ln u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

Marcus ne pourra pas devenir immensément riche, son pécule ne pourra dépasser 2 718 €…

112 **1.** $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

$f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. f est strictement croissante sur $]0\,;e]$, strictement décroissante sur $[e\,;+\infty[$. $f(e) = e^{-1}$.

2. a. Pour $0 < n < p$, $p^n = n^p \Leftrightarrow \ln p^n = \ln n^p$
$\Leftrightarrow n \ln p = p \ln n \Leftrightarrow f(n) = f(p)$.

b. $\dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{2\ln 2}{4} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

c. Unicité de la solution évidente.

113 **1.** Pour $x > -1$, on pose $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$. $f'(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ (négatif sur $]-1;0]$, positif sur $[1;+\infty[$) et $g'(x) = \dfrac{-x}{1+x}$ (positif sur $]-1;0]$, négatif sur $[1;+\infty[$). Le minimum de f sur $]-1;+\infty[$ vaut $f(0) = 0$ et le maximum de g vaut $g(0) = 0$. Ainsi $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \leqslant 0$. Donc $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$.

2. a. $\dfrac{5}{4} = 1 + \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{2^7}{5^3} = 1 + \dfrac{3}{125}$.

b. $\ln 5 - 2\ln 2 = \ln\dfrac{5}{4} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{4}\right)$ donc $\dfrac{1}{5} \leqslant \ln 5 - 2\ln 2 \leqslant \dfrac{1}{4}$.

$7\ln 2 - 3\ln 5 = \ln\dfrac{2^7}{5^3}$ donc $\dfrac{3}{128} \leqslant 7\ln 2 - 3\ln 5 \leqslant \dfrac{3}{125}$.

c. On obtient les encadrements :

$\underbrace{0{,}6 + \dfrac{3}{128}}_{0{,}623} \leqslant \ln 2 \leqslant \underbrace{0{,}75 + \dfrac{3}{125}}_{0{,}774}$

$\underbrace{1{,}4 + \dfrac{6}{128}}_{1{,}446} \leqslant \ln 5 \leqslant \underbrace{1{,}75 + \dfrac{6}{128}}_{1{,}797}$

3. a. On pose $x = \dfrac{1}{n}$.

b. On a successivement :
$\dfrac{1}{n+1} < \ln\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{n}$; $\dfrac{1}{n+2} < \ln\dfrac{n+2}{n+1} < \dfrac{1}{n+1}$;…;
$\dfrac{1}{2n} < \ln\dfrac{2n}{2n-1} < \dfrac{1}{2n-1}$. Par sommation, on a :

$u_n < \ln\left(\dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{n+2}{n+1} \ldots \times \dfrac{2n}{2n-1}\right) < u_n + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n}$ soit

$u_n < \ln(2) < u_n + \dfrac{1}{2n}$.

c. $-\dfrac{1}{2n} < u_n - \ln 2 < 0$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

114 **1. a.** $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$. f est strictement décroissante sur $]0\,;e]$, strictement croissante sur $[e\,;+\infty[$. $f(e) = e$.

2. a. Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $e \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Initialisation : $\ln a > 1$ donc $u_1 \leqslant u_0$.

$a > \mathrm{e}$ donc $u_1 = f(a) > f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$.

Hérédité : soit n un entier tel que : $\mathrm{e} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

f est croissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ donc $\underbrace{f(\mathrm{e})}_{\mathrm{e}} \leqslant \underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}}$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : La suite (u_n) est décroissante, minorée par e.

b. La suite est donc convergente vers l'unique solution de l'équation $f(x) = x$: e.

3. Algorithme

ENTRÉES : Saisir(a) // a réel, a > e
Saisir (p) // p entier
INITIALISATION :
N ← 0
TRAITEMENT :
Tantque a − e $\geqslant 10^{-p}$ Faire
a <− $\dfrac{a}{\ln(a)}$; N ← N+1
FinTantque
SORTIE : Afficher N

115 **1. a.** Récurrence immédiate.

b. $u_{n+1} - u_n = u_n\left(\underbrace{\mathrm{e}^{-u_n}}_{<1} - 1\right)$ donc la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers 0, unique solution de l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = x$.

2. $\mathrm{e}^{-S_n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{u_0}\mathrm{e}^{u_1}\ldots\mathrm{e}^{u_n}} = \dfrac{1}{\dfrac{u_0}{u_1}\times\dfrac{u_1}{u_2}\times\ldots\times\dfrac{u_n}{u_{n+1}}} = u_{n+1}$

3. $S_n = -\ln u_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

116 **1.** Pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $f''(x) = \dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$

2. a. Propriété vérifiée pour $n = 1$.

Soit n un entier $\geqslant 1$ tel que : $f^{(n)}(x) = \dfrac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}$.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{x^n(v_n - (n+1)(u_n + v_n \ln x))}{x^{2n+2}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(v_n - (n+1)u_n) - (v_n(n+1)\ln x)}{x^{n+2}}$$

d'où le résultat.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-1)^n\ n!$

Initialisation : $(-1)^2\,1!1 = 1 = u_1$

Hérédité : Soit n un entier $\geqslant 1$ tel que

$$u_n = (-1)^{n+1}\ n!\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

$$u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$$

$$u_{n+1} = (-1)^n\ (n+1)!\left(\frac{1}{n+1} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

Ce qu'il fallait démontrer car $(-1)^n = (-1)^{n+2}$.

117 **1.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h\ln h}{h} = -\infty$. f n'est pas dérivable en 0.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h^2\ln h}{h} = 0$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

118 **1. a.** $m \leqslant 0$: aucune solution ; $m > 0$: deux solutions notées a_m et b_m.

b. La suite (a_m) semble croissante et convergente vers $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, la suite (b_m) semble décroissante et convergente vers $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2. a. Équation du second degré ($\Delta = 16m$). On obtient :

$a_m = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)}$ et $b_m = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)}$.

b. Sur $]0\,;+\infty[$, posons $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$.

On a $g'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} < 0$. g est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, la suite (b_m) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{m\to+\infty} b_m = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

119 **1. a.** La valeur $k = 1$ semble jouer un rôle important.

b. Pour $x > 0$,

$f_k'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x + k \underset{X=\ln x}{=} X^2 + 2X + k \quad (\Delta = 4(1-k))$.

Si $k \geqslant 1$, $\Delta \leqslant 0$ et $f_k'(x) \geqslant 0$. Si $k \geqslant 1$, la fonction f_k est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Si $k < 1$, la fonction f_k est strictement croissante sur $\left]0\,;\mathrm{e}^{-1-\sqrt{1-k}}\right]$ et sur $\left[\mathrm{e}^{-1+\sqrt{1-k}}\,;+\infty\right[$, décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1-\sqrt{1-k}}\,;\mathrm{e}^{-1+\sqrt{1-k}}\right]$.

2. a. $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{\sqrt{X}} = 0$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(\ln X)^2}{X} = 0$

b. $f_k(x) \underset{X=\frac{1}{x}}{=} \dfrac{(\ln X)^2}{X} + \dfrac{k}{X}$.

$\lim\limits_{x\to 0} X = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = 0$.

PROBLÈMES

120 **1.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\left((\ln x)^2 + 1\right)}{(\ln x)^2} > 0$ f est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

2. a. $f(x) - \ln x = \dfrac{-1}{\ln x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \ln x) = 0$.

b. $f(x) - \ln x < 0$.

c. La courbe Γ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de Γ sur $]1\,;+\infty[$.

3. a. $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$0 \in T_a \Leftrightarrow f(a) - af'(a) = 0$.

b. Pour $x > -1$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{(\ln x)^2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$

$\Leftrightarrow (\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$.

c. Pour tout t réel, $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$ (racines : 1 et $-\dfrac{1}{3}$). u est croissante sur $\left]-\infty ; -\dfrac{1}{3}\right]$ et sur $[1 ; +\infty[$, décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{3} ; 1\right]$. $u\left(-\dfrac{1}{3}\right) \approx -0{,}8$; $u(1) = -2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur $[1 ; +\infty[$, la fonction u s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ en $\propto \approx 1{,}84$. Il existe donc une tangente à $\mathscr{C}$ unique contenant O, en le point d'abscisse α.

121 **1.** $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$; pour $x > 0$,

$f_n'(x) = \dfrac{n - 2 - 2n\ln x}{x^3}$.

f_n est croissante sur $\left]0 ; e^{\frac{n-2}{2n}}\right]$, décroissante sur $\left[e^{\frac{n-2}{2n}} ; +\infty\right[$. $f\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \dfrac{n}{2e^{\frac{n-2}{n}}}$.

3. a. « différence » constante entre deux courbes successives.

b. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. (indépendant de n).

$f_4 - f_3 = f_3 - f_2$.

122 **Partie A. 1.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

pour $x > 0$, $f'(x) = 2x + \dfrac{4}{x} > 0$.

f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f sur $]0 ; +\infty[$. $f(0{,}5) \approx -2{,}5$; $f\left(e^{-\frac{1}{16}}\right) \approx 0{,}6$.

$0{,}5 < \alpha < e^{-\frac{1}{16}}$

3. Si $x < \alpha$, $f(x) < 0$; si $x > \alpha$, $f(x) > 0$.

Partie B. 1. $g(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}x^2 = \ln x \Leftrightarrow f(x) = 0$

2. La suite (u_n) ne semble pas monotone et converger vers α.

3.a. Initialisation : $u_0 = 0{,}5$; $u_1 = e^{-\frac{1}{16}}$. Résultat vérifié d'après la question 2.A.

Hérédité : soit n un entier naturel tel que $u_{2n} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}$.

g est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $g(u_{2n}) \geqslant g(\alpha) \geqslant g(u_{2n+1})$ soit $u_{2n+2} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}$. g est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $g(u_{2n+2}) \geqslant g(\alpha) \geqslant g(u_{2n+1})$ d'où $u_{2n+2} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+3}$, ce qu'il faut démontrer.

b. $n = 6$. 0,838 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C. 1. $\mathrm{OM} = \sqrt{x^2 + 4(\ln x)^2} = \sqrt{h(x)}$.

2.a. Pour $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{2f(x)}{x}$. h est donc strictement décroissante sur $]0 ; \alpha]$, croissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

b. $\mathrm{A}(\alpha, 2\ln\alpha)$.

123 **A.** Pour $n = 10$ et $x = 2$, l'algorithme propose 0,69338183 (valeur affichée par une calculatrice : ln2 = 0,6931471806).

Pour $n = 10$ et $x = 3$, l'algorithme propose 1,0992018 (valeur affichée par une calculatrice : ln3 = 1,098612289).

Pour $n = 10$ et $x = 3{,}3$, l'algorithme propose 1,1946188 (valeur affichée par une calculatrice : ln3,3 = 1,193922468).

B. 1. a. Récurrence : $u_0^{2^0} = u_0 = x$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_n^{2^n}$. $u_{n+1}^{2^{n+1}} = \sqrt{u_n}^{2.2^n} = u_n^{2^n} = x$.

b. Récurrence immédiate.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - 1 = \dfrac{\left(\sqrt{u_n} - 1\right)\left(\sqrt{u_n} + 1\right)}{\left(\sqrt{u_n} + 1\right)} = \dfrac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1}$.

$\sqrt{u_n} + 1 \geqslant 2$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{u_n} + 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.

d. L'inégalité de gauche est acquise. L'inégalité de droite se démontre par récurrence immédiate.

124 **Partie A. 1. a.** Pour $x \geqslant 0$,

$f_1'(x) = \dfrac{-x}{1+x}$; $f_2'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$; $f_3'(x) = \dfrac{-x^3}{1+x}$.

b. Soit n un entier $\geqslant 1$ et $x \geqslant 0$,

$f_n'(x) = \dfrac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1})$

donc $f_n'(x) = \dfrac{-(-1)^{n-1}x^n}{1+x} = \dfrac{(-x)^n}{1+x}$

c. Si n est pair, f_n est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Si n est impair, f_n est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

d. $f_n(0) = 0$. Pour $x \geqslant 0$, $f_{2k-1}(x) \leqslant 0$; $f_{2k}(x) \geqslant 0$.

e. $f_{2k}(x) \geqslant 0 \Rightarrow F_{2k}(x) \leqslant \ln(1+x)$

$f_{2k-1}(x) \leqslant 0 \Rightarrow \ln(1+x) \leqslant F_{2k-1}(x)$

f. $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} \leqslant \ln(1+x)$

$\leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5}$

Partie B. 1. On cherche un encadrement de $\ln(x)$, le problème nous fournit un encadrement de $\ln(1+x)$ d'où la nécessité d'affecter X – 1 à X.

N = 3 est nécessaire pour une initialisation convenable.

2. Encadrement T < ln(X) < S.

3.

1,1	0,095308333 0,095333333	N = 5	0,0953101798
1,3	0,2623395 0,262461	N = 7	0,2623642645
1,5	0,40531529 0,40580357	N = 9	0,4054651081
1,7	0,53043703 0.53092148	N = 15	0,5306282511
1,9	0,64147239 0,64229041	N = 35	0,6418538862
2	0,69264843 0,69364643	N = 1003	0,6931471806

PRENDRE DES INITIATIVES

125 Pour comparer a et b, comparons $\ln a = 2014\ln 2012$ et $\ln b = 2013\ln 2013$ et, pour cela, étudions le signe, pour $x > 1$ de

$f(x) = (x+1)\ln(x-1) - x\ln x$.

$f'(x) = \ln(x-1) + \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x - 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

$f''(x) = \dfrac{-x-1}{x(x-1)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante et positive pour $x > 1$.

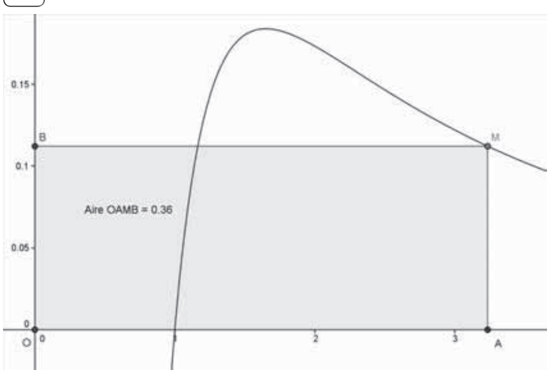
f est donc une fonction strictement croissante sur $]1;+\infty[$, s'annulant une seule fois pour $\alpha \approx 4$.

Si $x > \alpha$, $f(x) > 0$ soit $(x+1)\ln(x-1) > x\ln x$

donc $\ln a > \ln b$ et donc $a > b$.

On montre par un procédé similaire (étude du signe de $(x) = x\ln x - (x-1)\ln(x+1)$) que $\ln b > \ln c$ et que donc $b > c$. Ainsi : $a > b > c$.

126



Le problème revient à déterminer, pour $x \geqslant 1$, le maximum de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$, $f(x)$ donnant l'aire du rectangle OAMB.

Pour $x \geqslant 1$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

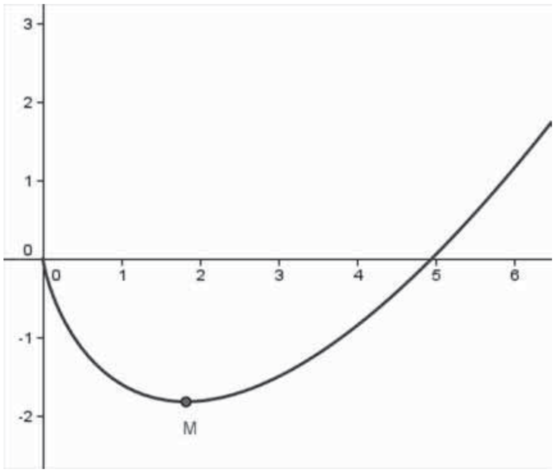
x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$

L'aire du rectangle est donc maximale pour $x = \mathrm{e}$.

Dimensions du rectangle d'aire maximale $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$:

$\mathrm{OA} = \mathrm{e}$ et $\mathrm{OB} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

127



Pour $x > 0$, $f_k'(x) = \ln x + 1 + k$.

$f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-k-1}$

x	0	e^{-k-1}	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $-$	0	$+$
$f_k(x)$	$\|$ $\searrow$	$f_k(m_k)$	$\nearrow$

La fonction f_k admet un minimum en $m_k = \mathrm{e}^{-k-1}$.

$f_k(m_k) = (-k-1)m_k + km_k = -m_k$ donc le point M_k appartient à la droite d'équation $y = -x$.

128 **1.** Les nombres $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$ et $\dfrac{\ln b - \ln a}{b-a}$ sont les coefficients directeurs respectifs des droites d_1, d_3 et d_2.

On lit donc : $\dfrac{1}{b} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{a}$.

2. Montrer que $\dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{a}$ revient à montrer que $\ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b}{a} - 1$ car $b - a > 0$. Montrons donc que $\ln x < x - 1$ pour $x > 1$. Pour $x > 1$, posons $f(x) = \ln x - x + 1$.

$f'(x) = \dfrac{1-x}{x} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$.

Pour $x > 1$, on a donc $f(x) < 0$ soit $\ln x < x - 1$.

Montrer que $\dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} > \dfrac{1}{b}$ revient à montrer que $\ln\dfrac{b}{a} > 1 - \dfrac{1}{\dfrac{b}{a}}$ car $b - a > 0$.

Montrons donc que $\ln x > 1 - \dfrac{1}{x}$ pour $x > 1$. Pour $x > 1$, posons $g(x) = \ln x - 1 + \dfrac{1}{x}$. $g'(x) = \dfrac{x-1}{x^2} > 0$ donc g est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$. Pour $x > 1$, on a donc $g(x) > 0$ soit $\ln x > 1 - \dfrac{1}{x}$.

129 Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x.

$OM^2 = x^2 + (\ln x)^2 = f(x)$ et, pour $x > 0$,

$f'(x) = 2x + \dfrac{2\ln x}{x} = \dfrac{2(x^2 + \ln x)}{x}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) = x^2 + \ln x$.

$g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

La fonction g s'annule une fois pour $\propto \approx 0{,}65$.

On a donc :

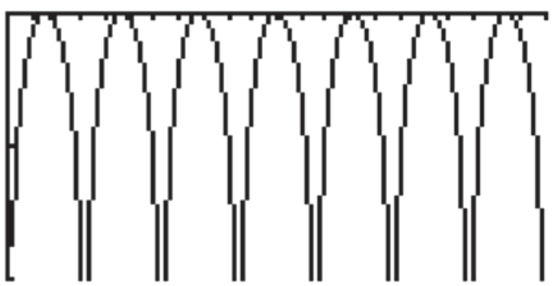
x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

La fonction f_k admet un minimum pour $x = \alpha$.

La distance OM est donc minimale pour le point M de $\mathscr{C}$ d'abscisse α.

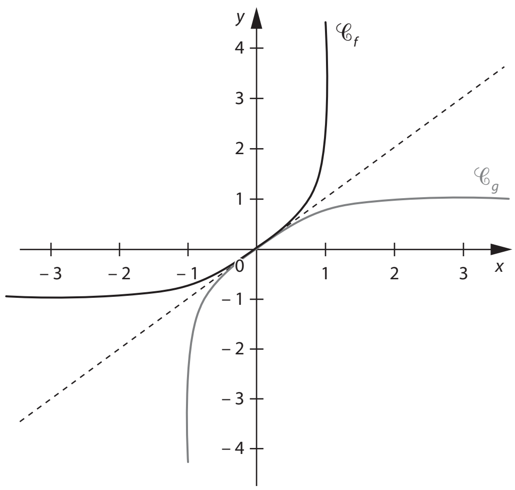
130

$y = -\ln(|\sin x|)$



131

a. Vrai **b.** Vrai



132 $\mathscr{C} : y = \ln(x+3) + \ln 2 = \ln(2x+6)$

$A(1\,;0)$, $B(-2\,;\ln 2)$ donc $\overrightarrow{AB}(-3\,;\ln 2)$

$C(e\,;1)$, $D(0\,;\ln 6)$ donc $\overrightarrow{CD}(-e\,;\ln 6 - 1)$

$x_{\overrightarrow{AB}}\, y_{\overrightarrow{CD}} - y_{\overrightarrow{AB}}\, x_{\overrightarrow{CD}} \neq 0$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

VERS LE POST BAC

133 **1.** Pour $x > 0$, on pose

$f(x) = \dfrac{1}{1+x} - \ln(1+x) + \ln x$

$g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(1+x) + \ln x$

f et g sont des fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x(1+x)^2} > 0$

$g'(x) = \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{x^2(1+x)} < 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	0

Pour $x > 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc $\dfrac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln x$

et $g(x) > 0$ donc $\dfrac{1}{x} > \ln(1+x) - \ln x$.

2. On ajoute ces inégalités obtenues à la question précédente pour les valeurs entières de k de 1 à n.

On obtient : $u_n - \dfrac{n}{n+1} \leqslant \ln n < u_n$. Cette dernière inégalité permet d'affirmer, par comparaison, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

134 Pour $x > 0$ et $x < 1$, on pose $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2 - 1}$.

Limite en 1 : $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \times \dfrac{\ln x}{x-1}$.

$\frac{\ln x}{x-1} \underset{X=x-1}{=} \frac{\ln(X+1)}{X}$; $\lim\limits_{X\to 0}\frac{\ln(X+1)}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Sens de variation de f sur $]0\,;1[$.

$f'(x) = \frac{-x^2\ln x - \ln x + x^2 - 1}{(x^2-1)^2}$ donc le signe de $f'(x)$ est de même signe que $g(x) = -x^2\ln x - \ln x + x^2 - 1$

$g'(x) = -2x\ln x + x - \frac{1}{x}$; $g''(x) = -2\ln x - 1 + \frac{1}{x^2}$

Si x appartient à $]0\,;1[$, $\frac{1}{x^2} \geqslant 1$ donc $-1 + \frac{1}{x^2} \geqslant 0$ et puisque $-2\ln x \geqslant 0$ alors $g''(x) \geqslant 0$.

g' est donc strictement croissante sur $]0\,;1[$, $g'(1) = 0$ donc $g'(x) \leqslant 0$ sur $]0\,;1[$.

g est donc strictement décroissante sur $]0\,;1[$,

$g(1) = 0$ donc $g(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;1[$.

Ainsi, pour $x \in\,]0\,;1[$, $f'(x) \geqslant 0$.

f est donc strictement croissante sur $]0\,;1[$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$ alors pour $x \in\,]0\,;1[$, $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

Accompagnement personnalisé

1 Passer d'une limite à une autre

1. a. Posons, pour $x > 0$, $t = \ln x$. On a $x = e^t$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} t = +\infty$; $\frac{\ln x}{x} = \frac{t}{e^t} = \frac{1}{\frac{e^t}{t}}$; $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$.

2. Pour tout réel x, $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

3. Posons, pour > 0, $t = \frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0} t = +\infty$; $x\ln x = \frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \frac{-\ln t}{t}$; $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

4. Pour $x > 0$, $\ln x^2 = 2\ln x$ donc $\frac{\ln x^2}{x} = \frac{2\ln x}{x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2}{x} = 0$.

2 Rechercher un ensemble de points

A Exemple guidé

Étape 2 : Pour $x > 0$,

$f_k'(x) = \frac{1}{2}\left(k - \ln x + x\left(\frac{-1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}(k - \ln x - 1)$

$f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < k - 1 \Leftrightarrow x < e^{k-1}$

x	0	e^{k-1}	$+\infty$
$f_k'(x)$	$\|\|$ +	0	−
$f_k(x)$	$\|\|$ ↗	$f_k(e^{k-1})$	↘

f_k possède un maximum atteint en $x_k = e^{k-1}s$.

$f_k\left(e^{k-1}\right) = \frac{1}{2}e^{k-1}(k-(k-1)) = \frac{1}{2}e^{k-1}$ donc le point S_k a pour coordonnées $\left(e^{k-1}\,;\frac{1}{2}e^{k-1}\right)$.

Étape 3 : a. $y_k = \frac{1}{2}x_k$. Les points S_k appartiennent donc à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

b. Quand k décrit $\mathbb{R}$, x_k décrit $]0\,;+\infty[$.

La courbe décrite par les points S_k est la demi-droite d'équation $y = \frac{1}{2}x \quad (x > 0)$.

B En autonomie

1. a. S_k a pour coordonnées $\left(k+1\,;\sqrt{k^2+1}\right)$.

$f_k(k+1) = \sqrt{k^2+1} = \sqrt{(x_k-1)^2+1}$ donc

$f_k(x_k) = \sqrt{x_k^2 - 2x_k + 2}$.

Les points S_k appartiennent à la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2-2x+2}$. Lorsque k décrit $\mathbb{R}$, x_k décrit $\mathbb{R}$.

La courbe décrite par les points S_k est courbe d'équation $y = \sqrt{x^2-2x+2}$.

b. S_k a pour coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\,;\ln k\right)$.

$f_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \ln k = \ln\left(\frac{1}{x_k^2}\right) = -2\ln x_k$.

Les points S_k appartiennent à la courbe d'équation $y = -2\ln x$. Lorsque k décrit $]0\,;+\infty[$, x_k décrit $]0\,;+\infty[$. La courbe décrite par les points S_k est courbe d'équation $y = -2\ln x$.

c. S_k a pour coordonnées $\left(\frac{k+1}{k}\,;2k\right)$.

$f_k\left(\frac{k+1}{k}\right) = 2k = \frac{2}{x_k - 1}$. Les points S_k appartiennent à la courbe d'équation $y = \frac{2}{x-1}$. Lorsque k décrit $\mathbb{R}^*$, x_k décrit $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. La courbe décrite par les points S_k est la courbe d'équation $y = \frac{2}{x-1}$.

d. S_k a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\,;\frac{1-2e^k}{e^k+1}\right)$.

$f_k\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right) = \frac{1-2e^k}{e^k+1} = \frac{1-2e^{4x_k^2}}{e^{4x_k^2}+1}$. Lorsque k décrit $\mathbb{R}$, x_k décrit $]0\,;+\infty[$. La courbe décrite par les points S_k est la courbe d'équation $y = \frac{1-2e^{4x^2}}{e^{4x^2}+1} \quad (x > 0)$.

e. S_k a pour coordonnées $\left(\ln k+3\,;\dfrac{\ln k}{k}\right)$

$f_k(\ln k+3)=\dfrac{\ln k}{k}=\dfrac{x_k-3}{e^{x_k-3}}$. Lorsque k décrit $]0\,;+\infty[$, x_k décrit $\mathbb{R}$. La courbe décrite par les points S_k est la courbe d'équation $y=\dfrac{x-3}{e^{x-3}}$.

f. S_k a pour coordonnées $\left(e^{-\frac{1}{k}}\,;k\ln k-1\right)$

$f_k\left(e^{-\frac{1}{k}}\right)=k\ln k-1=\dfrac{\ln(-\ln x_k)}{\ln x_k}-1.$

Lorsque k décrit $]0\,;+\infty[$, x_k décrit $]0\,;1[$. La courbe décrite par les points S_k est la courbe d'équation $y=\dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}-1$.

2. a. $k>0$. Pour $x>0$,

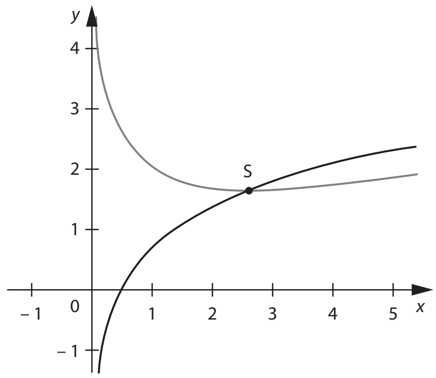
$g_k'(x)=\dfrac{x^2-k^2}{x(x^2+k^2)}=(x-k)\dfrac{x+k}{x(x^2+k^2)}.$

Le signe de $g_k'(x)$ correspond à celui de $(x-k)$.

x	0		k		$+\infty$
$f_k'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	$\|\|$	$\searrow$	$f_k(k)$	$\nearrow$	

f_k possède un minimum atteint en $x_k=k$.

$f_k(k)=\ln 2k$ donc le point S_k a pour coordonnées $(k\,;\ln 2k$. Lorsque k décrit $]0\,;+\infty[$, x_k décrit $]0\,;+\infty[$. La courbe décrite par les points S_k est courbe d'équation $y=\ln 2k$.



b. Voir fichier joint. Pour $x>0$, $h_k'(x)=(\ln x)^2+2\ln x+k$.

Pour étudier le signe de $h_k'(x)$, on pose $X=\ln x$.

$h_k'(x)=X^2+2X-k$ $(\Delta=4(1-k))$

Si $k\geqslant 1$, $\Delta<0$: on a donc $h_k'(x)\geqslant 0$ pour tout réel $x>0$.

Les courbes $\mathscr{C}_k$, pour $k\geqslant 1$, n'admettent pas de « sommets ».

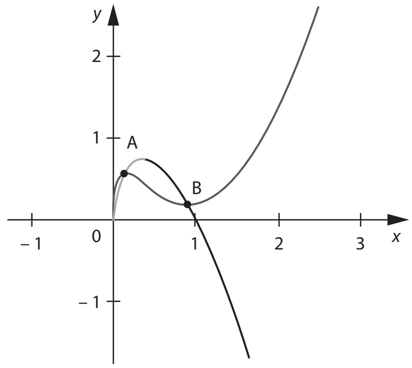
Les extremums n'existent donc que pour $k<1$.

Ils sont obtenus pour $x=e^{-(1+\sqrt{1-k})}$ et $x=e^{-(1-\sqrt{1-k})}$.

x	0		$x_M=e^{-(1+\sqrt{1-k})}$		$x_m=e^{-(1-\sqrt{1-k})}$		$+\infty$
$h_k'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h_k(x)$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$h_k(x_M)=2x_M\ln x_M$. Les maximums appartiennent à la courbe d'équation $y=-2x\ln x$ pour $0<x<\dfrac{1}{e}$.

$h_k(x_m)=-2x_m\ln x_m$. Les minimums appartiennent à la courbe d'équation $y=-2x\ln x$ pour $x>\dfrac{1}{e}$.



3 Savoir résoudre directement… ou pas !

1. a. Pour $x\in\,]-\infty\,;0[\,\cup\,\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$,

$\ln(3x^2-2x)=0\Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\dfrac{1}{3}$. Deux solutions : 0 et $-\dfrac{1}{3}$.

b. Cette équation ne peut pas être résolue de façon directe. La méthode consiste à étudier alors la fonction : $x\mapsto-(x+1)+8\ln(x+1)$.

Pour $x>-1$, $f'(x)=\dfrac{-x+7}{x+1}$. f est strictement croissante sur $]-1;7]$, strictement décroissante sur $[7\,;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$; $f(7)>0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones sur un intervalle permet d'affirmer que cette équation admet deux solutions.

c. Pour $x>2$, $(x-2)\ln x=x-2\Leftrightarrow\ln x=1$.

Une solution : e

2. a. Une solution : 1

b. Une solution : $\dfrac{e+1}{e-2}$

c. Deux solutions : e et e^7.

d. Équation que l'on ne peut pas résoudre directement

e. Ensemble solution : $]0\,;1[\,\cup\,]e^2\,;+\infty[$

f. Une solution : e^2-3

g. Solutions : $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

h. Aucune solution (Pour $x>0$, $\ln x\neq x^2$)

i. Ensemble solution : $\left]0\,;e^{-\frac{3}{2}}+1\right]$

4 Équations fonctionnelles

A. (E_A) $f(xy)=f(x)+f(y)$, x et y réels >0.

1. Pour $x = y = 0$, on a : $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

Pour x réel et $y = 0$, on a : $f(0) = f(x) + f(0)$ d'où $f(x) = 0$.

2. x et y sont dorénavant strictement positifs.

Pour $x > 0$, $f_k(x) = k\ln x$. Soit $y > 0$.

$f_k(xy) = k\ln xy = k\ln x + k\ln y = f_k(x) + f_k(y)$

Les fonctions f_k sont donc solutions de (E_A)

3. a. Pour $x = y = 1$, on a : $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$.

b. On a, d'une part, $f_y'(x) = yf_y'(xy)$, d'autre part $f_y'(x) = f'(x)$ donc, pour $y > 0$, $yf_y'(xy) = f'(x)$.

Si $x = 1$, cette relation indique que pour $y > 0$, $f'(y) = \dfrac{f'(1)}{y} = \dfrac{k}{y}$ avec $k = f'(1)$.

c. Pour $x > 0$, $h'(x) = f'(x) - \dfrac{k}{x} = \dfrac{f'(1)}{x} - \dfrac{f'(1)}{x} = 0$ donc h est une fonction constante.

Pour $x > 0$, $h(x) = h(1) = 0$ donc $f(x) = k\ln x$.

4. Les seules fonctions non nulles, dérivables sur $]0\,;+\infty[$ solutions de l'équation fonctionnelle (E_A) sont les fonctions $x \mapsto k\ln x$.

B. (E_B) $f(x+y) = f(x)f(y)$, x et y réels.

1. Soit k un réel. Pour tout x réel, $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$.

Soit y un réel.

$f_k(x+y) = \mathrm{e}^{k(x+y)} = \mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{ky} = f_k(x)f_k(y)$

Les fonctions f_k sont donc solutions de (E_B).

2. a. Supposons que $f(0) = 0$. Pour tout x réel,

$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$ donc $f(0) \neq 0$.

L'égalité $f(x) = f(x)f(0)$ implique que $f(0) = 1$.

b. On a, d'une part, $f_x'(y) = f'(x+y)$, d'autre part $f_x'(y) = f(x)f'(y)$ donc, pour y réel, $f'(x+y) = f(x)f'(y)$.
Si $y = 0$, $f'(x) = f(x)f'(0)$.

Pour tout x réel, $f'(x) = kf(x)$ avec $k = f'(0)$.

c. Pour x réel, $h'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{-kx} - k\mathrm{e}^{-kx}f(x)$ d'où $h'(x) = kf(x)\mathrm{e}^{-kx} - k\mathrm{e}^{-kx}f(x) = 0$ donc h est une fonction constante.

d. Pour x réel, $h(x) = h(0) = 1$ donc $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-kx}} = \mathrm{e}^{kx}$.

3. Les seules fonctions non nulles, dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation fonctionnelle (E_B) sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.

C. (E_C) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, x et y réels.

1. Fonctions linéaires $x \mapsto kx$.

2. a. La fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut affirmer, grâce au théorème des valeurs intermédiaires que pour tout x réel, il existe $y > 0$ tel que $x = \ln y$.

b. Pour $y > 0$, $g(xy) = f(\ln(xy)) = f(\ln x + \ln y)$ donc $g(xy) = f(\ln x) + f(\ln y) = g(x) + g(y)$ donc g est une solution de l'équation (E_A).

c. Ainsi, $g(y) = k\ln y$.

Pour tout x réel, $f(x) = f(\ln y) = g(y) = kx$.

3. Les seules fonctions non nulles, dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation fonctionnelle (E_C) sont les fonctions $x \mapsto kx$.

D. (E_D) $f(xy) = f(x)f(y)$, x et y réels > 0.

1. Fonctions puissances entières $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

2. a. La fonction exp étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$, on peut affirmer, grâce au théorème des valeurs intermédiaires que pour tout x réel > 0, il existe y réel tel que $x = \mathrm{e}^y$.

b. Pour y réel, $g(x+y) = f(\mathrm{e}^{x+y}) = f(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y)$ donc $g(x+y) = f(\mathrm{e}^x)f(\mathrm{e}^y) = g(x)g(y)$ donc g est une solution de l'équation (E_B).

c. Ainsi, $g(y) = \mathrm{e}^{ky}$.

Pour tout x réel, $f(x) = f(\mathrm{e}^y) = g(y) = \mathrm{e}^{ky} = (\mathrm{e}^y)^k = x^k$.

3. Les seules fonctions non nulles, dérivables sur $]0\,;+\infty[$ solutions de l'équation fonctionnelle (E_D) sont les fonctions $x \mapsto x^k$.

CHAPITRE 8

Intégration

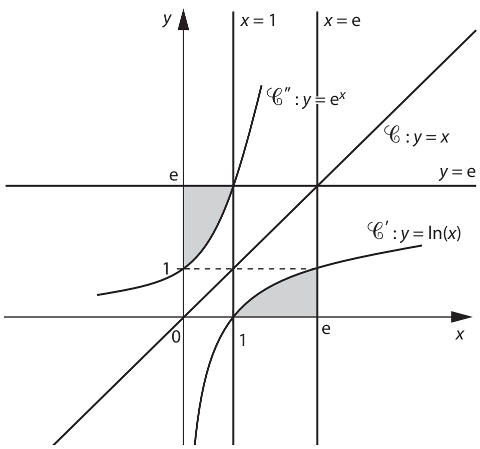
Pour reprendre contact

1 Avec les aires et les mesures

a. 16 **b.** 8 **c.** L'aire du carré vert est donc 4 cm^2 donc, d'après **1.a.**, l'aire du polygone ABCDE est 64 cm^2.

2 Avec des domaines du plan

1. et **2. a.**



b. L'aire est comprise entre 0 et e – 1 ≈1,72 unités d'aire.

c. Voir figure.

d. Ces deux parties du plan sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, donc elles ont la même aire.

3 Avec les formules de dérivation

a. $f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 5$ **b.** $f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 5$ **c.** $f'(x) = 20(2x + 5)^9$ **d.** $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+5)^2}$

e. $f'(x) = \dfrac{-16x}{(x^2+5)^9}$ **f.** $f'(x) = 2xe^{x^2} - 4$ **g.** $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$ **h.** $f'(x) = \dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2 - x + 3}}$

4 Avec les variations

F est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ et strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

Activité 1. Aire sous la parabole

A. Unité d'aire

1. 26 < aire (E) < 50.

2. Il y a 100 petits carreaux dans le rectangle de côtés OI et OJ. Donc 0,26 < aire (E) < 0,5.

3. En cm^2, $0{,}26 \times 30$ < aire (E) < $0{,}5 \times 30$ soit 7,8 < aire (E) < 15.

B. Méthode des rectangles

1. <u>Contruction sur GeoGebra</u> (voir sur le site Math'x)

b. 3 rectangles sont tracés**,** les dimensions sont $\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}\times\frac{9}{16}$, $a_4 = \frac{7}{32}$ et $\frac{7}{32} = 0{,}219$ à 10^{-3} près par excès, ce qui est la valeur donnée par le logiciel.

c. $b_4 = \frac{15}{32}$ et $\frac{15}{32} = 0{,}469$ à 10^{-3} près par excès, ce qui est la valeur donnée par le logiciel.

d. 0,218 $\leqslant$ aire (E) $\leqslant$ 0,469.

e. À partir de $n = 50$, on ne voit plus de différence sur le graphique entre E et les rectangles tracés en dessous de la courbe et entre E et les rectangles tracés au-dessus. Et pour $n = 100$ le logiciel donne $a_{100} = 0{,}328$ et $b_{100} = 0{,}338$.

2. <u>Cas général</u>

a. $a_7 = \frac{1}{7}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{2}{7}\right) + f\left(\frac{3}{7}\right) + f\left(\frac{4}{7}\right) + f\left(\frac{5}{7}\right) + f\left(\frac{6}{7}\right)\right)$

$b_7 = \frac{1}{7}\left(f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{2}{7}\right) + f\left(\frac{3}{7}\right) + f\left(\frac{4}{7}\right) + f\left(\frac{5}{7}\right) + f\left(\frac{6}{7}\right) + f\left(\frac{6}{7}\right) + f\left(\frac{7}{7}\right)\right)$

Le logiciel donne $a_7 = 0{,}265$ et $b_7 = 0{,}408$ arrondi à 3 décimales.

b. $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

c. $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n1}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

(a_n) et (b_n) ont pour limite $\frac{1}{3}$, ce que l'on peut proposer pour aire (E).

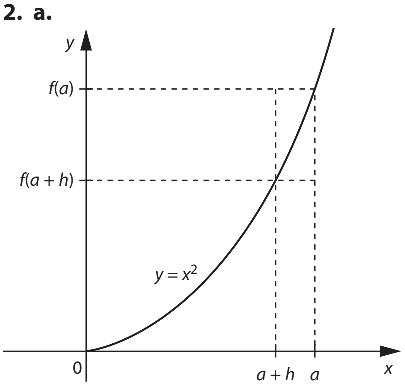
Activité 2. Intégrale et primitive

1. a. $hf(a)$ et $hf(a+h)$ sont respectivement l'aire du rectangle sous la parabole et l'aire du rectangle au-dessus de la parabole. Les aires de ces deux rectangles encadrent l'aire de la partie bleue du plan comprise entre la parabole, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = a + h$.

b. $f(a) = a^2$ et $f(a+h) = (a+h)^2$. Comme $h > 0$ le sens des inégalités de **a.** en divisant par h est conservé et on en déduit $a^2 \leqslant \frac{F(a+h)-F(a)}{h} \leqslant (a+h)^2$.

c. Lorsque h tend vers 0, $(a+h)^2$ tend vers a^2, donc $\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$ tend vers a^2.

2. a.



b. En procédant comme dans **1.a.** et **1.b**, $-hf(a+h) \leqslant F(a) - F(a+h) \leqslant -hf(a)$.

Comme $-h > 0$ nous obtenons $(a+h)^2 \leqslant \dfrac{F(a)-F(a+h)}{-h} \leqslant a^2$ soit $(a+h)^2 \leqslant \dfrac{F(a+h)-F(a)}{h} \leqslant a^2$.

Lorsque h tend vers 0, $(a+h)^2$ tend vers a^2, donc $\dfrac{F(a+h)-F(a)}{h}$ tend vers a^2.

3. Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{F(a+h)-F(a)}{h}$ tend vers a^2, donc par définition F est dérivable en a et $F'(a) = a^2$.

4. a. Pour tout $x \geqslant 0$, $F'(x) - G'(x) = x^2 - x^2 = 0$, donc $F - G$ est une fonction constante sur $[0\,;+\infty[$.

b. $F(0) = 0 = G(0)$, comme $F - G$ est constante sur $[0\,;+\infty[$ pour tout $x \geqslant 0$, $(F-G)(x) = (F-G)(0) = 0$.

Il en résulte que, pour tout x dans $[0\,;+\infty[$, $F(x) = G(x)$, donc $F(a) = G(a) = \dfrac{1}{3}a^3$.

c. $F(1) = \dfrac{1}{3}$. L'aire de la partie du plan comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses, la droite des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ est égale à $\dfrac{1}{3}$ (à recouper avec le résultat de l'activité 1).

Activité 3. Valeur moyenne d'une fonction

1. $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{4k^2}{n^2} = \dfrac{4}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \dfrac{4}{n^3}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{2}{3}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$

2. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \dfrac{n^2\left(2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2} = 2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ tend vers 2, donc m_n tend vers $\dfrac{2}{3}\times 2 = \dfrac{4}{3} = \mu$.

3. a. Les aires sont égales.

b. La somme des aires de la partie blanche sous la courbe et de l'aire de la partie bleue sous la droite est égale à l'aire de la partie du plan entre la droite d'équation $y = \mu$ et l'axe des abscisses, sur $[0\,;2]$.

La somme des aires de la partie bleue sous la courbe et au-dessus de la droite d'équation $y = \mu$ et de la partie blanche sous la courbe est égale à l'aire sous la courbe, sur $[0\,;2]$. Donc par **a.**, les deux parties du plan colorées ont des aires égales.

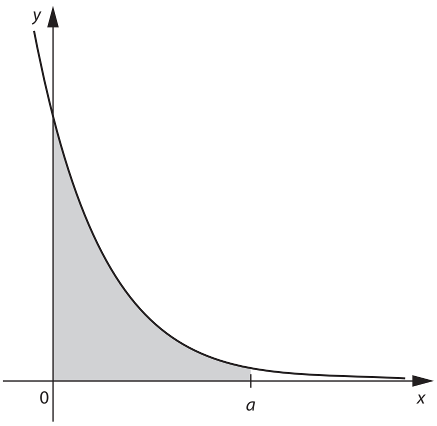
4. Par **3.**, la valeur moyenne μ de g sur $[a\,;b]$ est telle que $\mu = \dfrac{aire(E)}{b-a}$ où E désigne la partie du plan sous la courbe représentative de g et au-dessus de l'axe des abscisses, sur $[a\,;b]$.

TP1. Premières rencontres

A. Fonction $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$

1. $g'(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x}$, donc $g'(x) < 0$, alors g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. Comme $\lambda > 0$, lorsque $x \to +\infty$ $-\lambda x \to -\infty$. Donc $\lambda e^{-\lambda x}$ a pour limite 0 en $+\infty$. Il en résulte que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$.

2. Voir partie grisée sur le graphique.



3. $A(a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$. Lorsque $a \to +\infty$, par 1., $e^{-\lambda a} \to 0$. Donc $A(a)$ a pour limite 1.

L'aire sous la courbe représentative de g, tend vers 1.

B. Fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$

1. Étude de f

a. Pour tout réel x, $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$. $f'(x) < 0$ sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et $f'(0) = 0$.

f est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Lorsque $x \to +\infty$, $-\dfrac{x^2}{2} \to -\infty$ donc $e^{-\frac{x^2}{2}} \to 0$, (comme f est paire on a aussi « Lorsque $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$ »).

b. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel a, $I(a)$ existe. Comme f est positive, si $a \geqslant 0$, $I(a)$ est l'aire de la partie du plan sous la courbe représentative de f, sur $[0\,;a]$,

si $a \leqslant 0$, $\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -\int_a^0 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

donc $I(a)$ est l'opposé de l'aire de la partie du plan située sous la courbe sur $[a\,;0]$.

2. Exploration sur GeoGebra

a. Voir sur le site Math'x.

b. $I(0{,}5) \approx 0{,}47993$; $I(1) \approx 0{,}85562$; $I(3) \approx 1{,}24993$; $I(10) \approx 1{,}25331$; résultats arrondis à la 5e décimale.

c. Pour $a \geqslant 10$, le logiciel donne $I(a) \approx 1{,}25331$. On peut conjecturer que $I(a)$ admet une limite lorsque $a \to +\infty$ et que cette limite a pour valeur approchée 1,25331.

d. $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = 1{,}25331$ à 10^{-5} près. On retrouve le résultat conjecturé.

Pour $a \geqslant 0$, l'aire de la partie du plan sous la courbe Γ, sur $[0\,;a]$, tend vers $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ lorsque $a \to +\infty$.

3. D'une aire à une autre

a. f est paire, donc Γ a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

b. Aire $(E_0) = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \approx 2{,}507$; aire $(E_1) = I(1) \approx 0{,}856$; aire $(E_2) = 2I(1) \approx 1{,}711$;

aire (E_3) = aire (E_3') avec $E_3' = \{M(x\,;y) \in \mathcal{P}\,;\, x \geqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.

Donc aire $(E_3) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} - I(1) \approx 0{,}398$. Aire (E_4) = aire (E_3). Aire $(E_5) = 2I(1)$ + aire $(E_4) \approx 2{,}109$.

TP2. La méthode dite « des rectangles »

A. Des valeurs approchées de $F(1)$

1. $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{16}{17}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{16}{25}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2} \leqslant F(1) \leqslant \dfrac{1}{4}\times 1+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{16}{17}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{16}{25}$.

L'amplitude de l'encadrement est égal à $\dfrac{1}{4}\times 1-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.

$\dfrac{2\,449}{3\,400} \leqslant F(1) \leqslant \dfrac{1437}{1700}$, ou encore $0{,}720 \leqslant F(1) \leqslant 0{,}846$.

2. $\dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f\left(\dfrac{k}{10}\right) \leqslant F(1) \leqslant \dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=0}^{9} f\left(\dfrac{k}{10}\right)$.

$\dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=0}^{9} f\left(\dfrac{k}{10}\right) - \dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f\left(\dfrac{k}{10}\right) = \dfrac{f(0)-f(1)}{10} = 0{,}05$, donc pour $n = 10$ l'amplitude de l'encadrement est égale à 0,05.

3. On peut conjecturer que plus n augmente plus l'amplitude de l'encadrement diminue et penser que pour $n \geqslant 100$ l'amplitude sera inférieure ou égale à 10^{-2}.

4. On peut aussi conjecturer que l'amplitude sera égale à $\dfrac{f(0)-f(1)}{n}=\dfrac{1}{2n}$. $\dfrac{1}{2n}\leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow n\geqslant 50$.

Donc pour $n \geqslant 100$, l'amplitude sera bien inférieure à 10^{-2}. On peut aussi vérifier sur tableur que $\dfrac{1}{100}\sum_{k=0}^{99} f\left(\dfrac{k}{100}\right)-\dfrac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f\left(\dfrac{k}{100}\right)=0{,}005$. Donc pour $n=100$, l'amplitude de l'encadrement est bien inférieure à 0,01.

B. Des valeurs approchées de *F*(*a*)

1. u_n représente la somme des aires des rectangles situés sous la courbe et v_n la somme des aires des rectangles situés au-dessus.

2. a. f est décroissante sur $\left[\dfrac{(k-1)a}{n};\dfrac{ka}{n}\right]$. Donc, pour tout x dans $\left[\dfrac{(k-1)a}{n};\dfrac{ka}{n}\right]$,

$f\left(\dfrac{(k-1)a}{n}\right)\geqslant f(x)\geqslant f\left(\dfrac{ka}{n}\right)$ et comme $\dfrac{(k-1)a}{n}\leqslant\dfrac{ka}{n}$,

$$\int_{\frac{(k-1)a}{n}}^{\frac{ka}{n}} f\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)dx \geqslant \int_{\frac{(k-1)a}{n}}^{\frac{ka}{n}} f(x)\,dx \geqslant \int_{\frac{(k-1)a}{n}}^{\frac{ka}{n}} f\left(\frac{ka}{n}\right)dx$$

D'où $\dfrac{a}{n}f\left(\dfrac{(k-1)a}{n}\right)\geqslant \displaystyle\int_{\frac{(k-1)a}{n}}^{\frac{ka}{n}} f(x)\,dx \geqslant \dfrac{a}{n}f\left(\dfrac{ka}{n}\right)$.

b. De a., on en déduit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a}{n}f\left(\dfrac{(k-1)a}{n}\right)\geqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)a}{n}}^{\frac{ka}{n}} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n}\dfrac{a}{n}f\left(\dfrac{ka}{n}\right)$.

Par la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)a}{n}}^{\frac{ka}{n}} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$.

Il en résulte $\displaystyle\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{ka}{n}\right)\leqslant F(a)\leqslant \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)$. C'est-à-dire $u_n\leqslant F(a)\leqslant v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

c. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n-u_n=\dfrac{a}{n}(f(0)-f(a))=\dfrac{a}{n}\left(1-\dfrac{1}{1+a^2}\right)=\dfrac{a^3}{n(1+a^2)}$.

d. $\dfrac{a^3}{n(1+a^2)}\leqslant 0{,}001 \Leftrightarrow n\geqslant 1000\dfrac{a^3}{1+a^2}$.

3. a.

ENTRÉE : Saisir a

INITIALISATION : $n \leftarrow E\left(\dfrac{1000a^3}{1+a^2}\right)+1$;

$u\leftarrow 0$; $v \leftarrow 0$

TRAITEMENT : Pour k allant de 1 à n Faire

| $u\leftarrow u+\dfrac{a}{n}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{k^2a^2}{n^2}}\right)$; $v\leftarrow v+\dfrac{a}{n}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{(k-1)^2a^2}{n^2}}\right)$

Fin Pour

SORTIE : Afficher u ; Afficher v

b.

a	0,5	1	2	3	5	10	20	30	50
n	101	501	1 601	2 701	4 808	9 901	19 951	29 967	49 981
$F(a)$	0,463	0,785	1,107	1,249	1,373	1,471	1,520	1,537	1,550

Si on prend $a=100$, $a=500$, $a=1\,000$, $F(a)$ tend vers 1,57. $F(a)$ semble avoir une limite lorsque a tend vers $+\infty$ voisine de 1,57.

C. Des propriétés de *F*

1. Pour tous réels a, b, $F(b)-F(a)=\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx-\int_0^a f(x)\,dx=\int_a^0 f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.

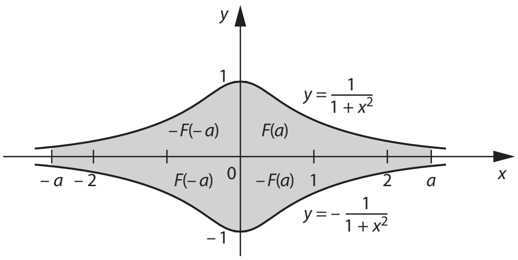
Si $a < b$, comme $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est positif, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(On peut aussi utiliser : pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$). $F(0) = 0$.

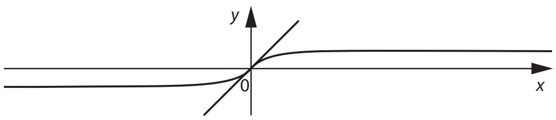
2. a. Pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{1}{1+(-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$, f est donc une fonction paire sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe représentative de f.

b. $F(-a) = \int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_{-a}^0 f(x)\,dx$.

$\int_{-a}^0 f(x)\,dx$ est l'aire de la partie du plan située sous la courbe représentative de f sur $[-a\,;0]$, comme l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe représentative de f, cette aire est égale à celle de la partie située sous la courbe sur $[0\,;a]$ c'est-à-dire à $\int_0^a f(x)\,dx = F(a)$, donc pour tout $a \geqslant 0$, $F(-a) = -F(a)$.



3. F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, donc $F'(x) = f(x)$. $F'(0) = f(0) = 1$, donc la tangente à l'origine à la courbe représentative de F est la droite d'équation $y = x$. (Remarque : F = Atan.)



TP3. D'autres méthodes d'approximation

A. Les formules

1. <u>Par un segment de droite</u>

La hauteur du trapèze est égale à $b - a$ et les bases (les deux côtés opposés et parallèles), ont pour longueurs $f(a)$ et $f(b)$. L'aire du trapèze est donc égale à $(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

L'aire du trapèze approche l'aire de la partie du plan sous la courbe, sur $[a\,;b]$, donc $\mathrm{I} \approx (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

2. <u>Par un morceau de parabole</u>

a. $\dfrac{b-a}{6}\left(p(a)+4p\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+p(b)\right) = \dfrac{b-a}{6}(1+4\times 1+1) = b-a = \int_a^b 1\,dx$

$\int_a^b x\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_a^b = \dfrac{b^2-a^2}{2}$.

$\dfrac{b-a}{6}\left(p(a)+4p\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+p(b)\right) = \dfrac{b-a}{6}(a+2(a+b)+b) = \dfrac{b-a}{6}[3(a+b)] = \dfrac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b x\,dx$

$\int_a^b x^2\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_a^b = \dfrac{b^3-a^3}{3}$.

$\dfrac{b-a}{6}\left(p(a)+4p\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+p(b)\right) = \dfrac{b-a}{6}\left(a^2+4\dfrac{(a+b)^2}{4}+b^2\right) = \dfrac{b-a}{6}(2a^2+2ab+2b^2)$

$= \dfrac{b-a}{3}(a^2+ab+b^2) = \dfrac{b^3-a^3}{3} = \int_a^b x^2\,dx$

b. Pour tous réels α, β, γ, $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha p_3(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_1(x)$.

D'où $\int_a^b (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx = \dfrac{b-a}{6}\left[\alpha\left(p_3(a)+4p_3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+p_3(b)\right)+\beta\left(p_2(a)+4p_2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+p_2(b)\right)\right.$

$\left.+\gamma\left(p_1(a)+4p_1\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+p_1(b)\right)\right]$

$=\dfrac{b-a}{6}\left[\left(\alpha p_3(a)+\beta(p_2(a)+\gamma p_1(a)+4\left(\alpha p_3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+\beta p_2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+\gamma p_1\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)+\alpha p_3(b)+\beta p_2(b)+\gamma p_1(b)\right)\right]$

$=\dfrac{b-a}{6}\left[p(a)+4p\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+p(b)\right]$

c. Comme $p(a)=f(a)$, $p\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ et $p(b)=f(b)$,

$\dfrac{b-a}{6}\left[p(a)+4p\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+p(b)\right]=\dfrac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$.

L'aire sous la parabole, sur $[a\,;b]$, étant égale à $\dfrac{b-a}{6}\left[p(a)+4p\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+p(b)\right]$, on en déduit que

$\mathrm{I}\approx\dfrac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$.

B. À l'aide d'un algorithme (**voir sur le site Math'x**)

Pour $n \geqslant 2$, si on désigne par T_n et S_n les valeurs approchées de K respectivement par la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson :

$$\mathrm{T}_n=\frac{1}{2n}\left[f(0)+2\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)+f(1)\right]=\frac{3}{4n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+\dfrac{k^2}{n^2}}$$

$$S_n=\frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)+4f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)=\frac{1}{3}\left[T_n+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k+1}{n}\right)\right]$$

$\mathrm{T}_{50}\approx 0{,}7853814967$ à 10^{-10} près.

$\mathrm{S}_{50}\approx 0{,}7853981634$ à 10^{-10} près.

$\mathrm{T}_{500}\approx 0{,}785397996730782$.

$\mathrm{S}_{500}\approx 0{,}785398163397449$.

Avec T_{50} on obtient une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ à 10^{-4} près

Avec S_{50} on obtient une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ à 10^{-13} près

AvecT_{500} on obtient une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ à 10^{-6} près

Avec S_{500} on on obtient une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ à au moins 10^{-15} près

TP4. En autonomie une suite d'intégrales

Conjectures : I_n est l'aire située sous la courbe sur $[0\,;1]$.

D'après les 3 courbes tracées, (I_n) semble décroissanre et minorée par 0. Elle semble converger vers 0.

Démonstration : pour tout réel x dans $[0\,;1]$ et n dans $\mathbb{N}^*$, $0\leqslant x^n\,\mathrm{e}^{-x}$, donc f_n est positive sur $[0\,;1]$, I_n est donc l'aire de la partie du plan située sous la courbe sur $[0\,;1]$.

Sur $[0\,;1]$, $0\leqslant x^{n+1}\leqslant x^n\leqslant 1$ donc $0\leqslant x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^n\mathrm{e}^{-x}$. Comme $0\leqslant 1$, $0\leqslant\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,dx\leqslant\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,dx$,

soit $0\leqslant \mathrm{I}_{n+1}\leqslant \mathrm{I}_n$. La suite (I_n) est donc décroissante et minorée par 0.

Elle converge donc $0\leqslant x\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant -x\leqslant 0$, $x\mapsto \mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{e}^{-1}\leqslant \mathrm{e}^{-x}\leqslant 1$.

Il en résulte $0\leqslant x^n\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^n$ donc $0\leqslant \mathrm{I}_n\leqslant\int_0^1 x^n\,dx$.

Comme $\int_0^1 x^n\,dx=\left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{n+1}$, on en déduit $0\leqslant \mathrm{I}_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0.

Il en résulte, d'après le théorème des gendarmes, que I_n tend vers 0.

TP5. Étude d'une suite à l'aide d'intégrales

A. Analyser un raisonnement

Le raisonnement est faux. D'une part à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur on peut conjecturer que la suite (u_n) converge mais vers une limite voisine de 0,69. En effet, à 10^{-2} près $u_{50} \approx 0{,}71$; $u_{100} \approx 0{,}70$; $u_{500} \approx 0{,}69$; $u_{1\,000} \approx 0{,}69$; $u_{2\,000} \approx 0{,}69$ d'autre part pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant (n+1)\dfrac{1}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}$, donc u_n ne peut pas converger vers 0.

B. Étude de la suite (u_n)

1. a. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, et n est dans $\mathbb{N}^*$, il en résulte que, pour $n \leqslant x \leqslant n+1$,

$\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et on en déduit $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx$, soit $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{n}$.

C'est-à-dire que l'aire du rectangle de base $(n+1)-n=1$ et de hauteur $\dfrac{1}{n+1}$, situé sous la courbe (H) d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $[n\,;n+1]$, est inférieure à l'aire de la partie du plan située sous la courbe (H) sur $[n\,;n+1]$, et l'aire du rectangle de base 1 et de hauteur $\dfrac{1}{n}$, situé au-dessus de la courbe (H) sur $[n\,;n+1]$ $\dfrac{1}{x}$ est supérieure à l'aire de la partie du plan située sous la courbe (H) sur $[n\,;n+1]$.

b. $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_n^{n+1} = \ln(n+1)-\ln(n)$. Par 1.a., nous obtenons $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$ d'où

$0 \leqslant \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$ soit $\dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \geqslant 0$ et $-\dfrac{1}{n+1} \geqslant \ln(n) - \ln(n+1)$ ce qui entraîne

$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n(n+1)} \geqslant \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

Il en résulte $0 \leqslant \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$, c'est-à-dire $0 \leqslant f(n) \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. a. Par 1., pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant f(n) \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$, donc pour $n \leqslant k \leqslant 2n$, $0 \leqslant f(k) \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)}$,

Il en résulte $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) \leqslant \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$, soit $0 \leqslant f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(2n) \leqslant S_n$.

b. Pour tout réel x différent de 0 et de -1, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

Il en résulte pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

D'où $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$.

c. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n}^{2n} (\ln(k) - \ln(k+1))$.

Il en résulte $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n + \ln(n) - \ln(2n+1) = u_n + \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) = u_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = u_n - \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$.

Par a. nous en déduisons $0 \leqslant u_n - \ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant S_n$, c'est-à-dire $\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant S_n + \ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$,

soit $\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n+1} + \ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{2n+1}$ ont pour limite 0 donc $\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$ a pour limite $\ln(2)$ et, par le théorème des gendarmes, la suite u_n a pour limite $\ln(2)$.

Remarque : on peut aussi procéder de la façon suivante, en reprenant le résultat de 1.a. nous obtenons :

$\displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=n}^{2n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{k}$, soit $u_n - \dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\int_n^{2n} \frac{1}{x}\,dx \leqslant u_n - \frac{1}{2n}$.

Nous en déduisons $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} + \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,dx$.

C'est-à-dire $\ln(2n) - \ln(n) + \frac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(2n)$.

$\ln(2n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln(2)$, d'où $\ln(2) + \frac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} + \ln(2)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{2n}$ ont pour limite 0, donc, par le théorème des gendarmes, la suite (u_n) a pour limite $\ln(2)$.

Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 **a.** $\int_{-1}^{0} -f(x)\,dx$ **b.** $\int_{-1}^{1} -f(x)\,dx$

c. $\int_{0}^{1} -f(x)\,dx + \int_{1}^{1,5} f(x)\,dx$

d. $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

2 $\sum_{k=1}^{k=10} \frac{1}{10} f\left(\frac{k}{10}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_{k=0}^{k=9} \frac{1}{10} f\left(\frac{k}{10}\right)$

3 Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

a. $F(x) = -2x^2 + 5x + k$ **b.** $F(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + k$

c. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 4x + k$ **d.** $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + x + k$

4 Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

a. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + k$ **b.** $F(x) = -e^{-x} + k$

c. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + k$ **d.** $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x + 3) + k$

5 Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

a. $F(x) = 4\ln(x) + k$ **b.** $F(x) = -\frac{1}{x} + k$

c. $F(x) = -2\ln(x + 4) + k$ **d.** $F(x) = \frac{3}{x+1} + k$

6 Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

a. $F(x) = \ln(x^2 + 3) + k$ **b.** $F(x) = \ln(e^x + 5) + k$

c. $F(x) = e^{x^2} + k$ **d.** $F(x) = \frac{1}{12}(2x + 4)^6 + k$

ENTRAÎNEMENT

7 **1. a.** L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [1 ; 3]. Elle est égale à 2 u.a.

b. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [– 3 ; – 1]. Elle est égale à 8 u.a.

c. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [3 ; 5]. Elle est égale à 6 u.a.

d. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [– 3 ; 3]. Elle est égale à 12 + 2 = 14 u.a.

e. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [1 ; 5]. Elle est égale à 2 + 6 = 8 u.a.

f. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [0 ; 5]. Elle est égale à 1,5 + 2 + 6 = 9,5 u.a.

2. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [– 3 ; 5] s'obtient en ajoutant les résultats obtenus en **1.c**. et **1.d.**, ce qui donne 20 u.a., comme l'unité d'aire est de 0,64 cm^2, l'aire en cm^2 est égale à12,8 cm^2.

8 **1.** L'unité d'aire étant de 2 carreaux :

a. l'aire est de 12 carreaux, donc de 6 u.a.

b. Par symétrie de **a.**, l'aire est de 6 u.a.

c. En ajoutant les résultats de **a.** et **b.**, nous obtenons 12 u.a.

2. Par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 1$ nous obtenons $24\ cm^2 \times 2 = 48\ cm^2$.

9 L'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ est comprise entre l'aire du triangle rectangle de côtés de l'angle droit de longueurs $\frac{\pi}{2}$ et 1 et l'aire du triangle rectangle isocèle de côté de l'angle droit $\frac{\pi}{2}$.

Donc $\frac{\pi}{4} \leqslant I \leqslant \frac{\pi^2}{8}$.

10 **Vrai ou faux**

Faux. La parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$. Si on prend sur la parabole le point A de coordonnées (1 ; 3), l'aire du triangle rectangle situé sous la parabole et d'hypoténuse OA est égale à 1,5 u.a. Si ensuite on considére le point B de coordonnées (2 ; 3) situé sous la parabole, l'aire du rectangle de base 1 sur l'axe des abscisses, à gauche de la droite d'équation $x = 2$, dont un côté d'extrémité B est un segment de la droite d'équation $x = 2$, est égale à 3 u.a., donc l'aire sous la parabole sur l'intervalle [0 ; 4] est supérieure à $2 \times (3 + 1,5) = 9$ u.a.

11 Voir corrigé en fin de manuel.

12 **a.** $\int_{-2}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{2} f(t)\,dt = 3$

b. $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 2 \times \int_{0}^{2} f(t)\,dt = 6$

c. $\int_{2}^{10} f(t)\,dt = 2 \times \int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 12$

13 **a.** $0 \leqslant \int_1^2 f(x)\,dx \leqslant \int_1^2 2\,dx$ d'où $0 \leqslant \int_1^2 f(x)\,dx \leqslant 2$

b. $\int_2^5 1\,dx \leqslant \int_2^5 f(x)\,dx \leqslant \int_2^5 2\,dx$ d'où $3 \leqslant \int_2^5 f(x)\,dx \leqslant 6$

c. $0 \leqslant \int_1^3 f(x)\,dx \leqslant \int_1^3 2\,dx$ d'où $0 \leqslant \int_1^3 f(x)\,dx \leqslant 4$

14 **1.** Avec GeoGebra nous obtenons $\mathrm{I} \approx 1{,}5708$ avec un arrondi à 5 décimales.

2. Une équation de la courbe représentative de f est $y = \sqrt{1 - x^2}$ ce qui équivaut à : $y^2 = 1 - x^2$ et $y \geqslant 0$. Donc la courbe représentative de f est le demi-cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $y \geqslant 0$. C'est-à-dire le demi-cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon 1 situé au-dessus de l'axe des abscisses. Il en résulte que $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{2}$.

15 **Méthode des rectangles**

1. f est dérivable sur [0 ; 1] car $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 1 - x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto e^{1-x^2}$ est dérivable sur [0 ; 1] par composition et $x \mapsto x^2 e^{1-x^2}$ est dérivable sur [0 ; 1] comme produit de deux fonctions dérivables, donc f est dérivable sur [0 ; 1], d'où f est continue sur [0 ; 1].

Pour tout réel x dans [0 ; 1], $f'(x) = 2xe^{1-x^2}(1 - x^2)$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur [0 ; 1] et f croissante sur [0 ; 1].

2. $\dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f\left(\dfrac{k}{4}\right) \leqslant \mathrm{I} \leqslant \dfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} f\left(\dfrac{k}{4}\right)$, soit $0{,}39 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 0{,}65$

$\dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{4} f\left(\dfrac{k}{4}\right) \approx 0{,}39$ à 10^{-2} près par défaut et

$\dfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} f\left(\dfrac{k}{4}\right) \approx 0{,}65$ à 10^{-2} près par excès. L'amplitude

est égale à $\dfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} f\left(\dfrac{k}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f\left(\dfrac{k}{4}\right) = \dfrac{1}{4}(f(1) - f(0)) = \dfrac{1}{4}$.

3. a. $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant \mathrm{I} \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

b. $0{,}495 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 0{,}536$

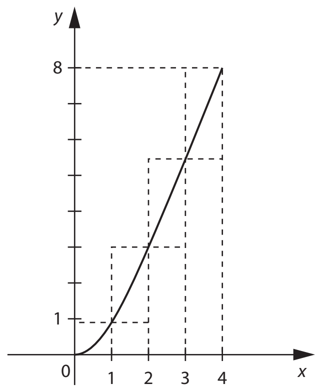
c. $\dfrac{1}{n} \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow n \geqslant 10^4$

Pour $n = 10^4$, $0{,}5149892998 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 0{,}5150891695$.

16 **Méthode des rectangles**

1. f est dérivable sur]0 ; 4] comme produit de deux fonctions dérivables sur]0 ; 4], et aussi dérivable à droite en 0 car, pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

Il en résulte que $f'(0) = 0$ et donc pour tout x dans [0 ; 4] on peut écrire $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur [0 ; 4] et f est croissante sur [0 ; 4].



2. I est l'aire de la partie du plan située sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses sur [0 ; 4].

a_4 est la somme des aires des quatre rectangles de bases égales à 1 situées sur l'axe des abscisses et de hauteurs respectives 0, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$, ces quatre rectangles sont situés sous la courbe.

b_4 est la somme des aires des quatre rectangles de bases 1 situées sur l'axe des abscisses et de hauteurs respectives $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$, ces quatre rectangles situés au-dessus de la courbe.

3. $a_4 = \dfrac{4}{4}\sum_{k=0}^{3} f\left(k\dfrac{4}{4}\right) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$

donc $a_4 \approx 9{,}02$ à 10^{-2} près par défaut.

De même $b_4 = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$.

Donc $b_4 \approx 17{,}03$ à 10^{-2} près par excès.

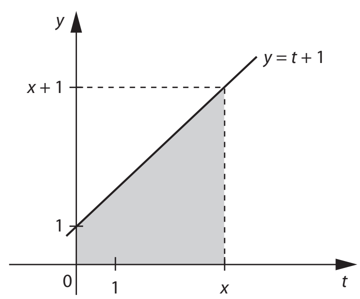
D'où $9{,}02 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 17{,}03$.

4. $a_{100} \approx 12{,}64$ à 10^{-2} près par défaut et $b_{100} \approx 12{,}97$ à 10^{-2} près par excès.

D'où $12{,}64 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 12{,}97$.

17 Voir corrigé en fin de manuel.

18 **1.**



$F(x)$ est l'aire du trapèze de bases 1 et $x + 1$ et de hauteur x situé sous le segment de droite d'équation $y = t + 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant x$.

2. $F(x) = \dfrac{1 + (x + 1)}{2}x = \dfrac{x^2 + 2x}{2}$.

3. $F'(x) = x + 1$, F est la primitive de f sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule en 0.

19 **1. a.** $G'(x) = 6x^2 - 4 = g(x)$

b. $G'(x) = 4\sin(x)\cos^2(x) - 2\sin^3(x)$
$= 4\sin(x) - 6\sin^3(x) = g(x)$

c. $G'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4} = g(x)$

d. $G'(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} = g(x)$

2. Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

a. $F(x) = 2x^3 - 4x + k$ **b.** $F(x) = 2\sin^2(x)\cos(x) + k$

c. $F(x) = \ln(x^2+4) + k$ **d.** $F(x) = \sqrt{3x^2+1} + k$

3. a. $H(x) = 2x^3 - 4x + 1$

b. $H(x) = 2\sin^2(x)\cos(x) + 1$

c. $H(x) = \ln(x^2+4) + 1 - \ln(4)$

d. $H(x) = \sqrt{3x^2+1}$

20 $F'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x)$

21 **a.** $F'(x) = (ax + a + b)e^x$; $a = 3$ et $b = -3$ suffit.

b. $F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
$= (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$;
$a = 1$, $b = 2 = c$ suffit.

c. $F'(x) = 2ax\ln(x) + x(a + 2b)$; $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{4}$ suffit.

22 **1.** $F'(x) = f(x)$ et $f(x) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$, donc F est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. $F(2) = \int_1^2 e^{-x^2}\,dx$, en utilisant GeoGebra on trouve $F(2) \approx 0{,}13526$ avec un arrondi à 5 décimales. $F(2)$ est l'aire de la partie du plan située sous la courbe et entre les deux drites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

23 **a.** et **b.** Voir corrigé en fin de manuel.

Dans **c.** et **d.**, k désigne une constante réelle.

c. $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{5}{3}x^3 - x^2 + x + k$

d. $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + k$

24 **c.** et **d.** Voir corrigé en fin de manuel.

Dans **a.** et **b.**, k désigne une constante réelle.

a. $\dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} + k$ **b.** $F(x) = x^2 - \ln(x) + k$

25 Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

a. $F(x) = 2\sqrt{x+5} + k$ **b.** $F(x) = \sqrt{2x+3} + k$

c. $F(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 4} + k$

d. $F(x) = 4\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{2}x + 6} + k$

26 On peut prendre le logiciel GeoGebra avec la saisie $f(x)$ = Dérivée [$F(x)$], la constante k étant inutile.

27 Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

a. $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \ln(x) - \dfrac{1}{x} + k$

$F(1) = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{2}$

b. $F(x) = 3\ln(x+2) + k$, $F(1) = 0 \Leftrightarrow k = -3\ln(3)$

c. $F(x) = \dfrac{-4}{x+1} + k$, $F(1) = 0 \Leftrightarrow k = 2$

d. $F(x) = \dfrac{-1}{3(x^2+1)^3} + k$, $F(1) = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{24}$

28 **a.** et **d.** Voir corrigé en fin de manuel.

Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

b. $F(x) = -e^{-x} + k$ **c.** $F(x) = \dfrac{-1}{3}e^{-3x+5} + k$

29 Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

a. $F(x) = \ln(e^x + 2) + k$ **b.** $F(x) = \dfrac{1}{3}(e^x + 3)^3 + k$

c. $F(x) = \dfrac{1}{6}(e^{-2x} + 3)^{-3} + k$ **d.** $F(x) = 2\sqrt{e^x + 1} + k$

30 Dans chaque réponse k désigne une constante réelle.

a. $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) + k$ **b.** $F(x) = -\dfrac{1}{3}\cos(3x+4) + k$

c. $F(x) = \ln(\sin(x) + 2) + k$ **d.** $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

d'où $F(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin(2x) + k$

31 Voir corrigé en fin de manuel.

32 **a.** 5 **b.** $\left[-\dfrac{3}{4x^4}\right]_4^1 = -\dfrac{765}{1\,024}$ **c.** $2e^2 - 2e - 7{,}5$

d. $\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{x+2}$

d'où $\displaystyle\int_1^e \dfrac{2x}{x+2}\,dx = [2x - 4\ln(x+2)]_1^e$
$= 2e - 4\ln(e+2) + 4\ln(3) - 2$

33 Voir corrigé en fin de manuel.

34 **a.** $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$ est une fonction impaire donc

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)\,dt = 0.$

b. $\displaystyle\int_1^2 \dfrac{3x}{\sqrt{2x+4}}\,dx = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\int_1^2 \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$;

$\dfrac{x}{\sqrt{x+2}} = \sqrt{x+2} - \dfrac{2}{\sqrt{x+2}}.$

Sur $]0 ; +\infty[$, $x \mapsto x\sqrt{x}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Donc on peut prendre sur $[1 ; 2]$ comme primitive de $x \mapsto \sqrt{x+2}$, $x \mapsto \dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}$,

d'où $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} - 4\sqrt{x+2}\right]_1^2$
$= -\frac{8}{3} + 2\sqrt{3}$

et $\int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{2x+4}}\,dx = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{8}{3} + 2\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{6} - 4\sqrt{2}$.

Si on avait demandé $\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{2x+4}}\,dx$, cela aurait donné $\left[3\sqrt{2x+4}\right]_1^2 = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{6}$.

c. $\int_1^2 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e)$

d. $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{e^x+1}\right]_{-1}^1 = \frac{e-1}{e+1}$

35 **a.** $\left[-\ln(e^{-x}+4)\right]_0^{\ln 2} = \ln\left(\frac{10}{9}\right)$

b. $\int_e^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_e^1 = -\frac{1}{2}$

c. $\left[2x + \frac{1}{3}\ln(3x+5)\right]_1^{-1} = -\frac{2}{3}\ln(2) - 4$

d. $\left[-\frac{1}{x^2+3x+10}\right]_1^{-3} = -\frac{1}{35}$

36 **a.** $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = -\left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^e = \frac{1}{2}$

b. $\left[\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \sqrt{3}$

c. $\left[\frac{1}{6}(2x^2-3)\sqrt{2x^2-3}\right]_2^3 = \frac{15\sqrt{15} - 5\sqrt{5}}{6}$

d. $\int_e^{2e} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_e^{2e} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = [\ln(\ln(x))]_e^{2e}$
$= \ln(1 + \ln(2))$.

37 La fonction f est continue sur [– 3 ; 4].

a. $\int_{-3}^4 f(t)\,dt = \int_{-3}^1 (2t-1)\,dt + \int_1^4 t\,dt$
$= [t^2 - t]_{-3}^1 + \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^4 = -4{,}5$

b. $\int_0^2 \max(1, t)\,dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 t\,dt = 2{,}5$

c. $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$
donc $\int_0^4 |x^2 - 4x + 3|\,dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx$
$+ \int_1^3 -(x^2 - 4x + 3)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3)\,dx = 4$

38 **Avec la linéarité**

1. $I(x) + J(x) = \int_0^x \cos^2(t)\,dt + \int_0^x \sin^2(t)\,dt$
$= \int_0^x (\cos^2(t) + \sin^2(t))\,dt = x$

$I(x) - J(x) = \int_0^x \cos^2(t)\,dt - \int_0^x \sin^2(t)\,dt$
$= \int_0^x (\cos^2(t) - \sin^2(t))\,dt = \int_0^x (\cos(2t)\,dt$
$= \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^x = \frac{1}{2}\sin(2x)$

2. $2I(x) = x + \frac{1}{2}\sin(2x)$ d'où $I(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$
$2J(x) = x - \frac{1}{2}\sin(2x)$ d'où $J(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$

39 Voir corrigé en fin de manuel.

40 **Famille d'intégrales**

1. À l'aide du graphique, on conjecture que la suite d'intégrales (I_n) est décroissante.

2. $I_n = -\left[\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^2 = \frac{1}{n}(e^{-2n} - 1)$

$x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ comme pour tout x de [0 ; 2] $-(n+1)\,x \leqslant -nx$ nous obtenons $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx}$ puis $\int_0^2 e^{-(n+1)x}\,dx \leqslant \int_0^2 e^{-nx}\,dx$, soit $I_{n+1} \leqslant I_n$ ce que le graphique permet de conjecturer. Lorsque n tend vers $+\infty$, $e^{-2n} = \frac{1}{e^{2n}}$ tend vers 0 et $\frac{1}{n}$ tend vers 0, donc I_n tend vers 0.

41 **a.** Positif **b.** Négatif **c.** Négatif
d. Positif **e.** Positif **f.** Négatif

42 **Fonction définie par une intégrale**

1. a. $F(x) \geqslant 0$ **b.** $F(x) \geqslant 0$ **c.** $F(x) \leqslant 0$

2. F est croissante sur [– 5 ; –3], décroissante sur [– 3 ; 1] et croissante sur [1 ; 2].

43 **1. a.** Sur [0 ; 1], $t^2 \leqslant t$ donc $-t^2 \geqslant -t$ et comme $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ on en déduit que pour tout réel t dans [0 ; 1], $e^{-t^2} \geqslant e^{-t}$

b. Comme $0 \leqslant 1$ et $e^{-t} \leqslant e^{-t^2}$, nous en déduisons par la propriété 4 que $\int_0^1 e^{-t}\,dt \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$

$\int_0^1 e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$.

Donc sur [0 ; 1], $1 - \frac{1}{e} \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$

2. Sur [1 ; 2], $t^2 \geqslant t$ donc $\int_1^2 e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_1^2 e^{-t}\,dt$

Comme $e^{-t^2} \geqslant 0$ et $1 \leqslant 2$, $0 \leqslant \int_1^2 e^{-t^2}\,dt \leqslant [-e^{-t}]_1^2$ soit $0 \leqslant \int_1^2 e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$.

44 Voir corrigé en fin de manuel.

45 **1. a.** f est dérivable sur [0 ; 1] comme quotient de deux fonctions dérivables. $f'(x) = \frac{(x-1)}{e^x(2-x)^2}$.

Donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;1]$ et f est décroissante sur $[0\,;1]$.

b. Par **a.** f est décroissante sur $[0\,;1]$, donc pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$ soit $\frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

2. a. $G'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$.

Il suffit donc de prendre $a = -1$ et $b = -3$.

Il en résulte $G(x) = -(x+3)e^{-x}$.

Il en résulte $J = \left[-(x+3)e^{-x}\right]_0^1 = 3 - \frac{4}{e}$.

b. Par **1.b.** $\frac{x^2}{e} \leqslant x^2 f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$, comme $0 \leqslant 1$ nous en déduisons $\int_0^1 \frac{x^2}{e}\,dx \leqslant K \leqslant \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx$, d'où $\frac{1}{3e} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$

c. $J + K = \int_0^1 4\frac{e^{-x}}{2-x}\,dx = 4I$

d. $I = \frac{J+K}{4}$ avec $J = 3 - \frac{4}{e}$ et $\frac{1}{3e} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$

d'où : $\frac{3}{4} - \frac{11}{12e} \leqslant I \leqslant \frac{19}{24} - \frac{1}{e}$, soit $0{,}41 \leqslant I \leqslant 0{,}43$

$I \approx \frac{0{,}41 + 0{,}43}{2}$ soit $I \approx 0{,}42$ à 10^{-2} près.

46 **1.** Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$, donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.

2. a. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$,

donc pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, si $k \leqslant x \leqslant k+1$

alors $\frac{1}{k+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{k}$.

b. Comme $k \leqslant k+1$, par **a.**,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

d'où $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{k}$.

c. Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ sur $[k\,;k+1]$, l'aire de la partie du plan sous la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ et au-dessus de l'axe des abscisses est comprise entre l'aire du rectangle de base $k+1-k=1$ et de hauteur $\frac{1}{k+1}$ et celle du rectangle de même base et de hauteur $\frac{1}{k}$.

3. De **2.b.**, on déduit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = u_{n+1} - 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n$ et par la relation de Chasles

$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$, d'où

$u_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant u_n$.

4. $\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$.

Il en résulte par **3.**, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \ln(n+1)$.

Comme $\ln(n+1)$ tend vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$, il en résulte que (u_n) tend vers $+\infty$.

47 **A.** Si $f \leqslant g$ sur $[0\,;1]$ alors $g - f \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$, donc d'après la propriété sur le signe d'une intégrale, comme $0 \leqslant 1$, $\int_0^1 (g-f)(x)\,dx \geqslant 0$, d'où, d'après la linéarité de l'intégration, $\int_0^1 g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \geqslant 0$, soit

$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 g(x)\,dx$

1. D'après le graphique, la suite (I_n) semble positive et décroissante.

2. a. Sur $[0\,;1]$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ (démonstration par récurrence), donc pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0\,;1]$, $1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$.

ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit

$\ln(1) \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln(2)$.

D'où, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0\,;1]$,

$0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln(2)$, et en appliquant **A.**,

$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 \ln(2)\,dx$ soit pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

b. Pour tout x dans $[0\,;1]$ et n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ d'où $0 \leqslant \ln(1+x^{n+1}) \leqslant \ln(1+x^n)$ et par **A.**, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

c. D'après **b.**, la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

3. g est dérivable sur $[0\,;1]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $[0\,;1]$: $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto -x$ et $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}$.

Comme $x \geqslant 0$, on en déduit $g'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;1]$ et g décroissante sur $[0\,;1]$.

b. g décroissante sur $[0\,;1]$ donc, pour tout x dans $[0\,;1]$, $g(1) \leqslant g(x) \leqslant g(0)$.

$g(0) = 0$, donc $g(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;1]$, d'où, pour tout x dans $[0\,;1]$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0\,;1]$, $0 \leqslant x^n \leqslant 1$

d'où $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$.

c. Par **A.** on déduit de **b.** $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$,

d'où $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Il en résulte pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0, donc par le théorème des « gendarmes » (I_n) converge vers 0.

48 **a.** $-\int_0^2 f(x)\,dx$

b. $-\int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$

c. $\int_2^3 (f(x)-g(x))\,dx$ **d.** $\int_1^2 (g(x)-f(x))\,dx$

e. $\int_{-1}^1 (g(x)-f(x))\,dx$

f. $\int_{-1}^2 (g(x)-f(x))\,dx + \int_2^3 (f(x)-g(x))\,dx$

49 Voir corrigé en fin de manuel.

50 **1.** $\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

2. $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Remarque : on peut aussi voir graphiquement que l'aire entre les deux courbes sur [0 ; 1] est égale à $\frac{1}{3}$. En effet, la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$ est la symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$ de la courbe d'équation $y=x^2$. L'aire de la partie du plan sous la courbe d'équation $y=x^2$ sur [0 ; 1] et au-dessus de l'axe des abcisses est égale $\int_0^1 x^2\,dx$, soit $\frac{1}{3}$, donc par symétrie l'aire de la partie du plan au-dessus de la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$ sur [0 ; 1] et en dessous de la droite d'équation $y=1$ est aussi égale à $\frac{1}{3}$.
Il en résulte que l'aire de la partie du plan comprise entre les deux courbes sur [0 ; 1] est $\frac{1}{3}$ de l'aire du carré de côté 1.

51 Si f est impaire alors $\int_{-2}^2 f(x)\,dx = 0$.

Si f est paire alors $\int_{-2}^2 f(x)\,dx = 2\int_0^2 f(x)\,dx = 6$.

52 **1.** I(a) est l'aire de la partie du plan située sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses sur [a ; 1].

2. $F(x)=\left(-\frac{x}{3}+\frac{4}{9}\right)e^{3x}$.

$I(a)=F(1)-F(a)=\frac{e^3}{9}-\left(-\frac{a}{3}+\frac{4}{9}\right)e^{3a}$.

3. a. $f(x)\,e^{3x}-\frac{1}{3}(3xe^{3x})$. Si on pose $X=3x$, lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers $-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Il en résulte que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y=0$ en $-\infty$.

b. $\lim\limits_{a\to-\infty} I(a)=\frac{e^3}{9}$. L'aire de la partie du plan sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses sur]$-\infty$; 1] est égale à $\frac{e^3}{9}$.

53 **a.** et **d.** Corrigés en fin de manuel.

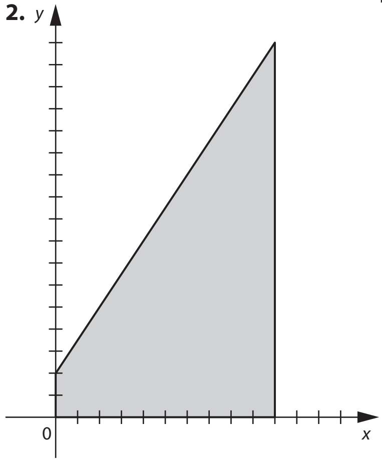
b. $\frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^x\,dx = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ **c.** $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \frac{2}{\pi}$

54 **1.** $F'(t)=5e^{-t}-f'(t)=5e^{-t}-(5e^{-t}-5te^{-t})$
$=5te^{-t}=f(t)$.

2. $\int_0^1 f(t)\,dt = F(1)-F(0)=5-\frac{10}{e}\approx 1{,}32$ à 0,01 près ;
$\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{F(2)-F(0)}{2} = 2{,}5-7{,}5e^{-2}$.
$2{,}5-7{,}5e^{-2}\approx 1{,}48$ à 0,01 près.

55 **1. a.** $v(t)=1{,}5t+2$ **b.** $x(t)=\frac{3}{4}t^2+2t$

2.



3. a. $\frac{2+17}{2}\times 10 = 95$

b. $\frac{1}{10}\int_0^{10} v(t)\,dt = \frac{x(10)-x(0)}{10} = \frac{95}{10} = 9{,}5$, c'est le calcul de la vitesse moyenne en m · s^{-1} sur la distance de 95 m parcourue en 10 s.

4. a. $\frac{x(b)-x(a)}{b-a} = 0{,}75(a+b)+2$.

b. $v\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0{,}75(a+b)+2$.

Le coefficient directeur de la tangente à la parabole d'équation $y=x(t)$ au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ est égal au coefficient directeur de la droite passant par les points A(a ; $x(a)$) et B(b ; $x(b)$).

56 **1.** Faux : en effet $\int_0^2 (x^2-1)\,dx = \frac{2}{3}$ mais $x\mapsto x^2-1$ n'est pas positive pour tout réel x dans [0 ; 2].

2. Faux : en effet $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} = \int_0^1 \frac{1}{3}\,dx$.

57 **1.** On calcule une primitive de $x\mapsto x^2+2ax$ par rapport à la variable x, ce qui donne $x\mapsto \frac{x^3}{3}+ax^2$ ou encore $x\mapsto \frac{3ax^2+x^3}{3}$.
Dans le résultat suivant, c'est le calcul d'une primitive de $a\mapsto x^2+2ax$ par rapport à la variable a ce qui donne $a\mapsto ax^2+a^2x$.

2. $I=\left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^2 = \frac{\ln^2(2)}{2}$

$J=\frac{\ln(x)}{x}\int_1^2 dt = \frac{\ln(x)}{x}$

58 Aire de la partie du plan située sous la courbe, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

59 $F(1) - F(0)$

60 La primitive de f qui s'annule en 1.

61 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b, c des réels de I :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Remarque : c'est le résultat de la propriété 3 page 238 du manuel.

62 Négatif.

63 f et g continues sur un intervalle I contenant a et b, $a \leqslant b$ et pour tout réel t dans I, $f(t) \leqslant g(t)$.

Remarque : C'est le résultat de la propriété 4 page 238 du manuel.

APPROFONDISSEMENT

79 **1.** $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = [\ln(e^x+1)]_0^1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$;

$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1+e^x}{e^x+1}\,dx = 1$ donc $I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

2. Par **1.**, $I_0 + I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ et pour $n \geqslant 1$,

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx$$
$$= \int_0^1 e^{nx}\frac{e^x+1}{e^x+1}\,dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1$$
$$= \frac{e^n-1}{n}.$$

3. a. Pour tout x dans $[0 ; 1]$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(n+1)x \geqslant nx$; $x \mapsto e^x$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, il en résulte que, pour tout x dans $[0 ; 1]$, $e^{(n+1)x} \geqslant e^{nx}$, puis comme $0 \leqslant 1$, $I_{n+1} \geqslant I_n$.

Donc la suite (I_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

b. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 \leqslant e^x \leqslant e$, donc $2 \leqslant e^x + 1 \leqslant e + 1$.

Il en résulte $\frac{1}{e+1} \leqslant \frac{1}{e^x+1} \leqslant \frac{1}{2}$. Comme pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout x dans $[0 ; 1]$, $e^{nx} > 0$, nous en déduisons $\frac{e^{nx}}{e+1} \leqslant \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leqslant \frac{e^{nx}}{2}$.

c. Par l'encadrement obtenu en **b.**, en intégrant pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{e+1}\cdot\frac{e^n-1}{n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}.\frac{e^n-1}{n}$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e+1}\frac{e^n-1}{n} = +\infty$.

Comme $I_n \geqslant \frac{1}{e+1}\cdot\frac{e^n-1}{n}$, il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

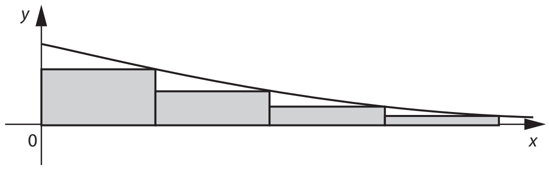
Pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{e+1}\cdot\frac{e^n-1}{ne^n} \leqslant \frac{I_n}{e^n} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{e^n-1}{ne^n}$;

$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^n-1}{ne^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n}\right)$.

$\lim\limits_{n\leftarrow+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\leftarrow+\infty} e^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\leftarrow+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$.

Il en résulte $\lim\limits_{n\leftarrow+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n}\right) = 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{e^{nx}}{e^x+1} \geqslant 0$, comme $0 \leqslant 1$ nous obtenons $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx \geqslant 0$, d'où $0 \leqslant \frac{I_n}{e^n} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{e^n-1}{ne^n}$. $\lim\limits_{n\leftarrow+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^n-1}{ne^n}\right) = 0$, donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0$.

80 **1.**



2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f(n+1)$, comme $f(n+1) = e^{-(n+1)}\ln(1 + e^{n+1})$, $f(n+1) \geqslant 0$ car $e^{n+1} > 0$ donc $1 + e^{n+1} > 1$, d'où $\ln(1 + e^{n+1}) > 0$ et $e^{-(n+1)} = \frac{1}{e^{n+1}}$ d'où $e^{-(n+1)} > 0$.

Donc (u_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}^*$.

3. a. $1 - \frac{e^t}{e^t+1} = \frac{e^t+1-e^t}{e^t+1} = \frac{1}{e^t+1}$, d'où

$\int_0^x \frac{1}{e^t+1}\,dt = [t - \ln(e^t+1)]_0^x = x - \ln(1+e^x) + \ln(2)$.

b. Pour $x > 0$, $f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}$;

$e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^{-x}e^x}{1+e^x} = \frac{e^0}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$.

Donc $f'(x) = -f(x) + \frac{1}{1+e^x}$.

c. Par **b.** $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x)$, donc

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{e^t+1}\,dt - \int_0^x f'(t)\,dt$, d'où

$F(x) = x - \ln(1+e^x) + \ln(2) - (f(x) - f(0))$.

Soit $F(x) = x - \ln(1+e^x) - e^{-x}\ln(1+e^x) + 2\ln(2)$.

4. a. D'après la représentation graphique de f, f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et pour tout réel t tel que $k - 1 \leqslant t \leqslant k$, $f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1)$ d'où, comme $k - 1 \leqslant k$,

$\int_{k-1}^k f(k)\,dt \leqslant \int_{k-1}^k f(t)\,dt$, soit $f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f(t)\,dt$.

b. $F(n) = \int_0^n f(t)\,dt = \sum\limits_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t)\,dt$ et d'après ce qui précède $\sum\limits_{k=1}^n f(k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t)\,dt$, d'où $u_n \leqslant F(n)$.

5. $F(n) = n - \ln(1 + e^n) - e^{-n} \ln(1 + e^n) + 2\ln(2)$

$= \ln(e^n) - \ln(1 + e^n) - e^{-n} \ln(1 + e^n) + 2\ln(2)$

$= \ln\left(\dfrac{e^n}{e^n+1}\right) - \dfrac{\ln(1+e^n)}{e^n} + 2\ln(2).$

$0 < \dfrac{e^n}{e^n+1} < 1$ donc $\ln\left(\dfrac{e^n}{e^n+1}\right) < 0$;

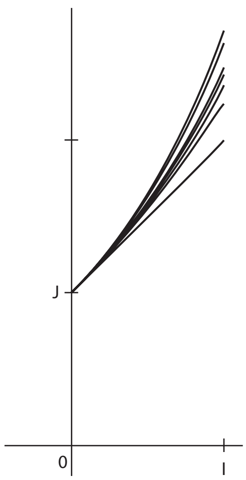
Ainsi $\ln\left(\dfrac{e^n}{e^n+1}\right) - \dfrac{\ln(1+e^n)}{e^n} < 0$, donc $F(n) \leqslant 2\ln(2)$.

Il en résulte que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant F(n) \leqslant 2\ln(2)$.
La suite (u_n) étant majorée par $2\ln(2)$ et croissante d'après **2**. est donc convergente.

81 **1.** $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}$, donc

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1.$

2. a. Tracés des courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4, \mathscr{C}_5, \mathscr{C}_{20}$ de $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_{20}$ avec $\mathscr{C}_k$ en dessous de $\mathscr{C}_p$ pour $k < p$ et de la courbe représentative de $x \mapsto e^x$ qui est la courbe située au-dessus de toutes les autres.



b. Quand n devient très grand l'allure de la courbe représentative de f_n semble être celle de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.

c. D'après **b.**, I_n tendrait vers $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$.

3. a. $F_n(x) = \dfrac{n}{n+1}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n+1}$;

$I_n = F_n(1) - F_n(0) = \dfrac{n}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \dfrac{n}{n+1}.$

Donc $I_n = \dfrac{n}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} - \dfrac{n}{n+1}$

$= \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} - \dfrac{n}{n+1}.$

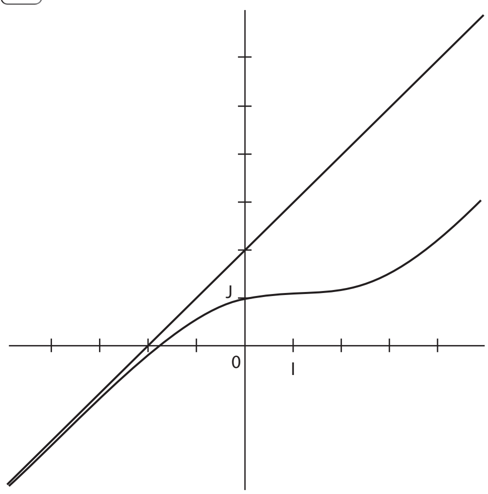
b. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}.$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0, donc d'après **1.**

$\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$ tend vers 1, d'où $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ tend vers e.

Comme $\dfrac{n}{n+1}$ tend vers 1, il en résulte que I_n tend vers $e - 1$.

82 **1.**



2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+3} = 4$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. $f(x) - (x+2) = -\dfrac{4e^x}{e^x+3}$, donc $f(x) - (x+2) < 0$ pour tout réel x. La courbe $\mathscr{C}$ est donc située en dessous de la droite d.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+3} = 4$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2) = -4$.

La droite d est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2) = -4$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x+2)+4) = 0$, soit

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x+2)+4) = 0$, c'est-à-dire

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2) = 0$.

La droite d' d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$
Remarque : d' est l'image de d par la translation de vecteur $-4\vec{j}$.

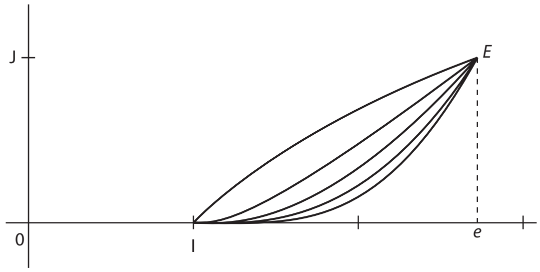
3. La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \ln(e^x + 3)$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

4. a. Pour $\lambda < 0$, $A(\lambda) = \int_\lambda^0 ((x+2) - f(x))\,dx$

$= \int_\lambda^0 \dfrac{4e^x}{e^x+3}\,dx = 4\int_\lambda^0 \dfrac{e^x}{e^x+3}\,dx = 4(G(0) - G(\lambda))$, d'où $A(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln(e^\lambda + 3)$.

b. $\lim_{\lambda \to -\infty} e^{\lambda} = 0$ donc $\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln 3$.

83 **1. a.** Tracés des courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4, \mathscr{C}_5$ représentant respectivement $x \mapsto [\ln(x)]^n$ pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ sur $[1 ; e]$.



b. u_n est l'aire de la partie du plan située sous la courbe représentative de $x \mapsto [\ln(x)]^n$ et au-dessus de l'axe des abscises sur $[1 ; e]$. D'après le graphique, on peut conjecturer que (u_n) est décroissante.

2. $u_{n+1} - u_n = \int_1^e \ln^n(x)(\ln(x) - 1)\,dx$.

Sur $[1 ; e]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$, donc $\ln^n(x)(\ln(x) - 1) \leqslant 0$.

Comme $1 \leqslant e$, il en résulte $\int_1^e \ln^n(x)(\ln(x) - 1)\,dx \leqslant 0$ et

donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

3. Sur $[1 ; e]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \ln^n(x) \leqslant 1$ et comme $1 \leqslant e$, on en déduit par intégration $0 \leqslant u_n \leqslant e - 1$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. Comme elle est minorée par 0, sa limite est positive ou nulle.

4. a. Pour tout réel x dans $[1 ; e]$,

$$F_n'(x) = \ln^{n+1}(x) + (n+1)\ln^n(x).$$

D'où $\int_1^e F_n'(x)\,dx = u_{n+1} + (n+1)u_n$.

Il en résulte $u_{n+1} + (n+1)\,u_n = F_n(e) - F_n(1) = e$.

b. D'après **a.**, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$.

c. Si la suite (u_n) a une limite $l > 0$ alors

$\lim_{n \to +\infty} (n+1)u_n = +\infty$ puis $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = -\infty$, ce qui est en contradiction avec $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

La limite l de (u_n) ne peut donc pas être strictement positive, donc $l \leqslant 0$.

d. Pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n$ donc la limite l de (u_n) est telle que $l \geqslant 0$, comme $l \leqslant 0$ d'après **c.**, il en résulte $l = 0$.

84 **1.** Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}}$.

Donc pour $0 < x < e^2$, $f'(x) > 0$, pour $x > e^2$, $f'(x) < 0$ et $f'(e^2) = 0$. Il en résulte que f est croissante sur $]0 ; e^2]$ et décroissante sur $[e^2 ; +\infty[$.

2. a. $8 > e^2$ donc, pour $k \geqslant 8$, f est décroissante sur $[k ; k+1]$. Il en résulte que, pour tout réel x dans $[k ; k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$, et comme $k \leqslant k+1$,

$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dx$,

c'est-à-dire $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$.

Pour tout $x \geqslant 8$, $f(x) \geqslant 0$, donc la courbe représentative de f est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[8 ; +\infty[$.

Pour $k \geqslant 8$, l'aire de la partie du plan située sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses, sur $[k ; k+1]$, est comprise entre l'aire du rectangle de base $(k+1) - k = 1$ et de hauteur $f(k+1)$ et celle du rectangle de même base et de hauteur $f(k)$.

b. On déduit de **a.** que

$$\sum_{k=8}^{n} f(k+1) \leqslant \sum_{k=8}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=8}^{n} f(k),$$

c'est-à-dire $u_{n+1} - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(x)\,dx \leqslant u_n$.

3. $g'(x) = \dfrac{1}{2} f(x)$ d'où $\int_8^{n+1} f(x)\,dx = \int_8^{n+1} 2g'(x)\,dx$, il en résulte $\int_8^{n+1} f(x)\,dx = 2(g(n+1) - g(8))$

$= 2\sqrt{n+1}(\ln(n+1) - 2) - 4\sqrt{2}(\ln(8) - 2)$.

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, donc

$\lim_{n \to +\infty} \int_8^{n+1} f(x)\,dx = +\infty$,

comme $\int_8^{n+1} f(x)\,dx \leqslant u_n$, nous obtenons $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

85 **1. a.** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ donc pour tout entier $k \geqslant 1$, si $k \leqslant x \leqslant k+1$, alors

$\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

b. Comme $k \leqslant k+1$ par intégration on déduit de **a.** que

$\int_k^{k+1} \dfrac{1}{k+1}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \dfrac{1}{k}\,dx$, d'où

$\dfrac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Comme $\int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)$.

nous obtenons $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

c. Pour tout entier $k \geqslant 1$ sur l'intervalle $[k ; k+1]$, l'aire de la partie du plan située sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses est comprise entre l'aire du rectangle de base $k + 1 - k = 1$ et de hauteur $\dfrac{1}{k+1}$ et le rectangle de même base et de hauteur $\dfrac{1}{k}$.

2. $S_1 - 1 = 0 = \ln(1)$ et $S_1 - \dfrac{1}{1} = 0$, donc l'encadrement est vrai pour $n = 1$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, comme $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx \leqslant \dfrac{1}{k}$, on en déduit

$\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$. D'où

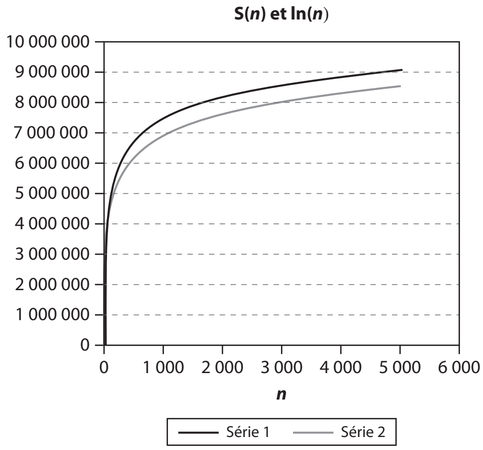
$S_n - 1 \leqslant \int_1^n \dfrac{1}{x}\,dx \leqslant S_n - \dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire

$S_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant S_n - \frac{1}{n}$,

il en résulte $\ln(n) + 1 \geqslant S_n \geqslant \ln(n) + \frac{1}{n}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

4. a.



La série 1 représente S_n et la série 2 représente $\ln(n)$.

Les suites (S_n) et $(\ln(n))$ ont la même allure pour n grand et la différence $S_n - \ln(n)$ tend à se stabiliser.

b. $u_{n+1} - u_n = (S_{n+1} - \ln(n+1)) - (S_n - \ln(n))$

$$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)).$$

Or d'après **1.b.**, on a pour tout $n \geqslant 1$,

$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

La suite (u_n) est donc décroisante sur $\mathbb{N}^*$.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, d'après **2.**, $\frac{1}{n} \leqslant S_n - \ln(n) \leqslant 1$.

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, la suite (u_n) est décroisante et minorée par 0, donc elle converge et comme,
pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, la limite γ de (u_n) est telle que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

5. a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \gamma$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \gamma$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right)$$
$$= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)),$$

or d'après **1.b.** pour tout entier $n \geqslant 1$,

$\frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \geqslant 0$, donc (v_n) est croissante.

c. (v_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$ et a pour limite γ donc, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma$.

(u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$ et a pour limite γ donc, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \gamma$. Il en résulte, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.

$u_n - v_n = \frac{1}{n}$, donc l'amplitude de l'encadrement est égal à $\frac{1}{n}$.

d. Pour $n \geqslant 10^4$, l'amplitude de l'encadrement est inférieure à 10^{-4}. On obtient $0{,}57718 \leqslant \gamma \leqslant 0{,}57725$.

86 **1. a.** Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $1 + e^{-x} > 1$, d'où $\ln(1 + e^{-x}) > 0$ et $e^x \ln(1 + e^{-x}) > 0$.

Donc $h(x) > 0$ pour tout x dans $[0 ; +\infty[$.

b. $H'(x) = h(x)$ donc H est stictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. a. Pour tout réel $t \geqslant 0$,

$h'(t) = e^t \ln(1 + e^{-t}) + e^t \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}} = h(t) - \frac{1}{1+e^{-t}}$,

ce qui revient à $h(t) = h'(t) + \frac{1}{1+e^{-t}}$.

b. $h(t) = h'(t) + \frac{1}{1+e^{-t}} = h'(t) + \frac{e^t}{1+e^t}$.

D'où $\int_0^x h(t)\,dt = \int_0^x \left(h'(t) + \frac{e^t}{1+e^t}\right) dt$

$$= \left[h(t) + \ln(1+e^t)\right]_0^x$$
$$= h(x) + \ln(1 + e^x) - 2\ln(2).$$

Il en résulte $H(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}) + \ln(1 + e^x) - 2\ln(2)$.

3. Pour tout réel x dans $[0 ; +\infty[$,

$e^x \ln(1 + e^{-x}) = \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\frac{1}{e^x}} = \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = 1$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$.

4. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) = +\infty$,

comme d'après **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$ et

$H(x) = h(x) + \ln(1 + e^x) - 2\ln(2)$, il en résulte

$\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = +\infty$.

b. Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$H(x) - x = h(x) - 2\ln(2) + \ln(1 + e^x) - \ln(e^x)$;

$\ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$, il en résulte

$\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) - x = 1 - 2\ln(2)$.

On en déduit que la droite d'équation $y = x + 1 - 2\ln(2)$ est asymptote à la courbe représentative de H en $+\infty$.

87 **A. Une formule générale**

1. uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$ d'où $u'v = (uv)' - uv'$.

2. Pour tous réels a, b dans I,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$
$$= [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$
$$= [(u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

B. Applications

1. a. En posant $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$,

$$\int_0^3 xe^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^3 - \int_0^3 e^x\,dx = 2e^3 + 1.$$

b. En posant $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = x$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\,dx = 1.$$

c. En posant $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$,

$$\int_1^e \ln(x)\,dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}\,dx = 1.$$

d. En posant $u(x) = e^x$ et $v(x) = 2x - 5$,

$$\int_{-1}^2 (2x-5)e^x\,dx = [(2x-5)e^x]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 2e^x\,dx$$
$$= \frac{9}{e} - 3e^2.$$

2. a. En posant $u(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = 1 - x$,

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-x}\,dx = [(x-1)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}.$$

b. $$\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}\,dx = [-(1-x)^{n+1}e^{-x}]_0^1$$
$$-\int_0^1 -(n+1)(1-x)^n(-e^{-x})\,dx$$
$$= 1 - (n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx.$$

D'où $$\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}\,dx$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$$

C'est-à-dire $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$.

b. $I_2 = \frac{1}{2!} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$; $I_3 = \frac{1}{3!} - I_2 = \frac{1}{e} - \frac{1}{3}$.

88 La fonction f étant continue et non constante sur l'intervalle $[a\,;b]$, elle ne peut être nulle sur $[a\,;b]$. Elle n'est ni strictement négative, ni strictement positive sur $[a\,;b]$ car sinon les primitives de F sur $[a\,;b]$ sont soit strictement croissantes, soit strictement décroissantes et nous n'aurions pas $F(a) = F(b)$ puisque $a < b$. Donc comme elle continue, elle s'annule au moins une fois sur $[a\,;b]$ et l'affirmation 4 « Die Funktion f besitzt im intervall I mindestens eine Nullstelle » est donc vraie.

89 **1.** Par la méthode des trapèzes avec $n = 8$, on obtient sur $[0\,;2]$ l'approximation suivante de I :

$$0{,}25\left[\frac{f(0)+f(2)}{2} + f(0{,}25) + f(0{,}5) + f(0{,}75) + f(1) + f(1{,}25) + f(1{,}5) + f(1{,}75)\right] \text{avec } f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Donc $I \approx 2{,}96$.

2. Sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{4}\,;\frac{k+1}{4}\right]$ pour k entier et $0 \leqslant k \leqslant 7$, le segment d'extrémités les points de coordonnées $\left(\frac{k}{4}\,;f\left(\frac{k}{4}\right)\right)$ et $\left(\frac{k+1}{4}\,;f\left(\frac{k+1}{4}\right)\right)$ est situé au-dessus de la courbe représentative de f, donc l'aire de chaque trapèze de bases $f\left(\frac{k}{4}\right)$ et $f\left(\frac{k+1}{4}\right)$ est supérieure à l'aire de la partie du plan située sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses. La somme des aires des huit trapèzes est donc supérieure à I.

Nous obtenons donc une approximation de I par excès.

3. Pour obtenir une meilleure approximation de I, il suffit de subdiviser $[0\,;2]$ en n sous-intervalles avec $n > 8$.

90 **1.** Si $t \mapsto x(t)$ est de période T, il en est de même pour $t \mapsto x^2(t)$, alors pour tout intervalle $[a\,;a+T]$ de longueur T, $\frac{1}{T}\int_a^{a+T} x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$,

donc X est indépendant de l'intervalle $[a\,;a+T]$ de longueur T choisi.

Remarque : soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de période T. Pour tout réel a, posons $g(a) = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors $g(a) = F(a+T) - F(a)$ et $g'(a) = f(a) - f(a) = 0$.

Il en résulte que g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel a, $g(a) = g(0) = \int_0^T f(t)\,dt$.

2. a. Pour tout réel t,

$u(t+T) = A\cos(\omega(t+T)) = A\cos(\omega t + \omega T)$.

Comme $\omega T = 2\pi$, il en résulte que, pour tout réel t,

$A\cos(\omega t + \omega T) = A\cos(\omega t + 2\pi) = A\cos(\omega t) = u(t)$.

Donc u est de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

b. Pour tout réel α, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, donc $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$.

c. $$\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\,dt$$
$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\alpha t)}{4}\right]_0^T = \frac{T}{2} \text{ d'où } X = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

d. $-1 \leqslant \cos(\omega t) \leqslant 1$, donc la valeur maximale $u(t)$ est égale à A. La valeur crête de u est donc égale à A. De même si on avait $u(t) = A\sin(\omega t)$. D'où le commentaire.

91 **1.** $W = \int_0^T R I_m^2 \sin^2(\omega t)\,dt$

2. a. $R I_e^2 T = \int_0^T R I_m^2 \sin^2(\omega t) dt$, d'où

$I_e^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t)\,dt.$

b. $\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right]_0^T = \frac{T}{2}$

car $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et $\sin^2(\omega t) = \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$.

Donc $W = R I_m^2 \frac{T}{2} = R I_e^2 T$. d'où $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

PROBLÈMES

92 **1.** $f'(x) = \frac{x e^x}{(1+x)^2}$, $f'(0) = 0$ et, pour tout x dans $]0 ; 1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

2. a. f étant croissante sur $[0 ; 1]$ pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 4$ et pour tout réel x tel que $\frac{k}{5} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{5}$
$f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k+1}{5}\right)$. D'où

$$\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k}{5}\right)dx \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k+1}{5}\right)dx.$$

C'est-à-dire $\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$.

L'aire de la partie du plan située sous la courbe représentative de f et au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left[\frac{k}{5} ; \frac{k+1}{5}\right]$ est comprise entre l'aire du rectangle de base $\frac{k+1}{5} - \frac{k}{5} = \frac{1}{5}$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{5}\right)$ et l'aire du rectangle de hauteur $f\left(\frac{k+1}{5}\right)$ et de même base.

b. De **a.** on en déduit

$$\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{k=4} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{k=4}\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{k=4} f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

c'est-à-dire : $\frac{1}{5}S_4 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}(S_5 - 1)$.

c. $S_5 \approx 6{,}8179$ à 10^{-4} près par excès.

Il en résulte $1{,}0917 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 1{,}1636$.

3. a. Pour tout réel x dans $[0 ; 1]$,

$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x^2)+x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$.

b. $\int_0^1 (1-x)e^x\,dx + \mathrm{I} = \int_0^1 (1-x)e^x\,dx + \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x}dx$

$$= \int_0^1 e^x\left(1 - x + \frac{x^2}{1+x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx.$$

c. $x \mapsto (ax+b)e^x$ a pour dérivée sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto (ax+a+b)e^x$, il suffit donc de prendre $a = -1$ et $b = 2$. Il en résulte que : $x \mapsto (-x+2)e^x$ est une primitive de $x \mapsto (1-x)e^x$ sur $[0 ; 1]$.

d. De **b.** on en déduit

$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx - \int_0^1 (1-x)e^x\,dx$

Par **c.** $\int_0^1 (1-x)e^x\,dx = [(2-x)e^x]_0^1 = e - 2$.

En utilisant l'encadrement obtenu en **2.c.,** on en déduit $0{,}37 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 0{,}45$.

93 **1. a.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

c. $f'(e) = 0$; si $0 < x < e$, $f'(x) > 0$; si $x > e$, $f'(x) < 0$.

Donc f est strictement croissante sur $]0 ; e]$ et strictement décroissante sur $[e ; +\infty[$.

2. a. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\ln^2(x) = +\infty$.

$$4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X} = 0$,

par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \frac{\ln(x)(2-\ln(x))}{x^2}$.

c.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

3. a. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x}(1-\ln(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$.

Donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points communs l'un de coordonnées $(1 ; 0)$ l'autre de coordonnées $\left(e ; \frac{1}{e}\right)$.

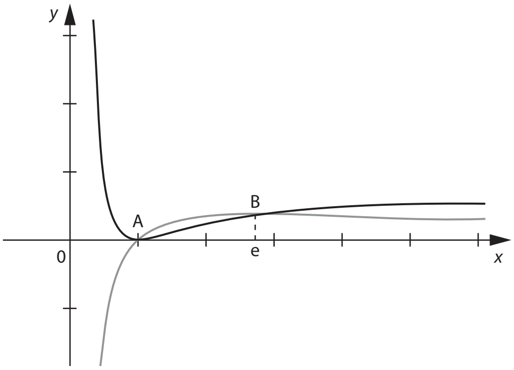
b. $f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x}(1-\ln(x)) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < e$;

$f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x}(1-\ln(x)) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ ou $x > e$.

Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]0 ; 1[$ et sur $]e ; +\infty[$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]1 ; e[$. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points A $(1 ; 0)$ et B$\left(e ; \frac{1}{e}\right)$.

c. $A = \int_1^e f(x)\,dx - \int_1^e g(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^e - \left[\frac{1}{3}\ln^3(x)\right]_1^e$

$= \frac{1}{6}$.



94 **1. a.** f est dérivable sur $[0\,;\,1]$ car $x \mapsto x^2+1$ est dérivable et strictement positive sur $[0\,;\,1]$.

Pour tout x dans $[0\,;\,1]$, $f'(x) = \dfrac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$, donc

$f'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;\,1]$. f est donc décroissante sur $[0\,;\,1]$.

b. K est l'aire de la partie du plan située sous la courbe représentative de f et au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0\,;\,1]$.

2. a. f étant décroissante sur $[0\,;\,1]$, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et pour tout réel x tel que

$\dfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+1}{n}$, $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, d'où

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dx \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx.$$

C'est-à-dire : $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{k}{n}\,;\,\dfrac{k+1}{n}\right]$, l'aire de la partie du plan située sous la courbe représentative de f et au-dessus de l'axe des abscisses est comprise entre l'aire du rectangle de base $\dfrac{k+1}{n} - \dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{n}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$ et l'aire du rectangle de même base et de hauteur $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

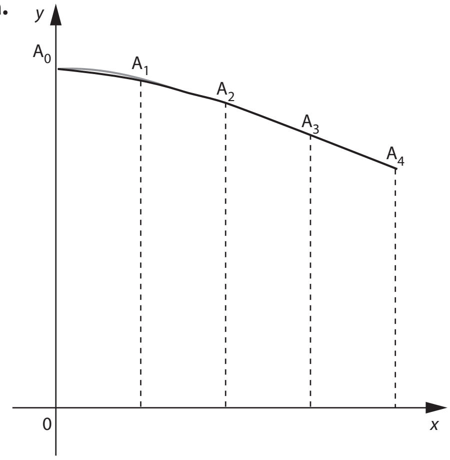
b. De **a.** nous en déduisons

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

soit $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \mathrm{K} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

c. Fichier sur le site Math'x.

3. a.



b. et **c.** Fichier sur le site Math'x.

Par la méthode des rectangles $0{,}878 \leqslant \mathrm{K} \leqslant 0{,}885$.

Par la méthode des trapèzes $\mathrm{K} \approx 0{,}881$.

4. $g'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$.

Donc g est une primitive de f sur $[0\,;\,1]$, d'où

$\mathrm{K} = [g(x)]_0^1 = g(1) - g(0) = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}881$.

Pour $n = 50$, la méthode des trapèzes donne une approximation à 10^{-3} près de K, meilleure que l'encadrement obtenu par la méthode des rectangles.

Remarque : $g(x) = \operatorname{argsh}(x)$ sur $[0\,;\,1]$.

95 **1.** D'après le graphique, on conjecture que f est positive, décroissante, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Pour tout réel x, $1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$ donc $2+\cos(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, $e^X > 0$ pour tout réel X donc $e^{1-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

3. a. $f'(x) = -e^{1-x}(\sin(x)+\cos(x)+2)$

b. $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(x)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x)+\sin(x)) = \cos(x)+\sin(x)$.

c. De **a.** et **b.** on en déduit

$f'(x) = -\sqrt{2}e^{1-x}\left(\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\right)$. Comme $\sqrt{2} > 1$ et $e^{1-x} > 0$ pour tout réel x, $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. a. Pour tout réel x, $1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$ donc $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{1-x}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ et par comparaison il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}=0$, comme $0\leqslant f(x)\leqslant 3e^{1-x}$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

La droite des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

5. D'après le tableau de variations de f, $f(x)$ varie de façon strictement décroissante et continue de $+\infty$ à 0.

$3\in]0\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$. $f(0{,}88)\leqslant 3\leqslant f(0{,}87)$, il en résulte $0{,}87\leqslant\alpha\leqslant 0{,}88$ où α désigne la solution de l'équation $f(x)=3$ dans $[0\,;+\infty[$.

6. a. Pour tout réel x, $f(x)=2e^{1-x}+\cos(x)e^{1-x}$, d'où

$$A=\int_0^1 2e^{1-t}\,dt+\int_0^1\cos(t)e^{1-t}\,dt$$

$$=\left[-2e^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1\cos(t)e^{1-t}\,dt$$

$$=2e-2+\int_0^1\cos(t)e^{1-t}\,dt.$$

b. $f'(t)=-\sin(t)e^{1-t}-\cos(t)e^{1-t}$;

$g'(t)=\cos(t)e^{1-t}-\sin(t)e^{1-t}$;

$\frac{1}{2}(g'(t)-f'(t))=f(t)$.

c. Il en résulte que $\frac{1}{2}(g(t)-f(t))$ est une primitive de $f:t\mapsto\cos(t)e^{1-t}$. Donc

$$\int_0^1\cos(t)e^{1-t}\,dt=\left[\frac{1}{2}(g(t)-f(t))\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(\sin(1)-\cos(1)+e),\text{ d'où}$$

$$A=\frac{1}{2}(\sin(1)-\cos(1)+e)+2e-2$$

$$=\frac{1}{2}(\sin(1)-\cos(1))+\frac{5}{2}e-2.$$

d. $A\approx 4{,}95$ à 10^{-2} près.

96 **1. a.** $\lim\limits_{x\to-\infty}1-x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$.

Donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$, d'où

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{1-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{1-x}=+\infty$.

b. $xe^{1-x}=e\dfrac{x}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}e\dfrac{x}{e^x}=0$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

$g(x)=\dfrac{e}{4}\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}$ 0 par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}$ 0, d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e}{4}\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2=0$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

c. f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à savoir $x\mapsto x$ et $x\mapsto e^{1-x}$ pour f, $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto e^{1-x}$ pour g.

$f'(x)=(1-x)\,e^{1-x}$ et $g'(x)=x(2-x)\,e^{1-x}$.

$f'(1)=0$, $f'(x)>0$ sur $]-\infty\,;1]$ et $f'(x)<0$ sur $]1\,;+\infty[$. f est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$ et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$.

$g'(x)<0$ sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ et $g'(x)>0$ sur $]0\,;2[$.

g est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, strictement croissante sur $[0\,;2]$, strictement décroissante sur $[2\,;+\infty[$. Il en résulte les tableaux de variations ci-dessous pour f et g.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

2. Calcul d'intégrales

a. $I_0=\left[-e^{1-x}\right]_0^1=e-1$.

b. $x\mapsto x^{n+1}e^{1-x}$ a pour dérivée $x\mapsto(n+1-x)x^ne^{1-x}$ (à recouper avec la dérivée de g).

D'où $\left[x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1=\int_0^1(n+1-x)x^ne^{1-x}\,dx$

$$=(n+1)I_n-I_{n+1}.$$

Soit $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.

c. Par **b.** $I_1=I_0-1=e-2$ et $I_2=2I_1-1=2e-5$.

3. Calcul d'une aire plane

Pour tout réel x, $f(x)-g(x)=(1-x)xe^{1-x}$.

Donc $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$.

Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ représentant respectivement les fonctions f et g ont donc deux points communs O(0 ; 0) origine du repère et A(1 ; 1).

Comme pour tout réel x, $e^{1-x}>0$, $f(x)-g(x)$ est du signe de $x(1-x)$. Donc sur $]-\infty\,;1[$ $f(x)-g(x)<0$ et $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}'$, sur $]0\,;1[$; $f(x)-g(x)>0$ et $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{C}'$, sur $]1\,;+\infty[$; $f(x)-g(x)<0$ et $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}'$.

b. $A=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 g(x)\,dx=I_1-I_2=3-e$.

4. Étude de l'égalité de deux aires

a. Avec les résultats donnés par le logiciel, comme par **3.a.**, $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}'$ sur $[1\,;a]$,

$S(a)=(5-2e^{1-a}-2ae^{1-a}-a^2e^{1-a})-(2-ae^{1-a}-e^{1-a})$
$\quad=3-e^{1-a}-ae^{1-a}-a^2\,e^{1-a}.$

b. $S(a) = \text{A} \Leftrightarrow 3 - e^{1-a} - ae^{1-a} - a^2\, e^{1-a} = 3 - e$

c'est-à-dire $e = (a^2 + a + 1) \times e \times e^{-a}$, ce qui revient à $1 = (a^2 + a + 1)\, e^{-a}$ soit en multipliant par e^a (e^a étant non nul pour tout réel a) les deux membres de l'égalité, nous en déduisons $e^a = a^2 + a + 1$.

c. Considérons la fonction h définie sur $[1\,;+\infty[$ par

$$h(a) = e^a - a^2 - a - 1.$$

Méthode 1

$h'(a) = e^a - 2a - 1$; $h''(a) = e^a - 2$.

Pour $a \geqslant 1$, $e^a \geqslant e^1 > 2$ donc $h''(a) > 0$ sur $[1\,;+\infty[$,

h' est donc strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$,

$h'(1) = e - 3$, $h'(a) = e^a\left(1 - 2\dfrac{a}{e^a} - \dfrac{1}{e^a}\right)$,

comme $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{a}{e^a} = 0$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{1}{e^a} = 0$, il en résulte que $\lim\limits_{a\to+\infty} h'(a) = \lim\limits_{a\to+\infty} e^a = +\infty$, il en résulte que $h'(a)$ varie continûment de façon strictement croissante de $e - 3$ à $+\infty$. Comme $e - 3 < 0$, il existe un unique réel $\alpha > 1$ tel que $h'(\alpha) = 0$.

Par approximations successives on obtient

$1{,}256 < \alpha < 1{,}257$.

Sur $[1\,;\alpha[$, $h'(\alpha) < 0$ et, sur $]\alpha\,;+\infty[$, $h'(\alpha) > 0$.

h est donc strictement décroissante sur $[1\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$. h admet un minimum en α et $h(\alpha) \approx -0{,}3$. $h(1) = e - 3$ et $e - 3 < 0$.

Donc $h(a) < 0$ sur $[1\,;\alpha]$ et ne s'annule pas sur $[1\,;\alpha]$.

$h(a) = e^a\left(1 - \dfrac{a^2}{e^a} - \dfrac{a}{e^a} - \dfrac{1}{e^a}\right)$.

Les résultats du cours donnent $\lim\limits_{a\to+\infty} e^a = +\infty$,

$\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{a}{e^a} = 0$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{1}{e^a} = 0$.

$\dfrac{a^2}{e^a} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\frac{a}{2}}{e^{\frac{a}{2}}}\right)^2$ $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{a}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{\frac{a}{2}}{e^{\frac{a}{2}}} = 0$. Il en résulte que la fonction

$a \mapsto \dfrac{a^2}{e^a} - \dfrac{a}{e^a} - \dfrac{1}{e^a}$ a pour limite 0 en $+\infty$ et que

$\lim\limits_{a\to+\infty} h(a) = +\infty$.

h varie donc continûment de façon strictement croissante de $h(\alpha) \approx -0{,}3$ à $+\infty$.

$0 \in\,]h(\alpha)\,;+\infty[$, donc il existe un unique réel a dans $]\alpha\,;+\infty[$ tel que $h(a) = 0$. Par approximations successives $1{,}793 \leqslant a \leqslant 1{,}794$.

Comme pour $a > 1$, $S(a) = \text{A} \Leftrightarrow h(a) = 0$, nous en déduisons que $S(a) = \text{A}$ pour un unique réel a tel que $1{,}793 \leqslant a \leqslant 1{,}794$.

Méthode 2

On peut aussi représenter avec un logiciel (GeoGebra par exemple) les courbes représentatives de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2 + x + 1$ sur $[0\,;+\infty[$ et demander les points d'intersection de ces deux courbes. Nous obtenons deux points A(0 ; 1) et B(1,7933 ; 6,0091), en prenant comme option : arrondi à 4 décimales.

Comme $a > 1$, seul B convient et $a \approx 1{,}7933$.

On peut aussi représenter graphiquement sur GeoGebra la courbe représentative de $h : x \mapsto e^x - x^2 - x - 1$ sur $[0\,;+\infty[$ et demander les points d'intersection de la courbe représentative de h et de l'axe des abscisses. Nous obtenons O(0 ; 0) origine du repère et A(1,7933 ; 0) en prenant l'option : arrondi à 4 décimales.

Comme $a > 1$, $a \approx 1{,}7933$.

Méthode 3

Avec un logiciel de calcul formel résoudre l'équation $h(a) = 0$ pour $a > 1$.

97 **A. 1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 3x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f(x) = \left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)x^2e^x$.

$x^2e^x = 4\left(\dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0$.

Il en résulte $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$,

comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$,

nous en déduisons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ et $x \mapsto e^x$.

Pour tout réel x, $f'(x) = (x^2 - x - 2)e^x$.

$f'(x)$ est du signe de $x^2 - x - 2$ car $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$x^2 - x - 2$ a pour racines -1 et 2.

Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$.

Sur $]-\infty\,;-1[$, $f'(x) > 0$. Sur $]-1\,;2[$, $f'(x) < 0$.

Sur $]2\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

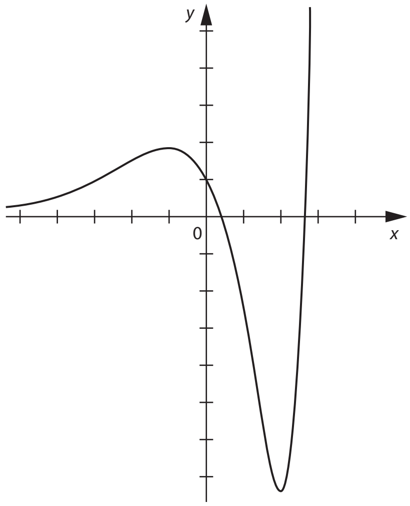
Donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$,

f est strictement décroissante sur $[-1\,;2]$, f est strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$.

D'où le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{5}{e}$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

b.



3. a. A est l'aire de la partie du plan située sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscises sur [– 3 ; 0].

b. $\alpha = 1$, $\beta = -5$ et $\gamma = 6$.

c. $\mathrm{I} = \left[(x^2 - 5x + 6)e^x\right]_{-3}^{0} = 6 - 30e^{-3} \approx 4{,}51$.

B. 1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + ax + b$ suivie de $x \mapsto e^x$.

Pour tout réel x, $g'(x) = (2x + a)e^{x^2+ax+b}$.

Comme $e^{x^2+ax+b} > 0$ pour tout réel x,

$g'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3 + a = 0$, soit $a = -3$.

$g\left(\dfrac{3}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + b = -\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow b = 1.$

Conclusion : Pour tout réel x, $g(x) = e^{x^2-3x+1}$.

3. a. Pour tout réel x,

$(3 - x)^2 - 3(3 - x) + 1 = (x^2 - 6x + 9) + 3x - 8 = x^2 - 3x + 1$

donc $e^{(3-x)^2-3(3-x)+1} = e^{x^2-3x+1}$, c'est-à-dire

$h(3 - x) = h(x)$ pour tout réel x.

Pour tout réel x, les points $\mathrm{A}(3 - x\,;h(3 - x))$ et $\mathrm{A}'(x\,;h(x))$ ont pour milieu $\mathrm{I}\left(\dfrac{3-x+x}{2}\,;\dfrac{h(3-x)+h(x)}{2}\right)$.

Comme $h(3 - x) = h(x)$, nous obtenons $\mathrm{I}\left(\dfrac{3}{2}\,;h(x)\right)$.

Donc A et A′, points de la courbe Γ, sont tels que le milieu de [AA′] est situé sur la droite Δ d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}\begin{pmatrix}2x-3\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$qui est un vecteur directeur de la droite Δ. A et A′ sont donc symétriques par rapport à Δ. Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, A et A′ décrivent Γ, la droite Δ est donc un axe de symétrie de Γ.

b. $h(3{,}1) < 5 < h(3{,}2)$. Comme $h = g$, dans $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$, h est continue et strictement croissante, donc $h(x)$ prend toutes les valeurs de l'intervalle

$$\left[h\left(\frac{3}{2}\right);\ \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[= \left[e^{-\frac{5}{4}}\,;+\infty\right[.$$

Comme $5 \in \left[e^{-\frac{5}{4}}\,;+\infty\right[$, l'équation $h(x) = 5$ a une solution unique dans $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

Comme $h(3{,}1) < 5 < h(3{,}2)$, 3,2 est bien une solution approchée à 10^{-1} de l'équation $h(x) = 5$.

c. Il en résulte $|x_0 - 1{,}7| \leqslant 0{,}5$, soit $1{,}2 \leqslant x_0 \leqslant 2{,}2$.

Or h est strictement décroissante sur [1,2 ; 1,5] et strictement croissante sur [1,5 ; 2,2], donc sur [1,2 ; 2,2], $h(1{,}5) = e^{-\frac{5}{4}}$ avec $e^{-\frac{5}{4}} \approx 0{,}28$ à 10^{-2} près par défaut est un minimum. $h(1{,}2) \approx 0{,}31$ et $h(2{,}2) \approx 0{,}47$ à 10^{-2} près par excès, il en résulte $0{,}28 \leqslant h(x_0) \leqslant 0{,}47$.

C. 1. v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la composée de $x \mapsto u(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ suivie de $x \mapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $v_1'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Comme $e^{u(x)} > 0$, pour tout réel x, $v_1'(x)$ et $u'(x)$ sont de même signe. D'après le tableau de variations de u, il en résulte que v_1 est strictement décroissante sur $]-\infty\,;a]$ et strictement croissante sur $[a\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$,

donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{u(x)} = +\infty$, soit

$\lim\limits_{x\to-\infty} v_1(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$,

donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{u(x)} = +\infty$, soit

$\lim\limits_{x\to+\infty} v_1(x) = +\infty$.

v_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ suivie de $x \mapsto u(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $v_2'(x) = e^x\,u'(e^x)$.

Comme $e^x > 0$, $v_2'(x)$ est du signe de $u'(e^x)$ avec e^x décrivant l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} v_2(x) = u(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v_2(x) = +\infty$.

Sur $]-\infty\,;\ln(a)]$, $u'(e^x) \leqslant 0$ car u dérivable et décroissante sur $[0\,;a]$, donc v_2 est décroissante sur $]-\infty\,;\ln(a)]$.

Sur $[\ln(a)\,;+\infty[$, $u'(e^x) \geqslant 0$ car u dérivable et croissante sur $[a\,;+\infty[$, donc v_2 est croissante sur $[\ln(a)\,;+\infty[$.

2. v_3 est croissante sur $[b\,;+\infty[$ car u et $x \mapsto e^x$ sont croissantes et positives sur $[b\,;+\infty[$.

Sur $]-\infty\,;a]$, on ne peut pas conclure car u ne garde pas un signe constant.

Sur $[a\,;b]$, u est croissante et négative donc si

$a \leqslant x_2 < x_1 \leqslant b$ alors $\begin{cases} u(x_2) \leqslant u(x_1) \\ e^{x_2} \leqslant e^{x_1} \end{cases}$

$u(x_2)\,e^{x_2} \leqslant u(x_1)\,e^{x_2}$, mais $u(x_1)\,e^{x_2} \geqslant u(x_1)e^{x_1}$ car $u(x_1) \leqslant 0$, donc on ne peut pas conclure.

98 **A. 1.** $f : t \mapsto (at + b)e^t$ est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0 ; 1]$ $t \mapsto at + b$ et $t \mapsto e^t$.

$f'(t) = ae^t + (at + b)e^t = (at + a + b)e^t$

Pour que pour tout réel t de $[0 ; 1]$, $(at + a + b)e^t = (1 - t)e^t$, il suffit que $a = -1$ et $b = 2$.

Donc $t \mapsto (2 - t)e^t$ est une primitive de $t \mapsto (1 - t)e^t$ sur $[0 ; 1]$.

$u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t\, dt = [(2-t)e^t]_0^1 = e - 2.$

2 • Avec la première calculatrice, (u_n) semble diverger vers $-\infty$.

• Avec la deuxième calculatrice, (u_n) semble diverger vers $+\infty$.

B. 1. Sur $[0 ; 1]$, $1 - t \geqslant 0$ et $e^t > 0$, donc quel que soit l'entier naturel $n \geqslant 1$, $(1 - t)^n e^t \geqslant 0$ sur $[0 ; 1]$.

Par la propriété 4 page 238, positivité de l'intégration, comme $0 \leqslant 1$, $\int_0^1 (1-t)^n e^t\, dt \geqslant 0$, d'où pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$.

2. a. $t \mapsto e^t$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$ on a $1 \leqslant e^t \leqslant e$ puis comme $(1 - t)^n \geqslant 0$, car $0 \leqslant t \leqslant 1$, nous en déduisons $(1 - t)^n e^t \leqslant (1 - t)^n e$.

b. Il en résulte comme $0 < 1$,

$\int_0^1 (1-t)^n e^t\, dt \leqslant \int_0^1 e(1-t)^n\, dt.$

$e\int_0^1 (1-t)^n\, dt = e\left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}.$

Donc $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

Soit $u_n \geqslant 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

C. 1. Pour tout réel t dans $[0 ; 1]$

$g'(t) = -(n+1)(1 - t)^n e^t + (1 - t)^{n+1}e^t$, d'où

$(1 - t)^{n+1}e^t = g'(t) + (n+1)(1 - t)^n e^t$

Il en résulte

$\int_0^1 (1-t)^{n+1}e^t\, dt = \int_0^1 g'(t)\, dt + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t\, dt$

Donc $u_{n+1} = g(1) - g(0) + (n+1)\, u_n = (n+1)\, u_n - 1$.

2. a. • $v_1 = a$ et

$u_1 + 1!(a + 2 - e) = (e - 2) + a + 2 - e = a$, la relation de récurrence est donc vraie pour $n = 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ si $v_n = u_n + n!(a + 2 - e)$

alors $v_{n+1} = (n + 1)(u_n + n!(a + 2 - e)) - 1$

$= (n + 1)u_n - 1 + (n + 1)!(a + 2 - e)$

$= u_{n+1} + (n + 1)!(a + 2 - e)$.

D'après le principe de réccurence, on peut conclure que pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = u_n + n!(a + 2 - e).$$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après **B.3.**

• Si $a < e - 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n!(a + 2 - e) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$;

• si $a > e - 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n!(a + e - 2) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$;

• si $a = e - 2$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $n!(a + 2 - e) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c. D'après **b.** Pour la première calculatrice, le calcul approché de u_1 est inférieur à $e - 2$ et alors la suite (u_n) devient une suite (v_n) dont le premier terme a est tel que $a < e - 2$.

Pour la deuxième calculatrice, le calcul approché de u_1 est supérieur à $e - 2$.

99 Pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$, car d'après la courbe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$;

$f'(1) = 0$ et $f(1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}.$

Conclusion : pour tout réel x, $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$.

Donc l'aire de la partie colorée est égale à

$\int_0^{1+\sqrt{2}} (-x^2 + 2x + 1)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^{1+\sqrt{2}}$ soit $\frac{5 + 4\sqrt{2}}{3}$.

100 f est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = 3x^2 - 16x + 20$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = \frac{10}{3}$.

Donc $A(2 ; 16)$ et $B\left(\frac{10}{3} ; \frac{400}{27}\right)$, $N\left(\frac{10}{3} ; 0\right)$.

Soit $C(2 ; 0)$. L'aire de la partie colorée est égale à la somme de l'aire de la partie du plan située sous la courbe et au-dessus de l'axe de l'abscisses sur $[0 ; 2]$ et de l'aire du triangle ACN rectangle en C.

Soit $\int_0^2 (x^3 - 8x^2 + 20x)\, dx + 8\left(\frac{10}{3} - 2\right)$

$\int_0^2 (x^3 - 8x^2 + 20x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 10x^2\right]_0^2 = \frac{68}{3}$

Il en résulte que aire$(\mathscr{R}) = \frac{68}{3} + \frac{32}{3} = \frac{100}{3}$.

101 On approche la valeur moyenne de f en divisant par 1 000 la somme des aires des 5 trapèzes T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 de hauteur 200, et de bases 300 et 226 pour T_1, 226 et 187 pour T_2, 187 et 181 pour T_3, 181 et 209 pour T_4, 209 et 270 pour T_5.

Une estimation de la hauteur h à laquelle on nivelle le terrain est alors $h \approx 217{,}6$.

102 $V = \int_0^2 \pi x^4\,dx - \int_0^1 \pi x^4\,dx = \int_1^2 \pi x^4\,dx = \left[\pi \frac{x^5}{5}\right]_1^2$

$= \frac{31\pi}{5} \approx 19{,}5.$

103 $f(0) = 0$ et $f(4) = 0 \Leftrightarrow f(x) = a(x^2 - 4x)$.

$f'(2) = 0$, donc la parabole a pour sommet le point S $(2\,;f(2))$, Comme S est au-dessus de la droite d'équation $y = \frac{5}{3}$, $f(2) > \frac{5}{3}$ et $f(2) > \frac{5}{3} \Leftrightarrow -4a > \frac{5}{3} \Leftrightarrow a < -\frac{5}{12}$.

Posons $f_a(x) = ax^2 - 4ax$ pour tout réel x et $a < -\frac{5}{12}$.

Remarque :

pour $a = -\frac{5}{12}$, la droite d'équation $y = \frac{5}{3}$ est tangente à la parabole d'équation $y = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{5}{3}x$ en son sommet de coordonnées $\left(2\,;\frac{5}{3}\right)$.

Pour $a < -\frac{5}{12}$, l'équation $f_a(x) = \frac{5}{3}$ a deux solutions l'une α dans$]0\,;2[$, l'autre β dans $]2\,;4[$ avec $\frac{\alpha+\beta}{2} = 2$ car la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie pour la parabole d'équation $y = f(x)$.

$f_a(x) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow ax^2 - 4ax - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{a}$ ou $x = 2 - \frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{a}$.

Remarque :

comme $a < -\frac{5}{12}$, $0 < 4a^2 + \frac{5a}{3} < 4a^2$ et

$0 < 2 + \frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{a} < 2$;

$\frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{a} = -\frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{-a} = -\frac{\sqrt{4a^2 + \frac{5a}{3}}}{\sqrt{a^2}} = -\sqrt{4 + \frac{5}{3a}}$

Donc $\alpha(a) = 2 - \sqrt{4 + \frac{5}{3a}}$ et on a bien $0 < \alpha(a) < 2$.

L'aire de la partie du plan colorée est égale à $\int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right)dx$.

Par raison de symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$, $\int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right)dx = 2\int_{\alpha(a)}^{2} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right)dx$.

Donc $\int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right)dx = 4 \Leftrightarrow \int_{\alpha(a)}^{2} \left(f_a(x) - \frac{5}{3}\right)dx = 2$.

Posons $g_a(x) = f_a(x) - \frac{5}{3}$.

Si $a_2 < a_1 < -\frac{5}{12}$, pour tout x dans $[0\,;2]$,

$g_{a_1}(x) - g_{a_2}(x) = (a_1 - a_2)(x^2 - 4x)$.

Sur $]0\,;2]$, $x^2 - 4x < 0$ donc, comme $a_1 - a_2 > 0$,

$g_{a_1}(x) - g_{a_2}(x) < 0$ sur $]0\,;2]$ et $g_{a_1}(0) - g_{a_2}(0) = 0$.

$a \mapsto \alpha(a) = 2 - \sqrt{4 + \frac{5}{3a}}$ est dérivable sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$ car la fonction $a \mapsto 4 + \frac{5}{3a}$ est dérivable sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$ et y est strictement positive.

$\alpha'(a) = \frac{5}{6a^2\sqrt{4 + \frac{5}{3a}}}$ donc $\alpha'(a) > 0$,

$a \mapsto \alpha(a)$ est donc strictement croisante sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$, d'où $\alpha(a_2) < \alpha(a_1)$.

Comme $g_{a_1}(x) < g_{a_2}(x)$ sur $]0\,;2]$ et $\alpha(a_2) < \alpha(a_1)$ avec $0 < \alpha(a_2) < \alpha(a_1) < 2$ et $g_{a_2}(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha(a_2)\,;2]$ et $g_{a_1}(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha(a_1)\,;2]$.

$\int_{\alpha(a_1)}^{2} g_{a_1}(x)\,dx < \int_{\alpha(a_1)}^{2} g_{a_2}(x)\,dx \leqslant \int_{\alpha(a_2)}^{2} g_{a_2}(x)\,dx$

Donc la fonction $a \mapsto \int_{\alpha(a)}^{2} g_a(x)\,\mathrm{d}x$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$.

Posons $I(a) = \int_{\alpha(a)}^{2} g_a(x)\,dx$

$x \mapsto G_a(x) = a\frac{x^3}{3} - 2ax^2 - \frac{5}{3}x$ est une primitive de $x \mapsto g_a(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$I(a) = G_a(2) - G_a(\alpha(a))$

$= -7a - \frac{a}{3}(\alpha(a))^3 + 2a(\alpha(a))^2 + \frac{5}{3}\alpha(a)$.

$a \mapsto a$ et $a \mapsto \alpha(a)$ sont continues sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$ donc $a \mapsto I(a)$ est continue sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$, de même que $a \mapsto 2I(a)$.

$a \mapsto 2I(a)$ est donc une fonction continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$.

$2I(-1) \approx 4{,}7$ et $2I(-0{,}5) \approx 0{,}4$.

$4 \in [0{,}4\,;4{,}7]$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de $a \mapsto 2I(a)$, il existe un unique réel a dans $\left]-\infty\,;-\frac{5}{12}\right[$ tel que $2I(a) = 4$ avec $-1 < a < -0{,}5$.

En utilisant un logiciel de calcul formel (par exemple GeoGebra) par approximations successives nous obtenons :

$2I(-0{,}923) \approx 4{,}00015$ et $2I(-0{,}922) \approx 3{,}99045$. Donc a tel que $-0{,}923 \leqslant a \leqslant -0{,}922$ est une valeur approchée à

10^{-3} près de la solution de $\int_{\alpha(a)}^{4-\alpha(a)}\left(f_a(x)-\frac{5}{3}\right)dx = 4$ et, pour tout réel x,

$f_a(x) = ax^2 - 4ax$ est une valeur approchée de $f(x)$.

104 $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ et $a < b$ donc

$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f'(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$ c'est-à-dire

$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

105 **1.** Pour tout réel x dans $[a\,;b]$, $-f(x) \leqslant |f(x)|$ et $f(x) \leqslant |f(x)|$ donc $|f(x)| \geqslant f(x) \geqslant -|f(x)|$.

2. Il en résulte que, pour $a \leqslant b$,

$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b -|f(x)|\,dx$ soit

$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Comme $|f(x)| \geqslant 0$ et $a \leqslant b$, $\int_a^b |f(x)|\,dx \geqslant 0$.

Sachant que pour tout réel X et tout réel $A \geqslant 0$,
$|X| \leqslant A \Leftrightarrow -A \leqslant X \leqslant A$, nous en déduisons
$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

106 **1.** $\int_{-1}^1 x\,dx = 0$ et $x \mapsto x$ n'est pas la fonction nulle.

2. a. $F' = f$ donc F' est positive sur $[a\,;b]$ et F est croissante sur $[a\,;b]$.

b. Par **a.** pour tout réel x dans $[a\,;b]$, $F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)$.
Comme $\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow F(b) = F(a)$, il en résulte que, pour tout réel x dans $[a\,;b]$, $F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(a)$, c'est-à-dire, pour tout réel x de $[a\,;b]$, $F(x) = F(a)$.
F est donc constante sur $[a\,;b]$.

c. F constante sur $[a\,;b]$. Donc $0 = F' = f$ sur $[a\,;b]$.

Accompagnement personnalisé

1 Calculer une intégrale

$A = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{e^4 - e}{2}$ (forme utilisée $u'e^u$).

$B = \left[\frac{3}{16}(2x^2-4)^4\right]_0^1 = -45$ (forme utilisée $u'u^n$).

$C = \left[-\frac{1}{12(2x^3+1)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{27}$ (forme utilisée $u'u^{-n}$).

$D = [\ln(x^2+4)]_0^1 = \ln(5) - \ln(4) = \ln(1{,}25)$
(forme utilisée $\frac{u'}{u}$).

$E = [\ln(\ln(x)]_2^5 = \ln(\ln(5) - \ln(\ln(2)$ (forme utilisée $\frac{u'}{u}$).

$F = \left[3\sqrt{2x+4}\right]_{-1}^{1} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ (forme utilisée $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$).

$G = \left[\frac{1}{3}(e^x+1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(e+1)^3 - \frac{8}{3}$ (forme utilisée $u'u^n$).

$H = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = -\frac{1}{2}$ (forme utilisée $u'u^n$).

$I = \left[\frac{1}{2}\sin^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$ (forme utilisée $u'u^n$).

$J = \left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^2 = 2e^{\sqrt{2}} - 2e$ (forme utilisée $u'e^u$).

2 Majorer, minorer, encadrer une intégrale

A. Graphiquement

a. I est l'aire de la partie du plan située sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses sur $[2\,;7]$.

b. L'aire du rectangle est égale à 15 supérieure à I, l'aire du polygone en pointillés situé sous la courbe est inférieure à I. L'aire de ce polygone est la somme de l'aire d'un triangle rectangle de côtés de l'angle droit égaux à 2 et 3 et de l'aire d'un trapèze de hauteur 3 et de bases 3 et 1.
L'aire du polygone situé sous la courbe est donc égale à $3 + 6 = 9$. Donc $9 \leqslant I \leqslant 15$.

B. À l'aide du signe d'une intégrale ou du théorème de comparaison

a. Si f est croissante sur $[a\,;b]$ alors, pour tout réel x tel que $a \leqslant x \leqslant b$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. Par la propriété 4, comme $a \leqslant b$ et f est continue sur $[a\,;b]$, nous en déduisons

$\int_a^b f(a)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(b)\,dx$

C'est-à-dire $(b-a)f(a) \leqslant J \leqslant (b-a)f(b)$. Comme f est positive $(b-a)f(a)$ est l'aire du rectangle de base $b-a$ et de hauteur $f(a)$ et $(b-a)f(b)$ est l'aire du rectangle de base $b-a$ et de hauteur $f(b)$.
J étant l'aire de la partie du plan située sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses sur $[a\,;b]$.
Donc J est comprise entre l'aire des deux rectangles.

b. Si f est continue, décroissante sur $[a\,;b]$,
$f(b) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$ pour tout réel x de $[a\,;b]$, alors
$(b-a)f(b) \leqslant J \leqslant (b-a)f(a)$.

2. a. Pour tout x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ car pour n entier naturel non nul $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, il en résulte en mutipliant les 3 membres par e^x que $0 \leqslant e^x x^n \leqslant e^x$.
D'où $0 \leqslant K_n \leqslant \int_0^1 e^x\,dx$ avec $\int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1$.

Conclusion : $0 \leqslant K_n \leqslant e - 1$.

b. $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1$, c'est-à-dire $1 \leqslant e^x \leqslant e$. Comme $x^n \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$, nous en déduisons $x^n \leqslant e^x x^n \leqslant e\,x^n$, d'où $0 \leqslant e^x x^n \leqslant e\,x^n$.

c. Par **b.** nous obtenons $0 \leqslant K_n \leqslant \int_0^1 ex^n\,dx$.

$\int_0^1 ex^n\,dx = e\int_0^1 x^n\,dx = e\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$.

Il en résulte $0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc par le théorème des « gendarmes » $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$. Ce deuxième encadrement suffit pour en déduire que la suite (K_n) a une limite et permet de la calculer. Ce n'est pas le cas du premier encadrement.

3. Sur [0 ; 1], pour tout n entier naturel non nul $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$. Comme pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > 0$, nous en déduisons, $0 \leqslant x^{n+1}\sqrt{x^2+1} \leqslant x^n\sqrt{x^2+1}$.

Par la propriété 4, comme $0 \leqslant 1$ nous obtenons

$0 \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{x^2+1}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\sqrt{x^2+1}\,dx$.

C'est-à-dire $0 \leqslant L_{n+1} \leqslant L_n$. Donc la suite (L_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

Remarque : comme sur [0 ; 1], $0 \leqslant x^n\sqrt{x^2+1} \leqslant x^n\sqrt{2}$, il en résulte $0 \leqslant L_n \leqslant \int_0^1 \sqrt{2}x^n\,dx$.

$\int_0^1 \sqrt{2}x^n\,dx = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$, donc par le théorème des « gendarmes » $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$.

3 Approfondir : calculer un volume à l'aide du calcul intégral

A. Une sphère

1. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $r(z)$ et z et pour hypoténuse R, nous en déduisons que $r(z)^2 = R^2 - z^2$.

2. Par la formule donnant le volume d'un cylindre de hauteur Δz et de base de rayon $r(z)$ nous obtenons que ce volume est égal $\pi r(z)^2\,\Delta z$, soit $\pi(R^2 - z^2)\,\Delta z$.

3. $z \mapsto R^2 - z^2$ est une fonction paire sur $[-R\,;R]$, donc $\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\,dz = 2\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\,dz$

$\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\,dz = \left[\pi\left(R^2 z - \dfrac{z^3}{3}\right)\right]_0^R = \dfrac{2}{3}\pi R^3$

Donc $V = 2\left(\dfrac{2}{3}\pi R^3\right) = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ et on retrouve la formule donnant le volume d'une sphère de rayon R.

B. Un cône de révolution

1. En apliquant le théorème de Thalès dans les triangles rectangles de côtés de l'angle droit R et h pour l'un, $r(z)$ et $h - z$ pour l'autre nous obtenons $\dfrac{r(z)}{R} = \dfrac{h-z}{h}$ d'où $r(z) = \dfrac{R}{h}(h - z)$.

2. Par la formule donnant le volume d'un cylindre, un cylindre de hauteur Δz et de base de rayon $r(z)$ a pour volume $\pi r(z)^2\,\Delta z$.

Soit $\dfrac{\pi R^2}{h^2}(h - z)^2\,\Delta z$.

3. $\int_0^h \dfrac{\pi R^2}{h^2}(h - z)^2\,dz = \dfrac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h (h - z)^2\,dz$

$\int_0^h (h - z)^2\,dz = \left[-\dfrac{1}{3}(h - z)^3\right]_0^h = \dfrac{h^3}{3}$.

Donc $V = \dfrac{\pi R^2}{h^2}\left(\dfrac{h^3}{3}\right) = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ et on retrouve la formule donnant le volume d'un cône de révolution de hauteur h dont le cercle de base a pour rayon R.

C. Volume d'un autre solide de révolution

$V = \int_1^3 \pi\left(\dfrac{2}{x}\right)^2 dx = \left[-\dfrac{4\pi}{x}\right]_1^3 = \dfrac{8\pi}{3}$.

CHAPITRE 9

Les nombres complexes

Pour reprendre contact

1 Avec les angles orientés

a. $-\frac{\pi}{2}$ **b.** $-\frac{\pi}{4}$ **c.** $-\frac{\pi}{3}$ **d.** $\frac{\pi}{6}$

2 Avec le trigonométrie

1. $(\vec{u},\overrightarrow{OM_1}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ $(\vec{u},\overrightarrow{OM_2}) = \pi\ (2\pi)$ $(\vec{u},\overrightarrow{OM_3}) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ $(\vec{u},\overrightarrow{OM_4}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

2. a. La demi-droite]OA), avec A(1;1).

b. La droite (OB), privée du point O, avec $B\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3 Avec les angles associés

a. Faux : $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

b. Vrai

c. Faux : $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

d. Vrai

4 Avec les équations trigonométriques

a. $S = \{0\}$ **b.** $S = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$ **c.** $S = \left\{-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$ **d.** $S = \left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

5 Avec un ensemble de points

a. La droite d'équation réduite $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

b. L'union des droites d'équation $y = x$ et $y = -x + 1$.

c. Le cercle de centre O et de rayon 1.

d. Le cercle de centre $\Omega(2\,;4)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

6 Avec les cercles du plan

1. a. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

b. $x^2 + y^2 - x + y - 6 = 0$

2. On peut factoriser : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$. (E) est bien une équation de cercle.

3. (F) s'écrit aussi : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = -\frac{21}{4}$. (F) n'est pas une équation de cercle

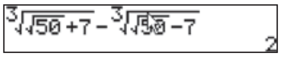
Activités 1. Vers des nombres imaginaires

A. a. $2^3 + 24 \times 2 = 56$

b. $p = 3$ et $q = 14$. Le binôme vaut $\sqrt{50} + 7$ et l'apotome vaut $\sqrt{50} - 7$.

La racine vaut $\sqrt[3]{\sqrt{50} + 7} - \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7}$.

À la calculatrice :

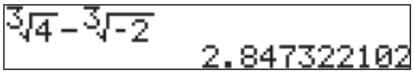


On vérifie que 2 est bien solution exacte de l'équation $x^3 + 3x = 14$ car $2^3 + 3 \times 2 = 14$.

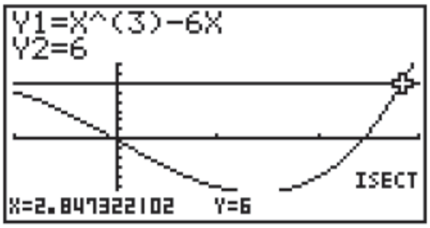
c. De même $p = -6$ et $q = 6$.

Le binôme vaut $1 + 3$ et l'apotome vaut $1 - 3$. La racine vaut $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{-2}$.

À la calculatrice :



On contrôle graphiquement ce résultat :



B. a. On conjecture que 4 est solution de (E).

Vérification : 4^3 = 64 et $15 \times 4 + 4 = 64$.

b. L'équation s'écrit $x^3 - 15x = 4$.

$\frac{-15}{3} = -5$ et $\frac{4}{2} = 2$; $(-5)^3 + 2^2 = -125 + 4 = -121$.

On ne peut pas prendre la racine carrée de – 121.

C. 2. $(2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$; $(2 + i)^3 = (3 + 4i)(2 + i) = 2 + 11i$.

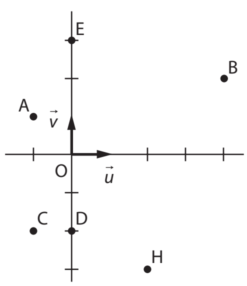
En poursuivant les calculs de Bombelli, et en adoptant ses abus d'écriture, on obtient le binôme 11i + 2 et l'apotome 11i – 2 donc la racine $\sqrt[3]{2 + 11i} - \sqrt[3]{11i - 2}$.

On calcule $(-2 + i)^3 = -2 + 11i$.

D'où la racine $2 + i - (-2 + i) = 4$, racine bien réelle et racine exacte de l'équation (E).

Activités 2. Représentation graphique des nombres complexes

1.



2. $M(z) \in (Ox) \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$; $M(z) \in (Oy) \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$

Activités 3. Module, argument et forme trigonométrique

1. $OM = \sqrt{2}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

2. b. Pour construire S, on construit S', puis la demi-droite [OS'). S est le point de cette demi-droite tel que OS = 2 : il a une abscisse et une ordonnée doubles de celles de S (théorème de Thalès).

c. $z_{S'} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ d'où, d'après **2.**, $z_S = 2z_S = \sqrt{3} + i$.

3. $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_B = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; $z_C = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$;

$z_D = 5\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $z_E = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ et $z_F = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.

4. a. $r = \sqrt{a^2+b^2}$ **b.** $z_{T'} = \cos\theta + i\sin\theta$ **c.** $z_T = r\, z_{T'} = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$

d. $a = r\cos\theta$; $b = r\sin\theta$

5. $ON = \sqrt{5}$; $\theta \approx -63{,}4°$

TP1. Propriétés algébriques

1. Oui.

2. a. Par exemple pour la multiplication, en posant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$), on obtient $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ qui est bien de la forme A + iB, avec A, B $\in \mathbb{R}$.

b. Le quotient $\frac{z}{z'}$ d'un nombre complexe par un nombre complexe non nul est égal au produit de z et de l'inverse de z'. On a montré à la question **2.a.** que $\mathbb{C}$ était stable par produit et passage à l'inverse, il l'est donc aussi pour la division (par un nombre $n \in E_1$ non nul).

3. a. E_1 et E_2 sont stables pour l'addition et la multiplication, tout comme $\mathbb{C}$ (mêmes calculs en remplaçant i par $\sqrt{2}$).

b. E_1 et E_2 ne sont stables ni pour le passage à l'inverse ni pour la division. En effet, pour E_1, si l'on choisit $z = 1 + i$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1^2 - i^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Pour E_2, diviser par 0 n'a pas de sens, ce qui explique le résultat.

Par contre, $E_2 - \{0\}$ est stable pour le passage à l'inverse et pour la division.

<u>Passage à l'inverse</u> : soient a et b deux nombres réels non tous les deux nuls.

Si $a - b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b\sqrt{2}$ et $\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{1}{2b\sqrt{2}} = 0 + \frac{1}{4b}\sqrt{2}$.

Sinon, $\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2-2b^2} + \sqrt{2}\frac{b}{a^2-2b^2}$.

Dans les deux cas, on obtient bien la forme requise.

<u>Division</u> : même méthode.

TP2. D'où viennent les règles de cardan ?

1. On utilise le développement de $(u+v)^3 = (u+v)^2(u+v)$.

2. Si u et v vérifient le système, alors $x^3 + 24x = (u^3+v^3) + 3uvx + 24x$ d'après **1**.

Puis en remplaçant $u^3 + v^3$ par 56 et uv par – 8, on obtient bien 56 dans le membre de droite.

3. $\begin{cases} u^3+v^3 = 56 \\ uv = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U+V = 56 \\ (uv)^3 = -8^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = 56-8 \\ UV = -8^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = 56-U \\ U(56-U) = -8^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = 56-U \\ -U^2 + 56U + 8^3 = 0 \end{cases}$

4. On trouve les racines du trinôme $-U^2 + 56U + 8^3$. On en déduit les couples (U, V) : $(-8, 64)$ et $(64, -8)$ puis les couples (u, v) : $(-2, 4)$ et $(4, -2)$, et enfin une solution de (E_1) : $x = 2$.

<u>Pour aller plus loin</u> : pour résoudre $x^3 + px = q$ (E), on pose $x = u + v$. Pour que x soit solution de (E), la condition suffisante sur (u, v) est cette fois $\begin{cases} u^3+v^3 = q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$. Cette condition équivaut à $\begin{cases} V = q - U \\ -U^2 + qU + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \end{cases}$, en ayant posé $U = u^3$ et $V = v^3$ au préalable. En trouvant les racines du trinôme $-U^2 + qU + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ et en revenant aux variables (u, v) puis à x, on retrouve le résultat annoncé.

TP3. Un ensemble de Julia

1. a est un nombre aléatoire choisi compris dans l'intervalle [0 ; 4].

2. a. La variable contenant les z_n est z. Le premier terme de (z_n) est a.

b. On sort de la boucle « Tant que… FinTantque » lorsque le module de z_n est strictement supérieur à 2 ou bien que n atteint la valeur 100.

c. Dans le cas présent, on considère que la suite (z_n) n'est pas bornée lorsque le module d'un de ses termes dépasse 2.

3. Traitement et sorties :
Pour k variant de 1 à 20 000 Faire
Choisir aléatoirement deux nombres
*nbaléa*1 et *nbaléa*2 entre 0 et 4
Affecter *nbaléa*1 − 2 + *i*(*nbaléa*2 − 2) à *a*
Affecter 0 à *n* et *a* à *z*
Tant que $|z| \leqslant 2$ et $n < 100$ Faire
Incrémenter *n* de 1
Affecter $z^2 - 1$ à *z*
FinTantque
Si $n = 100$ alors
Tracer le point d'affixe *a*
FinSi
FinPour

TP4. Une propriété des polygones réguliers

A.1. Voici ce que l'on saisit sur GeoGebra :

• pour le triangle : A(1 ; 0), $B\left(1;\frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(1;\frac{4\pi}{3}\right)$.

• pour le pentagone : A(1 ; 0), $B\left(1;\frac{2\pi}{5}\right)$, $C\left(1;\frac{4\pi}{5}\right)$, $D\left(1;\frac{6\pi}{5}\right)$, $E\left(1;\frac{8\pi}{5}\right)$.

• etc.

2. Le produit considéré valant environ 3 pour le triangle, 4 pour le carré, 5 pour le rectangle, on conjecture que pour un polygone régulier à n côtés inscrits dans le cercle trigonométrique, ce produit vaut n.

B. 1. La diagonale du carré inscrit valant $\sqrt{2}$, on a bien : $\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$.

2. $z_A = 1$; $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

$$AB \times AC = \left|-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - 1\right|\left|-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^2 = 3.$$

3. a. $z_A = 1$; $z_B = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_C = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_D = -1$; $z_E = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_F = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

b. AB = AE = 1, AC = AE = $\sqrt{3}$ et AD = 2. Le produit vaut donc : $AB^2 \times AE^2 \times AD = 6$.

4. a. $z_B = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $z_C = e^{\frac{4i\pi}{5}}$, $z_D = e^{\frac{6i\pi}{5}}$ et $z_E = e^{\frac{8i\pi}{5}}$.

b. $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$.

c. Dans AOB, $AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2 \times AO \times OB \times \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \sqrt{5} - 1$ en utilisant **b**.

De même, $AC^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$. Au final, $AB \times AC \times AD \times AE = AB^2 \times AC^2 = \left(\sqrt{5} - 1\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^2 = 2\sqrt{5} + 6$.

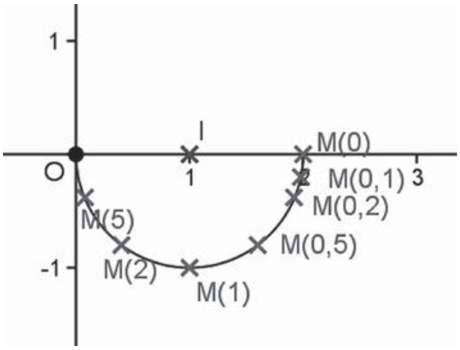
<u>Pour aller plus loin</u> : $\omega^5 = 1$ donc $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0$. L'égalité proposée se montre en développant les deux membres et en prenant $z = \omega$, on déduit que $0 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)^2 + \left(e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right) + 1$. En utilisant la formule d'Euler, on déduit : $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1 = 0$. On finit par déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ en trouvant les racines du trinôme.

TP5. Un lieu géométrique utile en physique

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $h(t) = \frac{2}{1 + it}$.

1. M(0) a pour affixe $h(0) = 2$; M(0, 1) a pour affixe $h(0,1) = \frac{200}{101} - \frac{20}{101}i$;

M(0, 2) a pour affixe $h(0,2)=\frac{25}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}$; M(0, 5) a pour affixe $h(0,5)=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$;
M(1) a pour affixe $h(1)=1-\mathrm{i}$; M(2) a pour affixe $h(2)=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$;
M(5) a pour affixe $h(5)=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}$.



Voir fichier joint sur le site Math'x.

2. L'ensemble $\mathcal{N}$ décrit par M(t) lorsque t décrit $[0\,;+\infty[$ semble être le demi-cercle de centre le point I d'affixe 1 et de rayon 1.

3. Pour $t \geqslant 0$, $h(t)=\frac{2}{1+\mathrm{i}t}=\frac{2(1-\mathrm{i}t)}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{i}$.

$\mathrm{IM}(t)=\left|\frac{2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{i}-1\right|=\left|\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{i}\right|$ donc $\mathrm{IM}(t)=\sqrt{\frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2}}=\sqrt{\left(\frac{1+t^2}{1+t^2}\right)^2}=1.$

M(t) lorsque t décrit $[0\,;+\infty[$ appartient donc au cercle de centre I et de rayon 1.

4. a. $x(t)$ désigne la partie réelle de $h(t)$.

Soit P$(a\,;b)$ point du demi-cercle $(0\leqslant a\leqslant 2\,;(a-1)^2+b^2=1\,;b<0)$.

Existe-t-il un réel $t\geqslant 0$ tel que $x(t)=\frac{2}{1+t^2}=a$?

$x'(t)=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\leqslant 0.$

t	0	$+\infty$
$x(t)$	2 ↘	0

Il existe donc un réel $t_0\in[0\,;+\infty[$ tel que $x(t)=a$, $0<a\leqslant 2$.

b. Il reste à vérifier que $b=-\frac{2t_0}{1+t_0^2}$.

Or, $b^2=1-(a-1)^2$ et $b<0$ donc $b=-\sqrt{1-(a-1)^2}$;

$b=-\sqrt{1-(x(t_0)-1)^2}=-\sqrt{1-(\frac{2}{1+t_0^2}-1)^2}=-\sqrt{\frac{4t_0^2}{(1+t_0^2)^2}}=-\frac{2t_0}{1+t_0^2}.$

L'ensemble $\mathcal{N}$ est donc le demi-cercle de centre le point I d'affixe 1 et de rayon 1.

TP6. Lieu des sommets d'un carré

1. a. Voir fichier joint sur le site Math'x.

b. Le point S semble fixe, le point R évoluant quant à lui sur le segment [EF], $\mathrm{G}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

c. $\mathrm{S}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

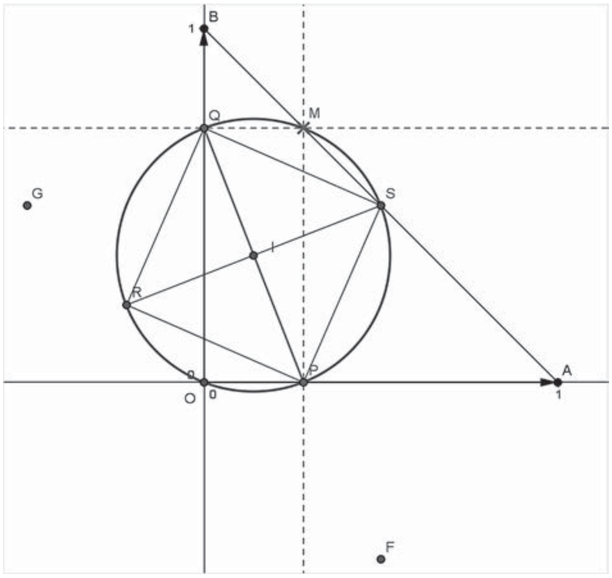
2. La droite (AB) ayant pour équation $y=1-x$, le point M a pour ordonnée $1-x$. L'affixe de P est donc x, l'affixe de Q est $(1-x)\mathrm{i}$, $x\in[0\,;1]$.

3. a. $\mathrm{E}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

b. $\dfrac{z_P - z_E}{z_Q - z_E} = \dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\text{i}}{-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\text{i}} \times \dfrac{-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-x\right)\text{i}}{-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-x\right)\text{i}} = \text{i}$ donc $\dfrac{\text{EP}}{\text{EQ}} = |\text{i}| = 1$ d'où EP = EQ et $\left(\overrightarrow{\text{EQ}}, \overrightarrow{\text{EP}}\right) = \arg \text{i} = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

EQP est donc un triangle rectangle isocèle en E (direct) donc S = E.

c. I a pour affixe $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1-x}{2}\text{i}$. I est le milieu de [SR] donc $z_R = 2z_I - z_S = \left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-x\right)\text{i}$. R appartient donc à la droite d'équation $y = -x$. Puisque $x \in [0\,;1]$, R appartient au segment [FG] précédemment décrit.



TP7. Une inversion

1. Voir fichier joint sur le site Math'x.

2. Les points O, M et M′ paraissent alignés.

3. a. Le lieu E décrit par M′ semble être le cercle de centre H d'affixe 5 et de rayon 5.

b. Créer un point B sur le cercle Γ puis taper M = B dans la barre de saisie pour placer M en B.

Le lieu F décrit par M′ semble être la droite Δ.

4. Le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}'}$ a pour affixe $z' = \dfrac{20}{\bar{z}} = \dfrac{20z}{\bar{z}z} = kz$ avec $k = \dfrac{20}{z\bar{z}} = \dfrac{20}{|z|^2} \in \mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{\text{OM}'} = k\overrightarrow{\text{OM}}$. Ces deux vecteurs étant colinéaires, O, M et M′ sont alignés.

5. a. $z' + \bar{z}' = \dfrac{20}{\bar{z}} + \overline{\left(\dfrac{20}{\bar{z}}\right)} = \dfrac{20}{\bar{z}} + \dfrac{20}{z} = \dfrac{20}{z\bar{z}}(z+\bar{z})$.

b. On pose $z = x + y\text{i}$. Soit H le point d'affixe 5.

$|z'-5|^2 = \left|\dfrac{20}{x-y\text{i}} - 5\right|^2 = \left|\dfrac{20-5x+5y\text{i}}{x-y\text{i}}\right|^2$ donc $|z'-5|^2 = \dfrac{400-200x}{|x+y\text{i}|^2} + \dfrac{25(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \dfrac{400-200x}{|x+y\text{i}|^2} + 25$.

Ainsi, si $x = 2$, $|z'-5|^2 = 25$ donc HM′ = 5. Le lieu E décrit par M′ est le cercle de centre H d'affixe 5 et de rayon 5.

Le point M′ est le point d'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ.

c. Si M appartient à Γ, $x^2 - 10x + y^2 = 0$ donc $x^2 + y^2 = 10x$.

Évaluons $(\vec{u}, \overrightarrow{\text{KM}}) = \arg(z'-2)$, K étant le point d'affixe 2.

$z' - 2 = \dfrac{20}{\bar{z}} - 2 = \dfrac{20z - 2|z|^2}{|z|^2} = \dfrac{20y}{|z|^2}\text{i}$ donc $\arg(z'-2) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ donc le lieu F décrit par M′ est la droite Δ.

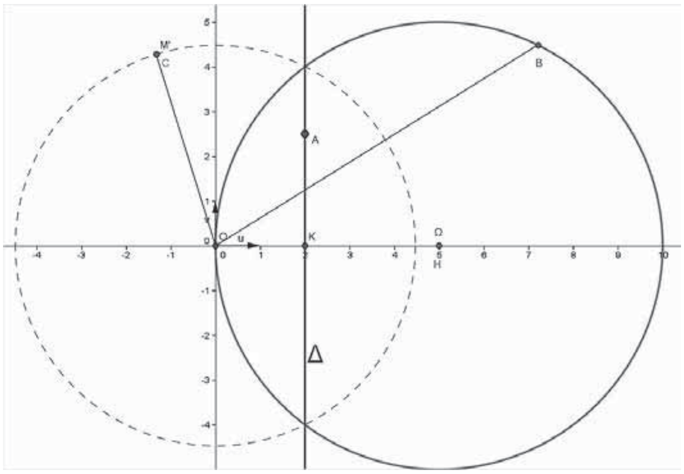
<u>Pour aller plus loin</u>

1. Le Produit OM × OM′ semble valoir 20.

$\text{OM} \times \text{OM}' = |z||z'| = |zz'| = \left|\dfrac{20z}{\bar{z}}\right| = 20\dfrac{|z|}{|\bar{z}|}$ donc OM × OM′ = 20 car $|z| = |\bar{z}|$.

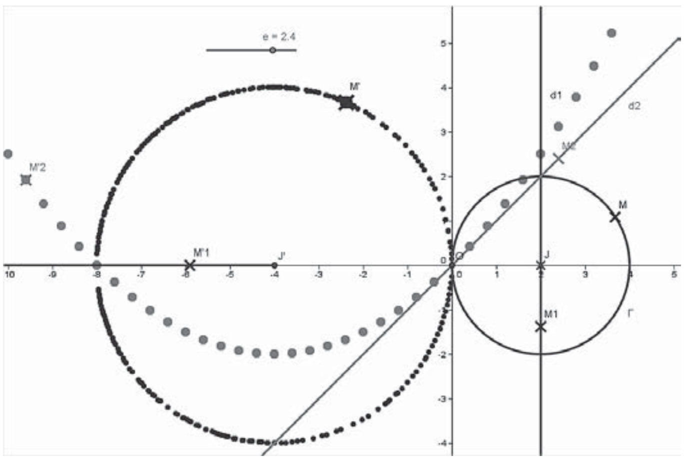
2. $z = \dfrac{20}{\overline{z}} \Leftrightarrow z\overline{z} = 20 \Leftrightarrow |z|^2 = 20.$

L'ensemble des points M invariants est l'ensemble des points M tels que $\mathrm{OM} = 2\sqrt{5}$; il s'agit du cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{5}$.



TP8. En autonomie

1.



A : cercle de centre J' d'affixe – 4 et de rayon 4.

B : demi-droite d'origine J' contenant les points d'affixes réelles x, $x \leqslant -4$.

C : parabole de sommet le point d'affixe $-4-2\mathrm{i}$.

2. On a : $z' = z^2 - 4z$ donc $z' + 4 = (z-2)^2$ et $|z'+4| = |z-2|^2$.

$\mathrm{M} \in \Gamma \Leftrightarrow \mathrm{JM} = 2 \Leftrightarrow |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z'+4| = 4.$

Le point M' appartient donc au cercle de centre J' et de rayon 4.

3. Conjecture B : soit $y \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{M} \in d_1 \Leftrightarrow z = 2 + y\mathrm{i} \Leftrightarrow z' = 4 + 4y\mathrm{i} - y^2 - 8 - 4y\mathrm{i} \Leftrightarrow z' = -4 - y^2$. Ainsi $z' \in \mathbb{R}$ et $z' \leqslant -4$.

L'ensemble cherché est la demi-droite d'origine J' contenant les points d'affixes réelles x, $x \leqslant -4$.

Conjecture C : soit $x \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{M} \in d_2 \Leftrightarrow z = x + x\mathrm{i} \Leftrightarrow z' = x^2 + 2x^2\mathrm{i} - x^2 - 4x - 4x\mathrm{i} \Leftrightarrow z' = -4x + \left(2x^2 - 4x\right) - \mathrm{i}.$

En posant $z' = x' + y'\mathrm{i}$ on a : $x' = -4x$ et $y' = 2x^2 - 4x = \dfrac{1}{8}x'^2 + x'$.

Ainsi M' appartient à la parabole d'équation $y' = \dfrac{1}{8}x'^2 + x'$ de sommet le point d'affixe $-4-2\mathrm{i}$.

Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 $z_A = 2 + 2i$, $z_B = -1 - i$, $z_C = 4$ et $z_D = -2i$.

2 $z_{\overrightarrow{AB}} = -3 - 3i$

3 $z_I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

4 $|z_A| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

5 $z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

6 **1.** $|z| = 2$; $\arg(z) = -\frac{\pi}{5}\ (2\pi)$;
$|\bar{z}| = 2$ et $\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{5}\ (2\pi)$
2. $z^5 = -32 + 0i$

7 **a.** $4e^{\frac{i\pi}{2}}$ **b.** $5e^{i\pi}$ **c.** $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$
d. $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ **e.** $2e^{\frac{i\pi}{6}}$

8 $\bar{z} = 2e^{-\frac{i\pi}{5}}$ et $-z = 2e^{-\frac{4i\pi}{5}}$

9 $\mathrm{Re}(z_1) = 4$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -1$

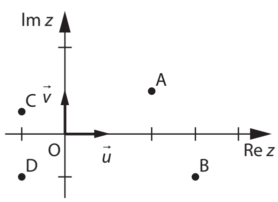
10 $z_1 + z_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}i$

11 **a.** 17 **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $15 - 8i$ **d.** $-\frac{i}{32}$

12 **a.** $S = \{\sqrt{5}\,;-\sqrt{5}\}$ **b.** $S = \{i\sqrt{5}\,;-i\sqrt{5}\}$
c. $S = \{1+2i\,;1-2i\}$

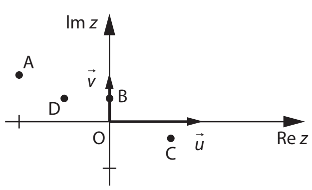
ENTRAÎNEMENT

13



a. $\mathrm{Re}(z_A) = 2$ et $\mathrm{Im}(z_A) = 1$
b. $\mathrm{Re}(z_B) = 3$ et $\mathrm{Im}(z_B) = -1$
c. $\mathrm{Re}(z_C) = -1$ et $\mathrm{Im}(z_C) = \frac{1}{2}$
d. $\mathrm{Re}(z_D) = -1$ et $\mathrm{Im}(z_D) = -1$

14



a. $\mathrm{Re}(z) = -1$ et $\mathrm{Im}(z) = 1$
b. $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}$
c. $\mathrm{Re}(z) = \frac{2}{3}$ et $\mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{3}$
d. $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}$

15 $z_A = 2 + i$; $z_B = 2 - 4i$; $z_C = 2i$; $z_D = -3 - i$;
$z_E = -2$; $z_F = -i$; $z_G = 5 + i$; $z_H = 2 - i$

16 **a.** $a = 3$ et $b = 3$ **b.** $a = 2$ et $b = \frac{1}{2}$

17 Voir corrigé en fin de manuel.

18 **a.** $-\frac{13}{2} + 3i$ **b.** $3\sqrt{3} + 3i$

19 **a.** $1 + 2i$ **b.** $2 + i$ **c.** $-\frac{3}{8} - \frac{3}{2}i$ **d.** $2 - i$

20 **a.** $5 + 12i$ **b.** $-2i$ **c.** 5
d. $-3 - 4i$ **e.** 2 **f.** $\frac{143}{9} + \frac{8}{3}i$

21 **a.** $1 - 7i$ **b.** $-2 + 8i$ **c.** $-10 - 2i$ **d.** $20 + 10i$

22 Voir fichier sur le site Math'x.

23 **1.** $u_1 = 1 + i$ $u_2 = (1+i)^2 = 2i$
2. a. On pourrait qualifier (u_n) de suite géométrique de raison $1 + i$.
b. $u_n = u_0 \times q^n = (1+i)^n$
3. $u_8 = (1+i)^8 = \left((1+i)^2\right)^4 = (2i)^4 = 16$

24 **a.** $S = \left\{\frac{4}{9} - \frac{4}{9}i\right\}$ **b.** $S = \left\{-\frac{i}{3}\right\}$

25 **a.** $S = \{(i\,;1+2i)\}$ **b.** $S = \left\{\left(-\frac{11}{13} + 3i\,;\frac{7}{26} + i\right)\right\}$

26 **1.** Il n'est pas évident d'en trouver. Le couple $x_0 = 2$ et $y_0 = 1$ fonctionne par exemple.
2. a. $5^2 = 25$ tests nécessaires dans le pire des cas.
b. $\mathrm{Re}(P(z)) = a(x^2 - y^2) + bx + c$ et $\mathrm{Im}(P(z)) = 2axy + by$
c. et **3. a.** Voir fichier sur le site Math'x.
b.

```
***Algorithme lancé***
Le nombre complexe suivant est une racine pseudo-évidente : 2+(-1)*i
Le nombre complexe suivant est une racine pseudo-évidente : 2+(1)*i
```

27 **1.** A$(2+i)$ B$(3i)$ C(-1) D$(-2+2i)$
$\overrightarrow{AB}(-2+2i)$ $\overrightarrow{AC}(-3-i)$
2. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3i - (2+i) = -2 + 2i$
$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -1 - (2+i) = -3 - i$

28 **1.** $A(0{,}5-2i)$ $B(-2-2i)$ $C(1+i)$ $D(-1{,}5+i)$
2. $\overrightarrow{AC}(0{,}5+3i)$ $\overrightarrow{BD}(0{,}5+3i)$
3. Les affixes étant égales, les vecteurs sont égaux et ACDB est un parallélogramme.

29 Voir corrigé en fin de manuel.

30 **1.** A, B, C semblent alignés.
2. $z_{\overrightarrow{AB}} = 5 + \frac{13}{10}i$ et $z_{\overrightarrow{AC}} = 7 + 2i$.
3. $\frac{7}{5} \neq \frac{2}{\frac{13}{10}}$. Les points A, B, C ne sont pas alignés.

31 $z_{\overrightarrow{AB}} = 6 - i = -z_{\overrightarrow{AC}}$. Les points sont donc alignés.

32 $D(-3+3i)$

33 **a.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ **b.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ **c.** $\frac{5}{26}+\frac{1}{26}i$ **d.** $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

34 Voir corrigé en fin de manuel.

35 **a.** $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ **b.** $\frac{7}{5}-\frac{9}{5}i$ **c.** -4 **d.** $-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i$

36 **a.** $S=\left\{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right\}$ **b.** $S=\left\{-\frac{3}{17}-\frac{5}{17}i\right\}$
c. $S=\left\{-\frac{6}{65}+\frac{48}{65}i\right\}$ **d.** $S=\{-2i\}$

37 Voir fichiers sur le site Math'x
a. $\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$.
b. $\frac{z}{z'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}$.

38 **a.** $2-4i$ **b.** $-3+2i$ **c.** $2+2i$
d. $1+4i$ **e.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ **f.** $-\frac{6}{13}-\frac{4}{13}i$

39 $B(\sqrt{3}-i)$ $C(-\sqrt{3}+i)$ $D(-\sqrt{3}-i)$

40 **a.** $2+\bar{z}-2i$ **b.** $-i-1-3\bar{z}$

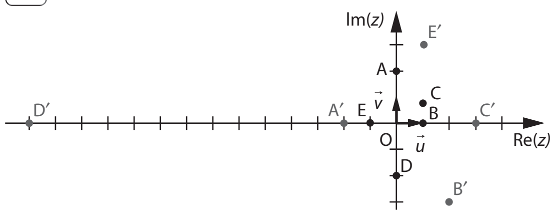
41 **a.** $S=\{0\}$ **b.** $S=\{a(1-i),\, a\in\mathbb{R}\}$
c. $S=\left\{-2+\frac{5}{6}i\right\}$ **d.** $S=\{-1;2\}$ **e.** $S=\mathbb{R}$ **f.** $S=\varnothing$

42 $S=\{(1-i\,;2+2i)\}$

43 • 1re propriété :
$\bar{z}+\bar{z}' = (a-ib)+(a'-ib') = (a+a')-i(b+b') = \overline{z+z'}$
• 2e propriété : par récurrence.
Initialisation $(n=0)$: $1=1$ est vraie.
Hérédité :
si $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ est vrai, alors $\bar{z}^{n+1} = \bar{z}^n \times \bar{z} = \overline{z^n} \times \bar{z} = \overline{z^{n+1}}$ par hypothèse de récurrence et compatibilité de la conjugaison avec le produit.

44 **1.** $\overline{P(z)} = \overline{z^3-3z^2+4z-12} = \overline{z}^3 - 3\overline{z^2} + 4\bar{z} - 12$
$= \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 4\bar{z} - 12 = P(\bar{z})$
en utilisant la compatibilité de la conjugaison avec les opérations usuelles (linéarité et passage à la puissance).
2. b. On utilise 1 :
$\overline{P(2i)} = \begin{cases} 0 \\ P(\overline{2i}) = P(-2i) \end{cases}$ donc $P(-2i)=0$.
Pour aller plus loin :
$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = P(\bar{z})$.
On a utilisé la compatibilité de la conjugaison avec les opérations usuelles et $a_k = \overline{a_k}$, obtenu car a_k est réel. Puis on refait le raisonnement de **2. b**.

45 **1. a.** et **b.**



$A'(-2)$ $B(2-3i)$ $C\left(\frac{25}{8}\right)$ $D(-14)$ $E(1+3i)$
2. a. $x' = 2x^2 - 2y^2 + 3y$ $y' = 4xy - 3x$
b. $M' \in (Ox) \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x(4y-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = \frac{3}{4}$. L'ensemble concerné est la réunion de l'axe des ordonnées et de la droite D d'équation $y = \frac{3}{4}$.
c. Par exemple, on vérifie que pour les points B′ et E′ déjà tracés, B et E sont bien dans l'ensemble de **b**.

46 Voir corrigé en fin de manuel.

47 En posant $z = a + ib$, x, y réels,
$Z = (2a-3b-4) + i(3a+2b-1)$.
1. Z_1 réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z_1) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$.
2. a. Z_1 imaginaire pur
$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}a + \frac{4}{3} \Leftrightarrow z = a\left(1+\frac{2}{3}i\right) + \frac{4}{3}i$
où a est réel.
b. L'ensemble cherché est la droite d'équation réduite $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

48 **1.** $\operatorname{Re}(z') = -6ab - 4a + 1$
et $\operatorname{Im}(z') = 3a^2 - 3b^2 - b + 4$.
2. a. z' imaginaire pur $\Leftrightarrow b = \frac{1}{6a} - \frac{2}{3}$.
L'ensemble cherché est une hyperbole.
b. z' réel $\Leftrightarrow 3a^2 - 3b^2 - b + 4 = 0$
$\Leftrightarrow 3a^2 - 3\left(b+\frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{49}{12}$.

49 **1. a.** $Z = \dfrac{((3x+1)+3iy)((x-2)-iy)}{((x-2)+iy)((x-2)-iy)}$ d'où

$X' = \dfrac{3x^2+3y^2-5x-2}{(x-2)^2+y^2}$ et $Y' = \dfrac{-7y}{(x-2)^2+y^2}$.

b. Z réel $\Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow y = 0$. L'ensemble E est donc l'axe des abscisses privé du point d'abscisse -2.

2. a. $Z = \overline{Z} \Leftrightarrow X + iY = X - iY \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow Z$ réel.

b. Pour $z \neq 2$, $Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \dfrac{3z+1}{z-2} = \dfrac{3\overline{z}+1}{\overline{z}-2}$

$\Leftrightarrow 3z\overline{z} - 6z + \overline{z} - 2 = 3z\overline{z} - 6\overline{z} + z - 2 \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ réel.

50 A est réel, B et C sont imaginaires purs.

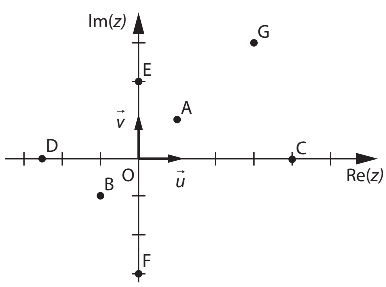
51 Voir corrigé en fin de manuel.

52 Voir corrigé en fin de manuel.

53 **1. a.** M′ semble décrire une parabole de sommet O.
b. M′ semble décrire une demi-droite incluse dans l'axe des ordonnées.
2. En posant $z = a + ib$ (a, b réels),
$z' = (a - 2ab) + i(a^2 - b^2 + b)$.
• Si z est réel, $b = 0$ et $z' = a + ia^2$ et $\mathrm{Im}(z) = (\mathrm{Re}(z))^2$. L'ensemble obtenu est la courbe de la fonction $x \rightarrow x^2$.
• Si z est imaginaire pur, $a = 0$ et $z' = i(-b^2 + b)$. En étudiant la fonction $b \rightarrow -b^2 + b$, on observe que M′ décrit la demi-droite incluse dans l'axe $(O\,;\vec{v})$ dont les points ont des ordonnées inférieures ou égales à $\dfrac{1}{4}$.

54 **1. a.** M′ semble décrire une parabole.
b. M′ semble décrire une demi-droite incluse dans l'axe des abscisses.
2. En posant $z = a + ib$ (a, b réels),
$z' = (a^2 - b^2 + 2b + 2) + i(2ab - 2a)$.
• Si z est réel, $z' = (a^2 + 2) - 2ia$. L'ensemble obtenu est la parabole d'équation $x = \dfrac{y^2}{4} + 2$.
• Si z est imaginaire pur, $a = 0$ et $z' = -b^2 + 2b + 2$. En étudiant la fonction $b \rightarrow -b^2 + 2b + 2$, on observe que M′ décrit l'ensemble des points de l'axe $(O\,;\vec{v})$ d'ordonnées inférieures ou égales à 3.

55



$|a| = \sqrt{2}$ et $\arg(a) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$|b| = \sqrt{2}$ et $\arg(b) = -\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

$|c| = 4$ et $\arg(c) = 0\ (2\pi)$

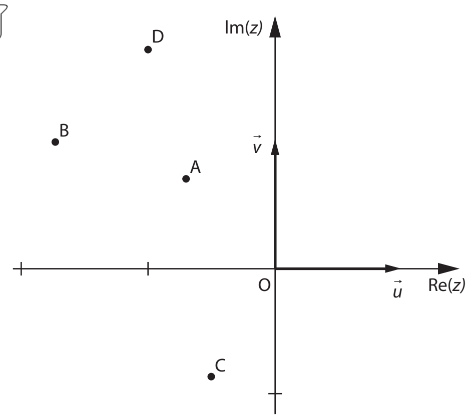
$|d| = 3$ et $\arg(d) = \pi\ (2\pi)$

$|e| = 2$ et $\arg(e) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$|f| = 3$ et $\arg(f) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$|g| = 3\sqrt{2}$ et $\arg(g) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$

56



57 **a.** Cercle de centre O et de rayon 2.
b. Cercle de centre O et de rayon 3.
c. Disque de centre O et de rayon 3.
d. Couronne comprise entre les disques de centre O et de rayons 1 et $2\sqrt{2}$ (la frontière avec le disque le plus petit est exclue, l'autre est incluse).

58 **a.** Demi-droite ouverte]OI) avec I d'affixe 1.
b. Demi-droite ouverte]OI′) avec I′ d'affixe -1.
c. Demi-droite ouverte]OJ) avec J d'affixe i.
d. Droite (OJ) privée du point O.

59 **a.** Demi-droite ouverte]OA) avec A d'affixe $1 + i$.
b. Demi-droite ouverte]OA′) avec A′ d'affixe $1 - i$.
c. Droite (OB) privée du point O avec B d'affixe $\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.
d. Droite (OA) privée du point O avec A d'affixe $1 + i$.

60 **a.** $z = \sqrt{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{15}}{2} + \dfrac{i\sqrt{5}}{2}$

b. $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2i\sqrt{2}$

c. $z = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

d. $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = -\sqrt{3} - 3i$

61 **a.** $|z| = 2$ et $\arg z = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$

b. $|z| = 2\sqrt{3}$ et $\arg z = -\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$

c. $|z| = 7\sqrt{2}$ et $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$

62 **a.** $|z| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\arg z = -\dfrac{\pi}{6}$ (2π)

b. $|z| = 4$ et $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$ (2π)

c. $|z| = 2\sqrt{6}$ et $\arg z = \dfrac{\pi}{6}$ (2π)

63 **a.** $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

b. $z = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

64 **1. a.** $\sqrt{17}$ **b.** $\sqrt{5}$ **c.** 5

2. $\arg(4 - \mathrm{i}) = \arctan\left(-\dfrac{1}{4}\right) \approx -0{,}24$ rad (2π)

$\approx -14{,}04°$ $(360°)$

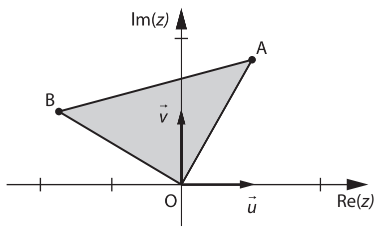
$\arg(1 - 2\mathrm{i}) = \arctan(-2) \approx 1{,}11$ rad $(2\pi) \approx -63{,}43°$ $(360°)$

$\arg(-3 + 4\mathrm{i}) = \arctan\left(-\dfrac{4}{3}\right) \approx 2{,}21$ rad $(2\pi) \approx -53{,}13°$ $(360°)$

66 **1.** $z_A = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) : |z_A| = 2$ et $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$ (2π)

$z_B = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) : |z_B| = 2$ et $\arg z = \dfrac{5\pi}{6}$ (2π)

2.

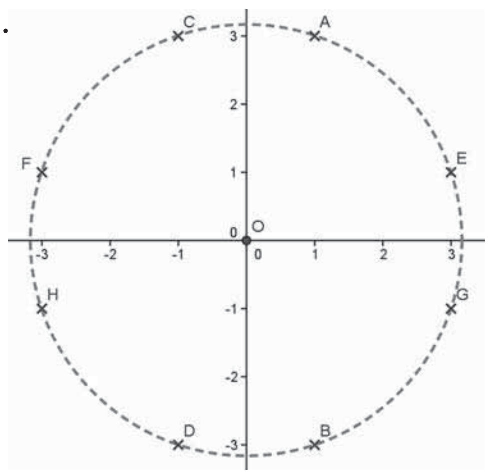


3. $OA = |z_A| = |z_B| = OB$ et
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ (2π), donc le triangle OAB est isocèle rectangle en O.

67 **a.** $3\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ **b.** $\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

c. $\cos(-\alpha) + \mathrm{i}\sin(-\alpha)$ **d.** $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$

68 **1.**



2. Si $z = a + b\mathrm{i}$ a pour module r et argument θ alors
$a - b\mathrm{i}$ a pour module r et argument $-\theta$;
$-a + b\mathrm{i}$ a pour module r et argument $\pi - \theta$;
$-a - b\mathrm{i}$ a pour module r et argument $\pi + \theta$;
$b + a\mathrm{i}$ a pour module r et argument $\dfrac{\pi}{2} - \theta$;
$b - a\mathrm{i}$ a pour module r et argument $\theta - \dfrac{\pi}{2}$;
$-b + a\mathrm{i}$ a pour module r et argument $\dfrac{\pi}{2} + \theta$;
$-b - a\mathrm{i}$ a pour module r et argument $-\dfrac{\pi}{2} - \theta$.

L'égalité des modules implique que les huit points appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

69 **1.** $a = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ donc $1 + a = 1 + \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.

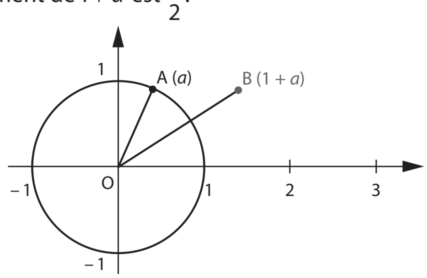
$\cos\varphi = 2\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^2 - 1$ donc $2\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^2 = 1 + \cos\varphi$ et

$\sin\varphi = 2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

Donc $1 + a = 2\cos\dfrac{\varphi}{2}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

2. $2\cos\dfrac{\varphi}{2} > 0$ donc le module de $1 + a$ est $2\cos\dfrac{\varphi}{2}$ et un argument de $1 + a$ est $\dfrac{\varphi}{2}$.

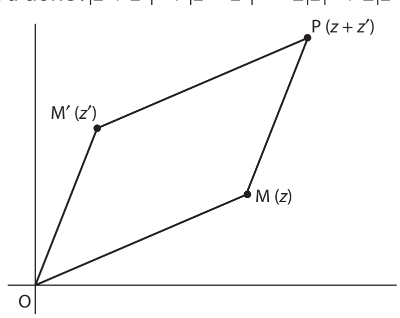
3. a.



b. La demi-droite [OB) est la bissectrice de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OA})$.

70 **1.** Posons $z = a + b\mathrm{i}$ et $z' = a' + b'\mathrm{i}$.
$z + z' = a + a' + (b + b')\mathrm{i}$ donc
$|z + z'|^2 = (a + a')^2 + (b + b')^2$.
$z - z' = a - a' + (b - b')\mathrm{i}$ donc
$|z - z'|^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2$.
$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2a^2 + 2a'^2 + 2b^2 + 2b'^2$
et donc $|z|^2 + |z'|^2 = a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2$.
On a donc : $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$.

2.



a. $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{MM'}$ ont pour affixe $z + z'$ et $z - z'$.
b. $OP^2 + MM'^2 = 2(OM^2 + OM'^2)$.

71 **a.** $|-1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ donc

$\left|(-1+i)^2\right| = 2$ et $\arg\left((-1+i)^2\right) = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

b. $|1-i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ donc

$\left|(1-i)^5\right| = 4\sqrt{2}$ et $\arg\left((1-i)^5\right) = \frac{-5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

c. $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $\arg\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$;

$|2+2i| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ donc

$\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2+2i}\right| = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2+2i}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\ (2\pi)$.

72 **a.** $\left|\sqrt{3}+i\right| = 2$; $|i| = 1$ donc $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{i}\right| = 2$

b. $\left|1-i\sqrt{3}\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$ donc $\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right| = 1$

c. $\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)^4\right| = \left|1-i\sqrt{3}\right|^4 = 2^4 = 16$;

$\left|(1+i)^3\right| = |1+i|^3 = 2\sqrt{2}$ donc $\left|\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4}{(1+i)^3}\right| = 4\sqrt{2}$

73 **a.** $|2-2i| = 2\sqrt{2}$; $\left|\sqrt{3}-i\right| = 2$ donc $\left|\frac{2-2i}{\sqrt{3}-i}\right| = \sqrt{2}$
b. $\left|(2-2i)^3\right| = |2-2i|^3 = 16\sqrt{2}$;

$\left|\left(\sqrt{3}-i\right)^2\right| = \left|\sqrt{3}-i\right|^2 = 4$ donc $\left|(2-2i)^3\left(\sqrt{3}-i\right)^2\right| = 64\sqrt{2}$

c. $\left|\left(\sqrt{3}-i\right)^4\right| = \left|\sqrt{3}-i\right|^4 = 2^4 = 16$;

$\left|(2-2i)^3\right| = |2-2i|^3 = 16\sqrt{2}$ donc $\left|\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^4}{(2-2i)^3}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

74 $|z| = |z^2| \Leftrightarrow |z| = |z|^2 \Leftrightarrow |z|(1-|z|) = 0$ donc
$|z| = |z^2| \Leftrightarrow |z| = 0$ ou $|z| = 1$.
L'ensemble cherché est donc la réunion du cercle de centre O et de rayon 1 et du point O.

75 **a.** $\arg((1-i)z) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ donc

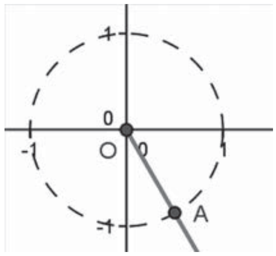
$z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$.

b. $\arg\left(\frac{z}{1-i}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

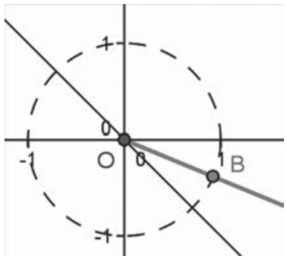
$\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ donc

$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i$.

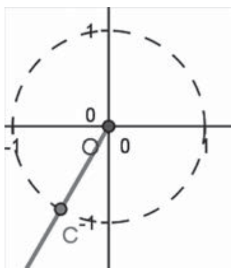
76 **a.** $\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$
L'ensemble cherché est la demi-droite]OA).



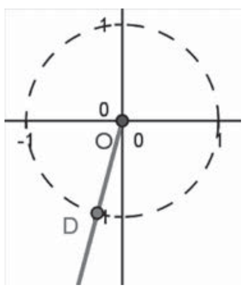
b. $\arg(z^2) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{8}\ (2\pi)$.
L'ensemble cherché est la demi-droite]OB).



c. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.
L'ensemble cherché est la demi-droite]OC).



d. $\arg((1+i)z) = \frac{-\pi}{3}\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{7\pi}{12}\ (2\pi)$.
L'ensemble cherché est la demi-droite]OD).



77 $\arg\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

a. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ réel $\Leftrightarrow n\frac{\pi}{3} = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow n = 3k$.

Les entiers naturels n cherchés sont multiples de 3.
b. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ imaginaire pur $\Leftrightarrow n\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow n = 3k + \dfrac{3}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$.
Aucun entier naturel ne peut être solution.

78 **1.** $|z'| = \left|\dfrac{-2}{z}\right| = \dfrac{|-2|}{|z|} = \dfrac{2}{|z|}$ et

$\arg(z') = \arg(-2) - \arg(z) = \pi - \arg(z)\ (2\pi)$

2. a. $z' \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z') = 0\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) = \pi\ (2\pi)$.
L'ensemble cherché est la demi-droite $(O\,;-\vec{u})$.

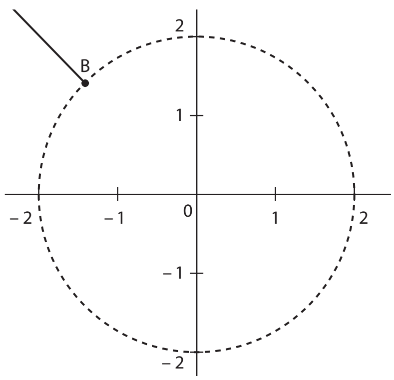
b. $z' \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z') = 0\ (\pi) \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ (\pi)$.
L'ensemble cherché est l'axe $(O\,;\vec{u})$.

c. $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z') = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$.
L'ensemble cherché est l'axe $(O\,;\vec{v})$.

3. a. $OM \leqslant 2 \Leftrightarrow |z| \leqslant 2 \Leftrightarrow |z'| \geqslant 2$.
L'ensemble cherché est le plan complexe privé du disque de centre O et de rayon 2.

b. $M \in\,]OA] \Leftrightarrow \begin{cases} |z| \leqslant 2 \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| \geqslant 2 \\ \arg(z') = \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases}$

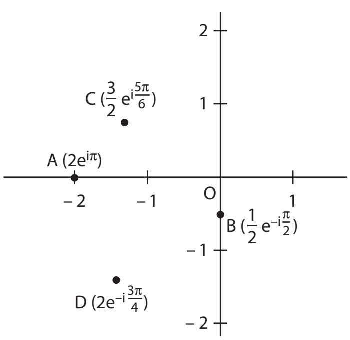
L'ensemble cherché est la demi-droite d'origine B d'affixe $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ représentée ci-dessous.



79 $A\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$; $B\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$; $C\left(\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}\right)$; $D\left(2e^{i\frac{-3\pi}{4}}\right)$;
$E\left(\dfrac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$; $F(2e^{i\pi})$.

80 $-4 = 4e^{i\pi}$; $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$; $5 = 5e^{i0}$; $-8i = 8e^{i\frac{-\pi}{2}}$;
$-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$; $1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$.

81



82 $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $-3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$;

$\dfrac{2i}{1+i} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

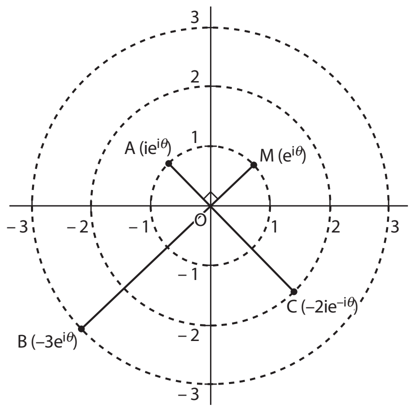
83 **1.** $-\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2. $-\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$
et $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

84 Voir corrigé en fin de manuel.

85 **1.** $ie^{i\theta} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$ $-3e^{i\theta} = 3e^{i\,(\theta+\pi)}$ $-2ie^{i\theta} = 2e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$

2.



86 $z = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}\ e^{i\frac{\pi}{7}} = \sqrt{2}\ e^{i\frac{11\pi}{28}}$

87 Voir corrigé en fin de manuel.

88 **a.** Vrai **b.** Faux $\left(-\dfrac{11\pi}{12}\right)$ **c.** Vrai **d.** Vrai

89 $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = \left(e^{i2\pi}\right)^3 = 1^3 = 1$.

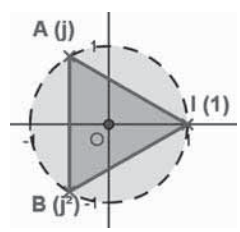
$1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$.

2. $j^2 = -1 - j = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$

$1 + j + j^2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{j} + 1 + j = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{j} - j^2 = 0$

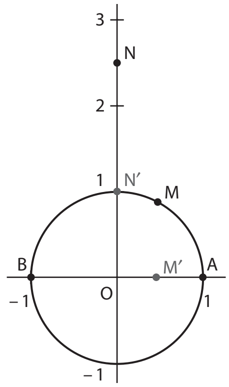
Ainsi $\dfrac{1}{j} = \bar{j} = j^2$.

3. $AB = \left|j^2 - j\right| = \sqrt{3}$
$IA = \left|j - 1\right| = \sqrt{3}$
$IB = \left|j^2 - 1\right| = \sqrt{3}$
AIB est équilatéral.



90 **1. a.** Lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB], M′ semble appartenir au segment [AB].

b. Lorsque M décrit la médiatrice de [AB], M′ semble appartenir à lui-même à la médiatrice de [AB].



2. a. $M \in \Gamma \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Il existe donc un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$.

b. $z' = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \dfrac{1}{2} \times 2\cos\theta = \cos\theta$.

z' est donc en réel appartenant à $[-1\,;1]$ donc M′ est un point du segment [AB].

3. $z' = \dfrac{1}{2}\left(yi + \dfrac{1}{yi}\right) = \dfrac{1}{2}i\left(y - \dfrac{1}{y}\right)$, $y \in \mathbb{R}^*$.

y	$-\infty$	0	$+\infty$
$f : y \mapsto y + \dfrac{1}{y}$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

M′ appartient donc à la médiatrice de [AB].

91 **1.** Soit z solution de l'équation (E) : $z^4 = -4$.
$(-z)^4 = z^4 = -4$; on a $z^4 = -4$ donc $\overline{z}^4 = -4$ d'où $\overline{z}^4 = -4$.

2. a. $z_0 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4 e^{i\pi} = 4 \times (-1) = -4$ donc $z_0 = 1 + i$ est solution de (E).

3. Les quatre solutions de (E) sont donc $z_0 = 1 + i$, $-z_0 = -1 - i$, $\overline{z}_0 = 1 - i$ et $-\overline{z}_0 = -1 + i$.

92 **1.** $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$; $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{6}}$ donc $\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{-\pi}{12}}$.

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) + i\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)}{4}$

3. Par identification, on obtient :

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$; $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$;

$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

93 **1.** $z_1 = \sqrt{2}(1 + i) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2} = e^{i\frac{-\pi}{6}}$ donc $\dfrac{z_1}{z_2} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{4}$

3. Par identification, on obtient :

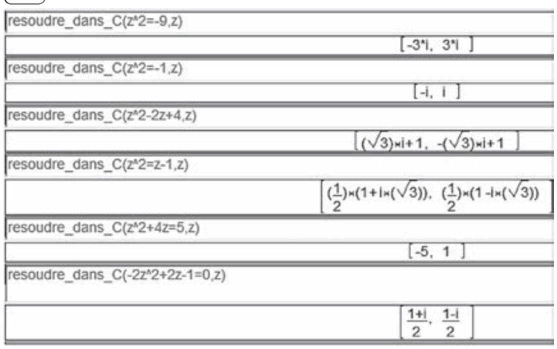
$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{6}}{4}$.

94 **1.** $e^{i2a} = \cos 2a + i\sin 2a$.
2. $e^{ia} = \cos a + i\sin a$ donc
$(e^{ia})^2 = \cos^2 a + 2i\sin a\cos a - \sin^2 a$.
3. $e^{i2a} = (e^{ia})^2$ donc $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

95 **1.** $e^{i3t} = \cos 3t + i\sin 3t$;
$(e^{it})^3 = \cos^3 t + 3i\sin t\cos^2 t - 3\sin^2 t\cos t - i\sin^3 t$.
Donc $\cos 3t = \cos^3 t - 3\sin^2 t\cos t$ et
$\sin 3t = 3\sin t\cos^2 t - \sin^3 t$.
2. À l'aide de l'égalité $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on a :
$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ et $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$.

96 Voir corrigé en fin de manuel.

97



98 $a(z^2 - 2z + 2) = 0$.

99 **a.** Deux solutions : $\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$ et $\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$.
b. Quatre solutions : $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}i$ et $-\sqrt{3}i$.
c. Deux solutions : $(3 + 2i\,; 3 - 2i)$; $(3 - 2i\,; 3 + 2i)$.

100 **1.** $n = 1$ est solution de (E) : $z^3 + z^2 - 2 = 0$.
2. $z^3 + z^2 - 2 = (z - 1)(z^2 + 2z + 2)$.
3. Trois solutions : $1, 1 + i$ et $1 - i$.

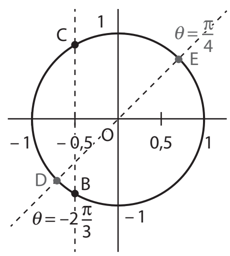
101 $\Delta = -4\sin^2(2a)$ (strictement négatif) ;
deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = -1 + e^{i2a}$ et $z_2 = -1 + e^{-i2a}$.

102 **1.** $\Delta = -4\sin^2\theta$. Solutions : $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$.

2. B et C sont les points images des solutions pour $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$.

D et E sont les points images des solutions pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Le cercle de centre O et de rayon 1.

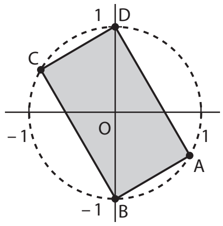


103 **1.** **a** et **b.** $z = 2\mathrm{i}$ donc $|z| = 2$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

2. $|z| = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ et $\arg(z) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

3. Le triangle ABC est un triangle rectangle direct en A, tel que AC = 2AB.

104 **1.** OA = OB = 1 et $\mathrm{AB} = |z_\mathrm{A}|\left|-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ donc OAB est un triangle équilatéral.

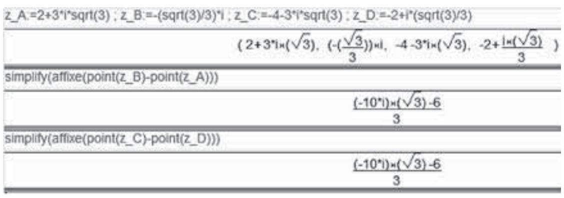


2. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ont la même affixe $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ donc ABCD est un parallélogramme.
Puisque AC = BD = 2, ABCD est un rectangle.

105 Voir corrigé en fin de manuel.

106 D'après les calculs effectués par le logiciel, le cercle a pour centre le point K d'affixe $-\dfrac{1}{2}$.
L'instruction abs $(z_\mathrm{C} - z_\mathrm{K})$ indique le module du complexe $z_\mathrm{C} - z_\mathrm{K}$ donc $\mathrm{KC} = \dfrac{3}{2}$.
Puisque le rayon du cercle est égal à $\mathrm{KA} = \dfrac{3}{2}$, on peut affirmer que C appartient au cercle de diamètre [AB].

107 **1.**



```
z_A:=2+3*i*sqrt(3) ; z_B:=-(sqrt(3)/3)*i ; z_C:=-4-3*i*sqrt(3) ; z_D:=-2+i*(sqrt(3)/3)
```
$$\left(2+3\cdot\mathrm{i}\cdot(\sqrt{3}),\ (-(\tfrac{\sqrt{3}}{3}))\cdot\mathrm{i},\ -4-3\cdot\mathrm{i}\cdot(\sqrt{3}),\ -2+\tfrac{\mathrm{i}\cdot(\sqrt{3})}{3}\right)$$
```
simplify(affixe(point(z_B)-point(z_A)))
```
$$\frac{(-10\cdot\mathrm{i})\cdot(\sqrt{3})-6}{3}$$
```
simplify(affixe(point(z_C)-point(z_D)))
```
$$\frac{(-10\cdot\mathrm{i})\cdot(\sqrt{3})-6}{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2.

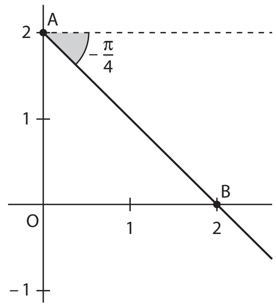
```
simplify((z_D-z_B)/(z_C-z_A))
```
$$\frac{(-\mathrm{i})\cdot(\sqrt{3})}{9}$$

$\dfrac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}$ est donc un imaginaire pur, donc ABCD est un losange puisque les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires.

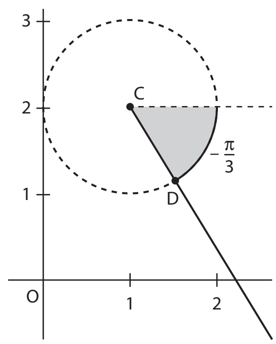
108 **a.** Cercle de centre le point A d'affixe 3, de rayon 4.
b. Cercle de centre le point B d'affixe – 1 + 2i, de rayon 5.
c. Médiatrice du segment [CD] où C est le point d'affixe 1 et D le point d'affixe 1 – 2i.
d. Médiatrice du segment [OE] où O est le point d'affixe 0 et E le point d'affixe 2 + i.

109 **a.** Soit M′ le point d'affixe $\overline{z}$. M et M′ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
Soit I le point d'affixe 1 et A le point d'affixe 1 – 3i.
$\mathrm{MI} = |1 - z| = \mathrm{M'I} = |1 - \overline{z}|$
$|\overline{z} - 1 + 3\mathrm{i}| = |1 - z| \Leftrightarrow |\overline{z} - 1 + 3\mathrm{i}| = |1 - \overline{z}|$.
Les points M′ appartiennent donc à la médiatrice du segment [AI] c'est-à-dire à la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}$.
Les points M cherchés appartiennent donc à la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}$.
b. $|\mathrm{i}z| = |1 - z| \Leftrightarrow |z| = |1 - z|$. L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [OI].
c. Posons $z = x + y\mathrm{i}$.
$|z + 4 - 2\mathrm{i}| = |2 - \mathrm{i} - \overline{z}| \Leftrightarrow 12x - 2y + 15 = 0$.
L'ensemble cherché est la droite d'équation $y = 6x + \dfrac{15}{2}$.
d. $|\mathrm{i}z - 2| = |\mathrm{i}(z + 2\mathrm{i})| = |\mathrm{i}||z + 2\mathrm{i}| = |z + 2\mathrm{i}|$.
L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [OD] où D est le point d'affixe – 2i.

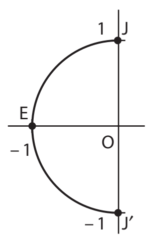
110 **a.** Demi-droite [AB), privée de A d'affixe 2i.
B est le point ayant pour affixe 2.



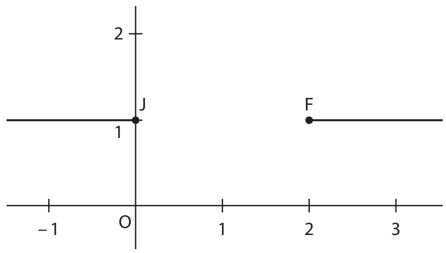
b. Demi-droite [CD), privée de C d'affixe 1 + 2i.
D est le point ayant pour affixe $1{,}5 + \mathrm{i}\left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.



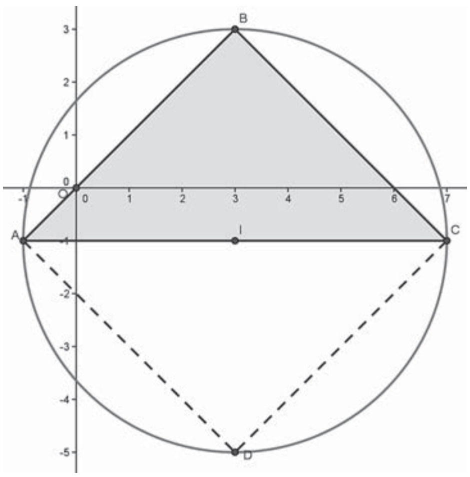
c. Demi-cercle de diamètre [JJ′], privé de J et J′ et contenant le point E d'affixe – 1. J et J′ sont les points d'affixes i et – i.



d. Droite (FJ) privée du segment [FJ], F point d'affixe $2+i$.



111 **1.**



2. $z_B = 3+3i$.

$\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = i$ donc

BC = BA et $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

3. ABCD carré $\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D = 3-5i$.

4. I est le centre du carré ABCD.

a. IA = 4 donc A, B, C et D appartiennent à Γ.

b. $|z-3+i| = 4 \Leftrightarrow$ MI = 4.

Γ est le cercle de centre I et de rayon 4.

112 Soit A et B les points d'affixes $3i$ et $1+i$.

a. $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z') = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ donc $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)\dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$.

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

b. $z' \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z') = \pi\ (2\pi) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \pi\ (2\pi)$ $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = \pi\ (2\pi)$.

L'ensemble cherché est le segment [AB] privé de A et B.

113 Soit A et B les points d'affixes $1+2i$ et i.

a. $|z'| = 1 \Leftrightarrow |z-(1+2i)| = |z-i| \Leftrightarrow$ AM = BM.

L'ensemble cherché est la médiatrice de [AB].

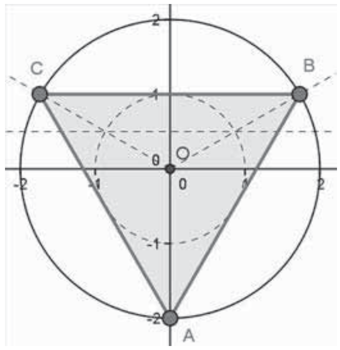
b. $z' \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z') = 0\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0\ (2\pi) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = 0\ (2\pi)$.

L'ensemble cherché est la droite (AB) privée de [AB].

114 **a.** $z_A = 2e^{i-\frac{\pi}{2}}$; $z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b. et **c.** A, B et C appartiennent donc au cercle Γ de centre O et de rayon 2.



2. $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$

3. $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ donc AB = AC.

$\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$ donc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

ABC est donc un triangle équilatéral.

115 **1.** $P(z) = (z-2)(2z^2 - 6z + 9)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$ ou $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont pour affixe $-3i$ donc ABCD est un parallélogramme.

$\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = i$ donc BC = BA et $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc ABCD est un carré.

116

factoriser_sur_C(2*z^3-10*z^2+21*z-18)
i×(z-2)×((1-i)×z-3)×((1-i)×z+3*i)
resoudre_dans_C(2*z^3-10*z^2+21*z-18=0,z)
[2, (3+3*i)/2, (3-3*i)/2]
z_A:=3/2+3/2*i ; z_B:=3/2-3/2*i ; z_C:=-z_A ; z_D:=i*z_A
(3/(1-i), -3*i/(1-i), -3/(1-i), 3*i/(1-i))
z_B - z_A ; z_C - z_D
(-3*i, -3*i)
(z_C-z_B)/(z_A-z_B)
i

117 **1. a.** $x' = \dfrac{-(x-4)(y+4) + xy}{(x-4)^2 + y^2} = \dfrac{-4x + 4y + 16}{(x-4)^2 + y^2}$

et $y' = \dfrac{y(y+4) + x(x-4)}{(x-4)^2 + y^2} = \dfrac{x^2 + y^2 - 4x + 4y}{(x-4)^2 + y^2}$.

b. $M \in E \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$.

L'ensemble E est donc le cercle de centre I d'affixe $2-2i$ et de rayon $2\sqrt{2}$ privé du point A d'affixe 4.

2. $z' = \dfrac{i(z+4i)}{z-4} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z+4i}{z-4}$ imaginaire pur.

Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe – 4i.

$\dfrac{z+4i}{z-4}$ imaginaire pur

$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi).$

L'ensemble E est donc le cercle de diamètre [AB], privé de A, donc de centre I d'affixe 2 – 2i et de rayon $2\sqrt{2}$.

118 Soit A et B les points d'affixes i et 1.

a. Vrai (droite (AB) privée de A)

b. Faux (médiatrice de [AB])

c. Faux (cercle)

d. Faux (droite (AB) privée de A)

e. Vrai (droite (AB) privée de A)

119 Condition nécessaire et suffisante.

$\dfrac{1}{z} = \bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$

120 Condition nécessaire.

z solution de l'équation $z^2 - z + 3 = 0$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ ou $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. Ainsi, $\text{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$.

121 Condition suffisante uniquement.

En effet, si z est réel, $\bar{z}^2 - z$ est un réel (évident).

Si $\text{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$, $\bar{z}^2 - z$ est un réel.

122 **a.** $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ (égalité incorrecte)

b. $AB = |2 - i|$ (distance et module)

c. $|z_B| = \sqrt{10}$

d. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ (angle et argument).

APPROFONDISSEMENT

153 Dans l'exercice, on note $z = x + iy$ (x, y réels)

a. Vrai : après calcul, $\text{Im}(z) \leqslant \text{Re}((1+i)z) \Leftrightarrow y \leqslant \dfrac{1}{2}x$

b. Vrai : après calcul, $\text{Im}(z) \leqslant \text{Im}((1+i)\bar{z}) \Leftrightarrow y \leqslant \dfrac{1}{2}x$

c. Vrai :

$$|z-5| \leqslant |1-3-4i| \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 \leqslant (x-3)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow y \leqslant \dfrac{1}{2}x$$

d. Faux :

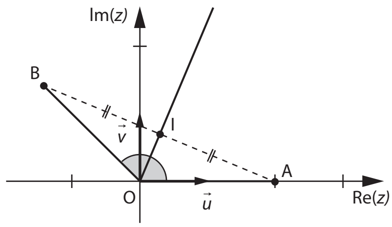
$$|z+4-3i| \leqslant |z+5i| \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-3)^2 \leqslant x^2 + (y+5)^2 \Leftrightarrow y \geqslant \dfrac{1}{2}x$$

e. Vrai :

$$|z-1+2i| \leqslant |z+1-2i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leqslant (x+1)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow y \leqslant \dfrac{1}{2}x$$

154 **1.** $S = \left\{2\,; -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\,; -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right\}$

2. a.



b. $|z_A| = |z_B|$ donc OA = OB. Le triangle OAB étant isocèle en O, la médiane [OI] est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ (et la médiatrice de [AB]).

c. Dans le triangle OAB, $\widehat{O} = \arg z_B = \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

Par la somme des angles d'un triangle,

$\widehat{A} = \widehat{B} = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \widehat{O}\right) = \dfrac{\pi}{8}(2\pi).$

d. $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{AI}{OA}$. Or $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{i\sqrt{2}}{2}$

donc $AI = |z_I - z_A| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Au final, $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

157 **1. a.** Voir fichier sur le site Math'x.

b. Il semble que O, M et S soient alignés.

2. Soit $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0\,;2\pi[$).

$$\text{Alors } \dfrac{1+z+z^2}{z} = \dfrac{1}{z} + 1 + z = \dfrac{1}{e^{i\theta}} + 1 + e^{i\theta} = \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + 1 = 2\cos\theta + 1 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $\dfrac{z_{\overrightarrow{OS}}}{z_{\overrightarrow{OM}}} \in \mathbb{R}$: les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OS}$ sont donc colinéaires, la conjecture est démontrée.

158 **1.** Voir fichier sur le site Math'x : il semble que (MP) ⊥ (NQ) et que MP = NQ.

2. a. $\dfrac{b-m}{a-m}$ est le nombre complexe de module $\dfrac{BM}{AM} = 1$ et d'argument $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$: c'est donc le nombre i.

On en déduit que $m = \dfrac{b - ia}{1-i}$.

b. De même, on déduit que $n = \dfrac{c - ib}{1-i}$, $p = \dfrac{d - ic}{1-i}$ et $q = \dfrac{a - id}{1-i}$.

c. En simplifiant par $1 - i$,

$$\dfrac{p-m}{n-q} = \dfrac{(d-ic)-(b-ia)}{(c-ib)-(a-id)} = \dfrac{(d-b)+i(a-c)}{(c-a)+i(d-b)} = -i.$$

Donc $\left|\dfrac{p-m}{n-q}\right| = \dfrac{\text{MP}}{\text{NQ}} = 1$ et

$\arg\left(\dfrac{p-m}{n-q}\right) = \left(\overrightarrow{\text{QN}}, \overrightarrow{\text{MP}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Les conjectures sont démontrées.

159 **1.** $z_1 = (x+y-2) + \mathrm{i}(x-y)$ et $z_2 = (y+2) + \mathrm{i}(x+1)$ sont les affixes respectives de M_1 de M_2.

O, M_1, M_2 sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OM}_1}$ et $\overrightarrow{\text{OM}_2}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow (x+y-2)(x+1) - (x-y)(y+2) = 0.$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0.$

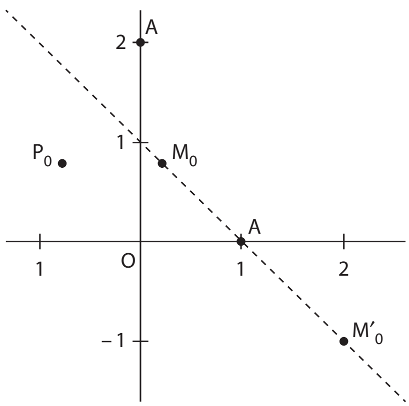
2. $2\text{AM}^2 = 13 \Leftrightarrow 2\left(\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2\right) = 13$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y = 7.$

L'ensemble E est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{\dfrac{13}{2}}$.

160 **1.** $|z_0| = 1$; $\arg(z_0) = \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

2. a.



b. $\overrightarrow{\text{AM}_0}$ a pour affixe z_0.

$\overrightarrow{\text{AM}'_0}$ a pour affixe $z_0^2 - 1 = -\mathrm{i} + 1$.

$\overrightarrow{\text{AM}_0} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\text{AM}'_0}$.

Les points A, M_0 et M'_0 sont donc alignés.

3. A, M, M′ alignés $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_{\text{M}'} - z_{\text{A}}}{z_{\text{M}} - z_{\text{A}}}\right) = 0\ (\pi)$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_{\text{M}'} - z_{\text{A}}}{z_{\text{M}} - z_{\text{A}}}$ réel $\Leftrightarrow \dfrac{z^2+1}{z}$ réel $\Leftrightarrow (z^2+1)\overline{z}$ réel

$\Leftrightarrow (x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 + 1)(x - y\mathrm{i})$ réel

$\Leftrightarrow x^2y + y^3 - y = 0 \Leftrightarrow y(x^2 + y^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ puisque $y \neq 0$.

161 **1.** Vrai

2. Faux (droite (OA))

3. Vrai

4. Vrai

5. Faux $\left(\text{MM}' = \dfrac{1}{2}\text{OM}_3\right)$

6. Vrai

162 **1.** $u_1 = \mathrm{i}$, $u_2 = -1$, $u_{20} = 1$, $u_{21} = \mathrm{i}$ et $u_{22} = -1$.

2. On procède par disjonction de cas : pour $k \in \mathbb{N}$, $u_{4k} = 1$, $u_{4k+1} = \mathrm{i}$, $u_{4k+2} = -1$ et $u_{4k+3} = -\mathrm{i}$.

3. a. On utilise la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique (réelle).

$S_n = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

soit $S_n = 1 \times \left(\dfrac{1 - \mathrm{i}^{n+1}}{1 - \mathrm{i}}\right) = \dfrac{1 - \mathrm{i}^{n+1}}{1 - \mathrm{i}}$.

b. En utilisant le conjugué du dénominateur, on trouve $S_n = \dfrac{(1 - \mathrm{i}^{n+1})(1+\mathrm{i})}{2} = \dfrac{1 + \mathrm{i} - \mathrm{i}^{n+1} - \mathrm{i}^{n+2}}{2}$.

On procède à nouveau par disjonction de cas : pour $k \in \mathbb{N}$, $S_{4k} = 0$, $S_{4k+1} = \mathrm{i}$, $S_{4k+2} = -1 + \mathrm{i}$ et $S_{4k+3} = -1$.

163 **1.** $z_1 = \dfrac{3 - \mathrm{i}}{10}$ et $z_2 = \dfrac{5 - 2\mathrm{i}}{29}$.

2. a. $\text{Re}(f(z)) = \dfrac{2a^2 + 2b^2 + a}{(2a - b + 1)^2 + (a + 2b)^2}$

et $\text{Im}(f(z)) = \dfrac{-a^2 - b^2 + b}{(2a - b + 1)^2 + (a + 2b)^2}$.

b. c. Voir fichier sur le site Math'x.

3. a. $z_1 = 0{,}3 - 0{,}1\mathrm{i}$; $z_2 = 0{,}17241379 - 0{,}068965517\mathrm{i}$;

$z_3 = 0{,}39999999 - 0{,}19999999\mathrm{i}$ et

$z_4 = 0{,}2 - 0{,}09999998\mathrm{i}$.

b. $\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1}{z_2} - \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{z_3} - \dfrac{1}{z_2} = 2 + \mathrm{i}$

c. On peut conjecturer que $\dfrac{1}{z_{n+1}} - \dfrac{1}{z_n} = 2 + \mathrm{i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. a. On peut d'abord vérifier l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en montrant, par récurrence, que z_n n'est jamais nul.

Puis, pour $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{z_{n+1}} - \dfrac{1}{z_n} = \dfrac{1 + z_n(2+\mathrm{i})}{z_n} - \dfrac{1}{z_n} = \dfrac{z_n(2+\mathrm{i})}{z_n} = 2 + \mathrm{i}.$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison $2 + \mathrm{i}$.

b. Par analogie avec les suites réelles, on écrit :

$u_n = u_0 + n(2 + \mathrm{i})$ soit $\dfrac{1}{z_n} = 1 + n(2 + \mathrm{i})$

et $z_n = \dfrac{1}{2n + 1 + n\mathrm{i}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

164 **A. 1.** $\overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{\text{OM}'} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z'\overline{z}) = 0$ car $\text{Re}(z'\overline{z}) = xx' + yy'$.

2. O, M, M′ alignés $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = 0\ (\pi) \Leftrightarrow \dfrac{z'}{z}$ réel $\Leftrightarrow z'\overline{z}$ réel $\Leftrightarrow \text{Im}(z'\overline{z}) = 0$.

B. 1. $\text{Re}(z'\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}\left((z^2 - 1)\overline{z}\right) = 0$

$\text{Re}(z^2 - 1)\overline{z} = x^3 + xy^2 - x = x(x^2 + y^2 - 1)$.

L'ensemble recherché est la réunion de l'axe des imaginaires et du cercle de centre O et de rayon 1.

2. a. $\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\dfrac{\left(z^2-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)}{z^2}=-\dfrac{\left|z^2-1\right|^2}{z^2}$ et

$-\bar{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2=-\bar{z}^2\dfrac{\left|z^2-1\right|^2}{z^2\bar{z}^2}=-\dfrac{\left|z^2-1\right|^2}{z^2}$ d'où l'égalité.

b. O, M′, P alignés $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)\right)=0$

O, M′, P alignés $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(-\bar{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2\right)=0$

O, M′, P alignés $\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2\operatorname{Im}\left(-\bar{z}^2\right)=0$

O, M′, P alignés $\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2=0$ ou $\operatorname{Im}\left(-x^2+2xyi+y^2\right)=0$

O, M′, P alignés $\Leftrightarrow \dfrac{1}{z^2}-1=0$ *ou* $xy=0$

O, M′, P alignés $\Leftrightarrow z=1$ ou $z=-1$ ou $x=0$ ou $y=0$.

L'ensemble cherché est donc la réunion de l'axe des réels et de l'axe des imaginaires privé de O.

165 **A. 1.** z' réel $\Leftrightarrow y'=0 \Leftrightarrow -2y=0 \Leftrightarrow y=0$.

E est donc l'axe des abscisses privé de A.

2. z' imaginaire pur $\Leftrightarrow x'=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$.

G est le cercle de centre I d'affixe 1 et de rayon 1, privé de A.

B. 1. $|z'|=\left|\dfrac{z}{z-2}\right|=\dfrac{\text{OM}}{\text{AM}}$.

$|z'|=1 \Leftrightarrow \text{OM}=\text{AM}$.

I est donc la médiatrice de [OA].

2. $\arg(z')=\arg\left(\dfrac{z}{z-2}\right)=\left(\overrightarrow{\text{MA}},\overrightarrow{\text{MO}}\right)\ (2\pi)$

3. z' réel non nul $\Leftrightarrow \arg(z')=0\ (\pi) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{MA}},\overrightarrow{\text{MO}}\right)=0\ (\pi)$.

F est donc la droite (OA), c'est-à-dire l'axe des abscisses, privé de A et O.

E est donc l'axe des abscisses privé de A.

4. z' imaginaire pur non nul

$\Leftrightarrow \arg(z')=\dfrac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{MA}},\overrightarrow{\text{MO}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$.

H est le cercle de diamètre [OA], privé de O et A.

G est le cercle de diamètre [OA], privé de A.

C. 1. z' réel $\Leftrightarrow \dfrac{z}{z-2}$ réel

$\Leftrightarrow \dfrac{z}{z-2}=\overline{\left(\dfrac{z}{z-2}\right)} \Leftrightarrow \dfrac{z}{z-2}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}-2}$

z' réel $\Leftrightarrow z\bar{z}-2z=z\bar{z}-2\bar{z} \Leftrightarrow z=\bar{z}$.

E est donc l'axe des abscisses privé de A.

2. M′ $\in$ G $\Leftrightarrow z'$ imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{z}{z-2}\right)}=-\dfrac{z}{z-2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}-2}=-\dfrac{z}{z-2} \Leftrightarrow z\bar{z}-2\bar{z}=-z\bar{z}+2z$

$\Leftrightarrow 2z\bar{z}=2(z+\bar{z}) \Leftrightarrow 2|z|^2=4\operatorname{Re}(z)$.

$2|z|^2=4\operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow x^2+y^2-2x=0$.

G est le cercle de centre I d'affixe 1 et de rayon 1, privé de A.

166 **1.** Soit α réel. En utilisant les formules de duplication,

$$-2\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}}=-\mathrm{i}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=-\mathrm{i}(\sin\alpha+(1-\cos\alpha))=1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

2. a. x étant différent de $2k\pi$, a est différent de 1.

$C_n+\mathrm{i}S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\sum_{k=0}^{n}a^n$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de raison a et de premier terme 1.

Par conséquent, $C_n+\mathrm{i}S_n=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

b. En utilisant l'égalité de la question **1.** pour le numérateur et le dénominateur,

$$C_n+\mathrm{i}S_n=\frac{-2\mathrm{i}\sin\frac{(n+1)x}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)x}{2}}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x}{2}}}=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}nx}{2}}$$

donc $C_n=\operatorname{Re}\left(C_n+\mathrm{i}S_n\right)=\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(\dfrac{nx}{2}\right)$

et $S_n=\operatorname{Im}\left(C_n+\mathrm{i}S_n\right)=\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)$.

c. Si $x=\dfrac{\pi}{n}$, $\cos\left(\dfrac{nx}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, $\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

et, de plus, $\sin\dfrac{(n+1)\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2n}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2n}$.

Donc $C_n=0$ et $S_n=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

En reprenant les expressions initiales de C_n et S_n, on retrouve les deux égalités voulues.

167 **1.** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$; $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$.

Par addition, $2\cos\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ donc

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$.

Par soustraction, $2\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ donc

$\sin\theta=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$.

2.

$\cos^3\theta=\dfrac{1}{8}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3+3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2+\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3\right)$

donc $\cos^3\theta=\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}-3\theta}\right)$.

Ainsi, $\cos^3\theta=\dfrac{1}{4}(\cos3\theta+3\cos\theta)$.

3. De même,

$\sin^3\theta = -\dfrac{1}{8\mathrm{i}}\left((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\right)$

donc $\sin^3\theta = -\dfrac{1}{8\mathrm{i}}(e^{i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{i-3\theta})$.

Ainsi, $\sin^3\theta = -\dfrac{1}{4}(\sin 3\theta - 3\sin\theta)$.

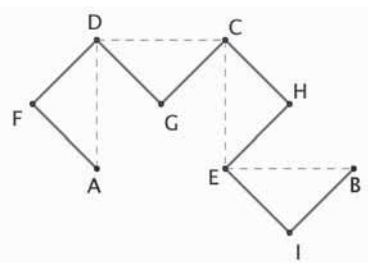
4. $\cos^4\theta = \dfrac{1}{16}\left((e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3(e^{-i\theta}) + 6(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^2 + 4(e^{i-\theta})^3(e^{i\theta}) + (e^{-i\theta})^4\right)$

donc $\cos^4\theta = \dfrac{1}{16}(e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{i-2\theta} + e^{i-4\theta})$.

Ainsi, $\cos^3\theta = \dfrac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$.

168 **1.** $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ est le nombre complexe de module $\dfrac{BC}{AC} = 1$ et d'argument $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$: c'est donc le nombre i. De l'égalité $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \mathrm{i}$, on tire la relation voulue.

2.



3. Pour $n = 0$, le programme appelle le segment [AB].
Pour $n = 1$, le programme appelle la procédure dragon pour les points A et C d'une part, B et C d'autre part. Chacun des appels permet le tracé des segments [AC] et [CB] (puisque n est décrémenté à 0).
Pour $n = 2$, de même, le programme trace les segments [AD], [DC], [CE] et [EB].

PROBLÈMES

169 **1.** $z_0 = \sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}$; $\quad z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$;

$z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{\frac{i\pi}{4}}$; $\quad z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{3i\pi}{4}}$

2. a. $|z_n| = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. $\arg z_{n+1} = \arg z_n + \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc, comme $(\arg z_n)$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{2}$, $\arg z_n = -\dfrac{3\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. $z_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3. $z_n = \dfrac{\sqrt{2}i^n}{n+1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc :

• si $n = 4k : x_n = y_n = -\dfrac{1}{n+1}$;

• si $n = 4k+1 : x_n = -y_n = \dfrac{1}{n+1}$;

• si $n = 4k+2 : x_n = y_n = \dfrac{1}{n+1}$;

• si $n = 4k+3 : x_n = -y_n = -\dfrac{1}{n+1}$.

4. 5. 6. Voir fichier sur le site Math'x.

170 **1. a.** $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right)$

$\arg\left(z' \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z') + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = \arg(1) = 0$

donc $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = -\arg(z')$

donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$.

b. $\arg\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1)$ d'après la question précédente.

$\arg\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = (\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_3}) - (\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2})$

$= (\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_3}) = (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})\ (2\pi)$.

2. $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ donc $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = |-\mathrm{i}| = 1$

soit AC = AB.

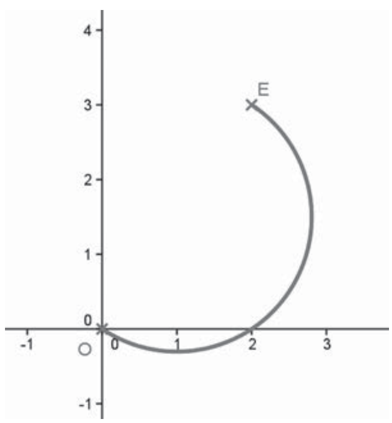
$\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(-\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$. ABC est donc un triangle rectangle isocèle indirect en A.

3. Soit E le point d'affixe $2 + 3\mathrm{i}$.

$\arg(z') = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MO}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

L'ensemble cherché est donc le demi-cercle de diamètre [OE], privé de O et E représenté ci-dessous.



171 **I. 1.** Posons $z = x + y\mathrm{i}$.

$z = -\bar{z} \Leftrightarrow x + y\mathrm{i} = -x + y\mathrm{i} \Leftrightarrow 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z = y\mathrm{i} \Leftrightarrow z$ imaginaire pur.

2. $z=\bar{z} \Leftrightarrow x+yi=x-yi \Leftrightarrow 2yi=0 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z=x \Leftrightarrow z$ réel.

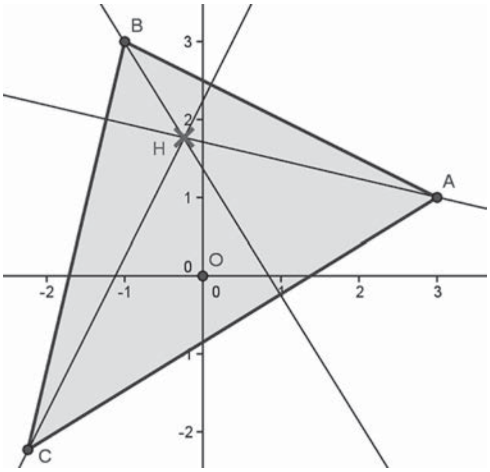
3. $z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2-i^2y^2=x^2+y^2$.

Puisque $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, on a bien : $z\bar{z}=|z|^2$.

II. 1. OA $=|3+i|=\sqrt{10}$; OB $=|-1+3i|=\sqrt{10}$;

OC $=\left|-\sqrt{5}+\sqrt{5}i\right|=\sqrt{10}$ donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. H a pour affixe $(2-\sqrt{5})+i(4+\sqrt{5})$.



III. 1. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si OA = OB = OC.

OA = OB = OC $\Leftrightarrow |a|=|b|=|c| \Leftrightarrow |a|^2=|b|^2=|c|^2$
$\Leftrightarrow a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}$.

2. a. $\bar{\omega}=\overline{\bar{b}c-b\bar{c}}=\overline{\bar{b}c}-\overline{b\bar{c}}=\bar{\bar{b}}\bar{c}-\bar{b}\bar{\bar{c}}=b\bar{c}-\bar{b}c$
donc $\bar{\omega}=-\omega$. ω est un imaginaire pur.

b. $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})=b\bar{b}-b\bar{c}+c\bar{b}-c\bar{c}=\bar{b}c-b\bar{c}$
car $b\bar{b}=c\bar{c}$ donc $\omega=(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$.

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{(b+c)\overline{(b-c)}}{(b-c)\overline{(b-c)}}=\frac{(b+c)(\bar{b}-\bar{c})}{|b-c|^2}=\frac{\omega}{|b-c|^2}.$$

c. $|b-c|^2$ étant un réel strictement positif et ω un imaginaire pur, $\frac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur.

3. $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}},\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right)=\arg\left(\frac{a+b+c-a}{b-c}\right)=\arg\left(\frac{b+c}{b-c}\right)=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

donc la droite (AH) est une hauteur du triangle ABC, tout comme la droite (BH). H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

173 Cette équation du second degré, à coefficients réels, a pour discriminant $\Delta=36(\cos^2\theta-1)=-(6\sin\theta)^2\leqslant 0$ et ce, quelle que soit la valeur de θ dans $[0\,;2\pi]$.

Les solutions sont de la forme $z=3(\cos\theta\pm i\sin\theta)$.

Par exemple, $z_1=3e^{-i\theta}$ et $z_2=\bar{z}_1=3e^{i\theta}$.

Par conséquent, les deux points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$, symétriques par rapport à l'axe des réels, décrivent le cercle de centre O et de rayon 3.

175 Si $|z|=1$, $\frac{z+1}{z-1}=\frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{|z-1|^2}=\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z-1|^2}$ donc $\frac{z+1}{z-1}$ est un réel.

177 **1.** On se place dans le repère complexe $\left(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right)$.

Alors $\alpha+\beta+\gamma=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right)$
$=\arg z_{\overrightarrow{\mathrm{AE}}}+\arg z_{\overrightarrow{\mathrm{BE}}}+\arg z_{\overrightarrow{\mathrm{CE}}}\ (2\pi)$.

En utilisant les propriétés de l'argument,
$\alpha+\beta+\gamma=\arg[(3+i)(2+i)(1+i)]\ (2\pi)$.

Ainsi, $\alpha+\beta+\gamma=\arg 10i=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

2. En procédant de même, on obtient cette fois :

$\alpha+\beta+\gamma=\arg[(8+i)(5+i)(2+i)]=\arg(65+65i)=\frac{\pi}{4}(2\pi)$.

178 Posons $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\,]0\,;2\pi[$.

À partir de $Z=\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$, on factorise au numérateur et au dénominateur par $e^{\frac{i\theta}{2}}$:

$$Z=\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}$$

Au final, $Z=-i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ est donc un nombre imaginaire pur.

179 En posant $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ (x, y réels non tous nuls et x', y' réels non tous nuls), la condition s'écrit aussi : $(x+x')^2+(y+y')^2=(x-x')^2+(y-y')^2$ soit $2xx'+2yy'=-2xx'-2yy'$, ce qui revient finalement $xx'+yy'=0$. On retrouve bien l'expression analytique d'un produit scalaire nul et donc l'orthogonalité des droites (OM) et (OM′). L'affirmation est vraie.

180 Un premier cas où les trois points sont alignés est celui où deux au moins des points sont confondus :

- $z=z^2\Leftrightarrow z=0$ ou $z=1$
- $z^2=z^4\Leftrightarrow z^2(1-z^2)=0\Leftrightarrow z=0$ ou $z=1$ ou $z=-1$
- $z=z^4\Leftrightarrow z(1-z^3)=0\Leftrightarrow z(1-z)(1-z+z^2)=0\Leftrightarrow z=0$

ou $z=1$ ou $z=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ ou $z=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Supposons maintenant que les trois points sont deux à deux distincts donc que z est différent des valeurs trouvées ci-dessus.

Alors les points sont alignés si et seulement si $\frac{z^4-z^2}{z^2-z}$ est réel.

Or $\frac{z^4-z^2}{z^2-z}=z(z+1)=z^2+z$ car $z\neq 0$ et $z\neq 1$.

$z^2+z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2+z=\bar{z}^2+\bar{z}\Leftrightarrow(z-\bar{z})(z+\bar{z}+1)=0$

$\Leftrightarrow z=\bar{z}$ ou $\mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{2}$.

En rassemblant les différents cas :

Les nombres complexes tels que les points d'affixe z, z^2 et z^4 sont alignés sont les réels et les nombres complexes de partie réelle $-\frac{1}{2}$.

181 Notons $Z = \frac{z^4 - z}{z^2 - z}$. Remarquons déjà que Z n'existe que si $z \neq 0$ et $z \neq 1$.

Si $z = 0$ ou 1, les trois points sont confondus (donc alignés).

Sinon, $M_1(z)$, $M_2(z^2)$ et $M_4(z^4)$ sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_4}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow Z = k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im } Z = 0$.

Or $Z = \frac{z(z^3 - 1)}{z(z-1)}$ et en factorisant par $z - 1$ (1 est racine évidente), $z^3 - 1 = (z-1)(1 + z + z^2)$ et $Z = 1 + z + z^2$.

Ainsi, en posant $z = a + ib$ (a, b réels),

$\text{Im } Z = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(1 + z + z^2) = 0 \Leftrightarrow b + 2ab = 0$

$\Leftrightarrow b(1 + 2a) = 0$.

Les points sont donc alignés lorsque $z \in \mathbb{R}$ ou lorsque z est de la forme $-\frac{1}{2} + ib$ ($b \in \mathbb{R}$).

182 Posons $Z' = \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$. Alors $Z' = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{-i\theta}}$.

On remarque que Z′ est bien défini lorsque $\theta \neq 0$ (2π).

En reprenant le calcul fait à l'exercice 178, on trouve

$$Z' = i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Ainsi, Z'^n est réel $\Leftrightarrow$ i^n l'est $\Leftrightarrow$ n est pair.

183 En faisant une combinaison linéaire des deux lignes, le système est équivalent à l'équation suivante :

$i(\sin x + \sin y) + \cos x + \cos y = i\sin a + \cos a + 1$

$\Leftrightarrow e^{ix} + e^{iy} = e^{ia} + 1$.

• Cas 1 où $a = \pi$ (2π) : le membre de droite est nul et $x = \pi - y$ (2π).

• Cas 2 où $a \neq \pi$ (2π) : l'équation équivaut à

$e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}} + e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right) = e^{\frac{ia}{2}}\left(e^{\frac{ia}{2}} + e^{-\frac{ia}{2}}\right)$

$\Leftrightarrow e^{\frac{i(x+y)}{2}} \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = e^{\frac{ia}{2}} \cos\frac{a}{2}$.

En prenant le module de cette relation, on trouve $\left|\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| = \left|\cos\frac{a}{2}\right|$ d'où $x - y = \pm a$ (2π).

En prenant un argument de cette relation, on trouve $\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}$ (π) (car $\arg\left(\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) = 0$ ou π (2π)) d'où $x + y = a$ (2π).

• 1^er^ sous-cas : $x - y = a$ (2π) alors $x = a$ (2π) et $y = 0$ (2π).

• 2^e^ sous-cas : $x - y = -a$ (2π) alors $x = 0$ (2π) et $y = a$ (2π)

Accompagnement personnalisé

1 Choisir la bonne forme

1. $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $z_2 = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$;

$z_3 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$; $z_4 = -3 = 3e^{i\pi}$;

$z_5 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_6 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

$z_7 = 1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $z_8 = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

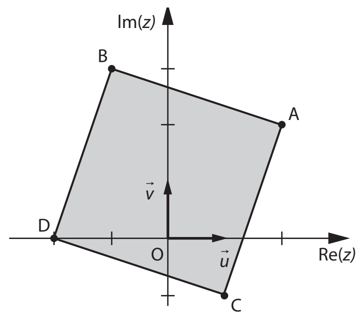
2. Pour calculer $z_5 + z_8$, $z_5 + \bar{z}_5$, $1 + z_1 + z_1^2$, on utilise la forme algébrique.

Pour calculer $z_2 z_6$, z_7^2, z_7^9, $\frac{z_2}{z_5}$, $|z_1 z_2 z_3|$ on utilise la forme exponentielle.

2 Étudier une configuration

Étape 1

a.



b. D semble avoir une affixe de -2.

Étape 2

a. $z_{\overrightarrow{AB}} = -3 + i$ et $z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - (1 - i)$

b. De $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}}$, on déduit $z_D = -2$.

Étape 3

1. a. $|z_B - z_A| = \sqrt{10} = AB$. De même, $AC = \sqrt{10}$ et $BC = \sqrt{20}$.

b. De $AB = AC = \sqrt{10}$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$, on déduit que ABC est rectangle isocèle en A.

2. a. $\overrightarrow{AB}(-3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;-3)$.

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3) \times (-1) + 1 \times (-3) = 0$ et

$AB = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} = AC$.

3. a. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ est le nombre complexe de module $\frac{AB}{AC}$ et d'argument $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

b. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3 + i}{-1 - 3i} = -i$. En identifiant module et argument, on trouve $\frac{AB}{AC} = 1$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2}$ (2π).

3 Gérer un QCM sur les nombres complexes

Question 1

1. Les quatre réponses proposées ont même partie réelle et même partie imaginaire, au signe près.

Par conséquent, elles ont même module.

2. $|z| = \frac{10}{3}$ et $z = \frac{8}{3} - 2\mathrm{i}$ (réponse d.)

Question 2

La réponse est : $y = -x$ (réponse b.)

Question 3

1. z réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow \arg z = 0\ (\pi)$.

La dernière condition semble la plus appropriée.

2. a. $\left(2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n = \left(4\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^n = 4^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$ donc

$\arg\left(2+2i\sqrt{3}\right)^n = \frac{n\pi}{3}\ (2\pi)$.

b. On doit résoudre l'équation $\frac{n\pi}{3} = k\pi$.

La solution est $n = 3k$ (réponse **c.**).

Question 4

1. En posant A(-2) et B(2i), $\arg\left(\frac{z+2}{z-2\mathrm{i}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)\ (2\pi)$.

2. a. L'égalité proposée fait penser à un cercle. On élimine donc les réponses **a.** et **c.** La bonne réponse est **d.**

Question 5

Pour répondre à la question, on peut essayer de tester chaque réponse (trop long) ou bien transformer l'équation proposée, qui devient une équation du second degré. La bonne réponse est **b.**

CHAPITRE 10

Droites, plans, vecteurs de l'espace

Pour reprendre contact

1 Avec des positions relatives

1. a. sécantes **b.** parallèles **c.** non coplanaires

d. parallèles **e.** sécantes **f.** parallèles

2. a. parallèles **b.** sécants **c.** parallèles

d. sécants **e.** sécants **f.** sécants

3. a. sécants suivant (AD) **b.** parallèles

c. sécants suivant (OO′) avec O centre de ABCD et O′ centre de EFGH **d.** sécants suivant (BD)

e. sécants suivant (II′) avec I centre de ADHE et I′ centre de BCGH **f.** parallèles

2 Avec le cube

a. faux **b.** faux **c.** vrai **d.** faux

3 Avec les vecteurs du plan

1. a. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{NP}$ donc M, N et P sont alignés.

2. a. $A(0\,;0)\,;B(1\,;0)\,;C(0\,;1)\,;M\left(0\,;\frac{3}{2}\right);N\left(\frac{3}{4}\,;0\right)$ et $P\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ car $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{MN}\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{NP}\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$.

c. $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$ donc M, N et P sont alignés.

Activité 1

A. 1. $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ donc IBKG est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG}$.

2. a. (IJ) est parallèle à (EF) donc (IJ) parallèle à (HG) et donc (IJ) et (HG) sont coplanaires. On en déduit que (IG) et (JH) sont dans le plan (IGH). De plus, (IG) et (JH) sont les droites d'intersection des plans parallèles (BFG) et (AEH) avec le plan (IGH) donc elles sont parallèles.

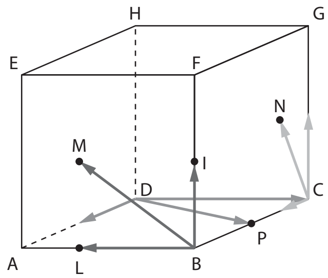
b. (JH) et (IG) sont parallèles et (IJ) et (HG) sont parallèles donc dans le plan (IGH), le quadrilatère non croisé IJHG est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{GH}$.

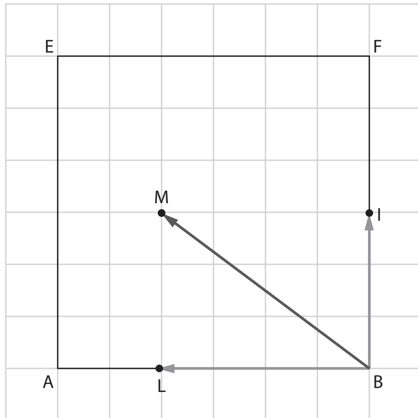
3. a. (BK) est parallèle à (IG) d'après 1. et (IG) est parallèle à (JH) d'après 2. donc (BK) est parallèle à (JH).

b. (JB) et (HK) sont les droites d'intersection des plans parallèles (ABF) et (DCG) avec le plan (BKH) donc elles sont parallèles. Comme de plus (BK) et (JH) sont parallèles, BJHK est un parallélogramme et $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{JH}$.

4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{KH}$.

B. 2. et **3**



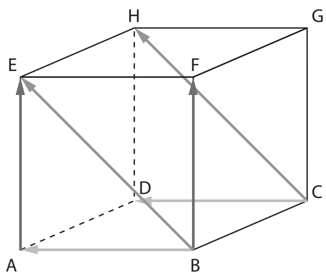


4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$ donc X = G.

Activité 2

2. a. Les droites (CD) et (CH) sont incluses dans le plan (CDH) et (AE) est parallèle à ce plan (CDH) (car (AE) est strictement parallèle à (CG) et $A \notin (CDH)$) donc (AE), (CD) et (CH) ne sont pas coplanaires.

b.



c. M = F, N = A, P = E et A, B, E, F sont dans le plan (ABF).

3. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ et B, F, C et G sont coplanaires donc $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires.

4. Oui par exemple $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Non car trois points sont toujours coplanaires.

Activité 3

A. 1. a. ABCD est un rectangle.

b. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AJ}$.

2. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AK}$.

3. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AK}$.

4. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = 4\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AK}$.

$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HR} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AK}$.

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{AE} = 0\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AK}$.

B. 1. a. A, B, C, D ne sont pas coplanaires donc la droite (AD) coupe le plan (ABC) et donc la parallèle à (AD) passant par M coupe aussi le plan (ABC) en un point M′.

b. $M' \in (ABC)$ donc il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$.

(MM′) est parallèle à (AD) donc les vecteurs $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\overrightarrow{AD}$.

c. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$.

2. a. S'il existe deux triplets $(x\,;y\,;z)$ et $(x';y';z')$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + z'\overrightarrow{AD}$ alors $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + z'\overrightarrow{AD}$ soit $(x - x')\overrightarrow{AB} = (y' - y)\overrightarrow{AC} + (z' - z)\overrightarrow{AD}$.

b. Si $x \neq x'$ alors $\overrightarrow{AB} = \dfrac{y' - y}{x - x'}\overrightarrow{AC} = \dfrac{z' - z}{x - x'}\overrightarrow{AD}$ et donc B appartiendrait au plan (ACD) ce qui en contradiction avec A, B, C, D non coplanaires d'où $x = x'$.

De même $y = y'$ et $z = z'$. Il existe donc un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$.

Activité 4

1. Chaque système possède 3 équations et deux inconnues.

2. $\begin{cases} 2+3t = 1-t' \\ 1-t = -2+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 3-t \\ 2t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 5 \\ t = -2 \end{cases}$.

3. $2 - 2\times(-2) = 1+5$: la dernière équation de (S) est vérifiée donc le système (S) admet un seul couple solution $(-2\,;\,5)$.

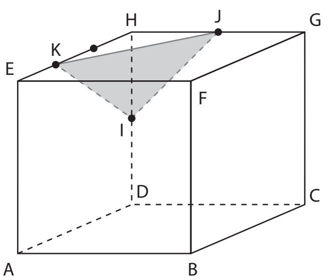
$1+3\times(-2) \neq -1+3\times 5$: la dernière équation de (S′) n'est pas vérifiée donc le système (S′) n'admet pas de solution.

TP1. Sections planes d'un cube

A. Voir sur le site Math'x.

B. 1. a. K et J sont des points communs aux plans non confondus (EHG) et (IJK) donc ces deux plans se coupent suivant la droite (JK). La trace du plan (IJK) sur la face EFGH est donc le segment [JK].

b.

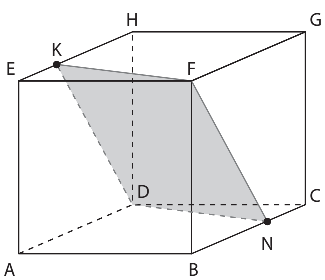


2. a. L'intersection des plans (ADH) et (DKF) est la droite (DK).

b. Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles. (DKF) coupe (ADH) suivant la droite (DK) donc (DKF) coupe aussi le plan (BCG) suivant une droite parallèle à (DK).

F est un point commun à ces deux plans, donc l'intersection des plans (DKF) et (BCG) est la parallèle à (DK) passant par F.

c.



La parallèle à (DK) passant par F coupe [BC] en N. Le plan (DKF) coupe (EFG) suivant la droite (KF) et (ABC) suivant la droite (DN). Or les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles donc (KF) et (DN) sont parallèles.

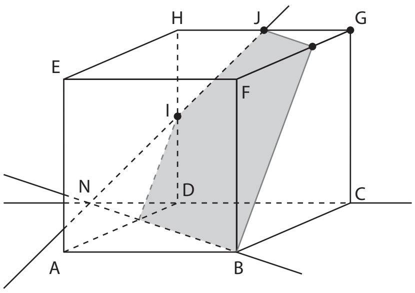
(KD)//(NF) et (KF)//(DN) donc le quadrilatère KDNF section du cube par le plan (DKF) est un parallélogramme.

3. a. L'intersection de (BIJ) et (DHC) est (IJ).

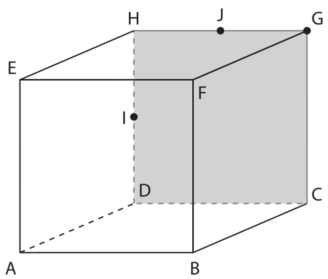
(IJ) et (CD) sont sécantes en N (dans (DHC)). On en déduit que l'intersection de (BIJ) et (ABC) est (BN).

b. (EFG)//(ABC) donc l'intersection de (EFG) et (BIJ) est la parallèle à (BN) passant par J. Propriété 4 page 308.

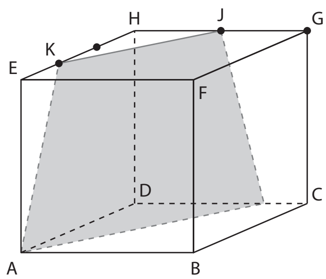
c.



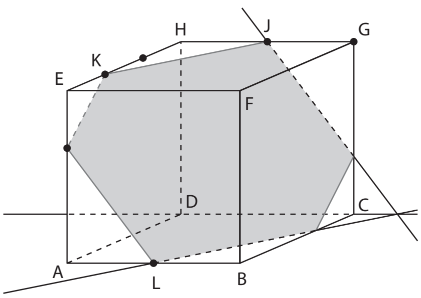
4. a.



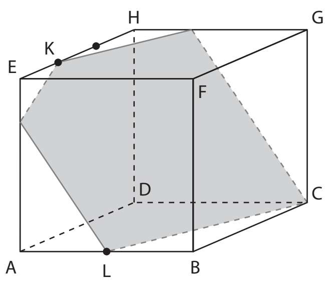
b.



c.



d.



TP2. Un lieu géométrique dans l'espace

A. 1. 2. 3. Voir sur le site Math'x.

4. a. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$ est la droite (AB) et l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{CN} = t\overrightarrow{CD}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$ est la droite (CD).

b. Conjecture : il semble que le lieu de K, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, soit la droite (IJ).

B. 1. a. $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CN} = t\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{CD} = t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$, car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ puisque I est le milieu de [AC].

b. $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KN} = 2\overrightarrow{IK}$ car $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KN} = \vec{0}$ puisque K est le milieu de [MN].
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} = 2\overrightarrow{IJ}$ car $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$ puisque I et J sont les milieux respectifs de [AC] et [BD].

2. On a donc $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = t(2\overrightarrow{IJ}) = 2t\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{IK}$ d'où $2\overrightarrow{IK} = 2t\overrightarrow{IJ}$ soit $\overrightarrow{IK} = t\overrightarrow{IJ}$.

Et donc le lieu décrit par K lorsque t décrit $\mathbb{R}$ est la droite (IJ).

TP3. Étudier des positions de droites et de plans

A. • Ligne 1 : le point A(3 ; 1 ; 1,5) appartient-il à la droite d_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$?

Réponse : $A \in d_1$, en prenant $t = \dfrac{1}{2}$.

• Ligne 2 : le point B(− 5 ; 9 ; − 5) appartient-il à la droite d_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$?

Réponse : $B \notin d_2$.

• Ligne 3 : les droites d_3 et d_4 d'équations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 2 - u \\ y = -3 - 5u \\ z = 5 + 3u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$ sont-elles sécantes ?

Réponse : le système $\begin{cases} 1 + t = 2 - u \\ 4 - t = -3 - 5u \\ -2 + 2t = 5 + 3u \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} t = 2 \\ u = -1 \end{cases}$ donc d_3 et d_4 sont sécantes en K(3 ; 2 ; 2).

• Ligne 4 : les droites d_5 et d_6 d'équations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 5 + u \\ y = 4 - u \\ z = 10 \end{cases}, u \in \mathbb{R}$ sont-elles sécantes ?

Réponse : d_5 et d_6 ne sont pas sécantes.

• Ligne 5 : les droites d_7 et d_8 d'équations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = -3u \\ y = -1 - 6u \\ z = 7 + 9u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$ sont-elles sécantes ?

Réponse : le système $\begin{cases} 2 + 2t = -3u \\ 3 + 4t = 1 - 6u \\ 1 - 6t = 7 + 9u \end{cases}$ est équivalent à $u = \dfrac{1}{3}(-2t - 2)$: il a donc une infinité de solutions et on peut en déduire que les droites sont confondues.

B. 1. a. Les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires donc $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.

A(0 ; 0 ; 0) ; B(1 ; 0 ; 0) ; C(1 ; 1 ; 0) ; D(0 ; 1 ; 0) ; E(0 ; 0 ; 1) ; F(1 ; 0 ; 1) ; G(1 ; 1 ; 1) ; H(0 ; 1 ; 1) ; $I\left(\dfrac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$; $J\left(1 ; 1 ; \dfrac{1}{2}\right)$.

2. Les points B, H et I sont dans le plan (ABH) qui contient G et J n'est pas dans ce plan donc les points B, H, I et J ne sont pas coplanaires et les droites (BH) et (IJ) ne sont pas coplanaires donc pas sécantes.

3. Les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FJ}$ dirigent le plan (FIJ) et L est un point de (FIJ) donc il existe deux réels h et k tels que $\overrightarrow{FL} = h\overrightarrow{FI} + k\overrightarrow{FJ}$.

b. $\overrightarrow{FL}(x - 1 ; y ; z - 1)$; $\overrightarrow{FI}\left(-\dfrac{1}{2} ; 0 ; -1\right)$ et $\overrightarrow{FJ}\left(0 ; 1 ; -\dfrac{1}{2}\right)$ on en déduit que $\begin{cases} x - 1 = -\dfrac{1}{2}h \\ y = k \\ z - 1 = -h - \dfrac{1}{2}k \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{h}{2} \\ y = k \\ z = 1 - h - \dfrac{k}{2} \end{cases}$.

c. $\overrightarrow{BH}(-1 ; 1 ; 1)$ donc (BH) : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Les coordonnées de L doivent vérifier les deux derniers systèmes donc $\begin{cases} 1 - \dfrac{h}{2} = 1 - t \\ k = t \\ 1 - h - \dfrac{k}{2} = t \end{cases}$

À l'aide du logiciel de calcul formel Xcasfr, on obtient :

```
1 resoudre([1-h/2=1-t,k=t,1-h-k/2=t],[h,k,t])
```

$$\left[\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right]$$

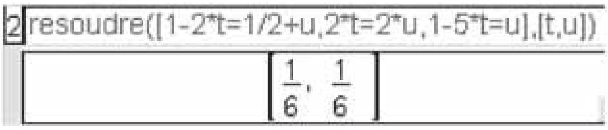
soit $\begin{cases} h = \dfrac{4}{7} \\ k = \dfrac{2}{7} \\ t = \dfrac{2}{7} \end{cases}$ donc $L\left(\dfrac{5}{7}\,;\,\dfrac{2}{7}\,;\,\dfrac{2}{7}\right)$.

4. a. (FL) et (IJ) sont dans le plan (FIJ) et ne sont pas parallèles donc elles sont sécantes.

$\overrightarrow{FL}\left(-\dfrac{2}{7}\,;\dfrac{2}{7}\,;-\dfrac{5}{7}\right)$ donc (FL) : $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2t \\ z = 1-5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ donc (IJ) : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}+t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Les coordonnées du point P doivent vérifier les deux systèmes donc $\begin{cases} 1-2t = \dfrac{1}{2}+t' \\ 2t = 2t' \\ 1-5t = t' \end{cases}$

À l'aide du logiciel Xcasfr on obtient :



soit $t = t' = \dfrac{1}{6}$ donc $P\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{6}\right)$.

b. $\overrightarrow{IP}\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{6}\right)$ et $\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{IP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$.

Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 **a.** parallèles **b.** non coplanaires
c. sécantes **d.** sécantes

2 **a.** (BF) **b.** (GH)
c. la parallèle à (AB) passant par I **d.** (DH)

3 **a.** $(1\,;0\,;0)$ **b.** $\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;0\right)$
c. $(-1\,;0\,;1)$ **d.** $(1\,;1\,;1)$

4 **a.** $(0\,;0\,;0)\,;\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right);(0\,;1\,;1)\,;(1\,;-1\,;1)$
b. $(1\,;0\,;1)\,;\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\,;0\right);(-1\,;0\,;-1)\,;(0\,;1\,;-2)$.

5 **a.** $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AB}$ **b.** $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{IG}$

6 **a.** (GCD) **b.** (EFH) **c.** (ABG)

7 $\overrightarrow{AB}(-5\,;3\,;4)\,;I\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{5}{2}\,;-1\right)$.

8 Oui, car elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

9 **a.** Oui pour $t = 0$
b. Non, car on obtient $t = -1$ et $t = 1$.

ENTRAÎNEMENT

10 **1. a.** non **b.** non **c.** non

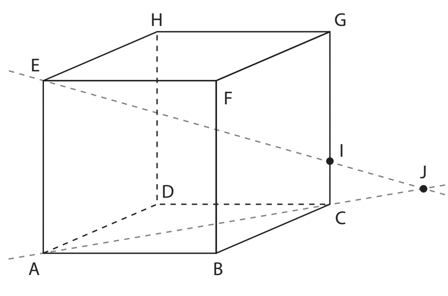
2. a. (AB) **b.** sécantes

c. L : point d'intersection de (IK) et (AB).

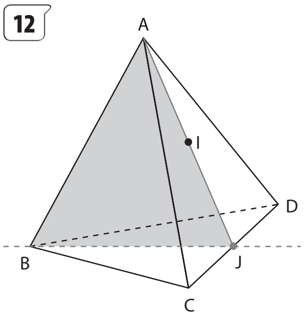
3. (JK) et (BC) sont sécantes en M donc (JK) et (ABC) sont sécants en M et (IJ) et (AC) sont sécantes en N donc (IJ) et (ABC) sont sécants en N.

4. L'intersection de (ABC) et (IJK) est la droite (LM) qui contient N.

11 Dans le plan (EAC) les droites (AC) et (EI) sont sécantes en J qui est le point d'intersection de (ABC) et (EI).



12



1. B appartient à (BAI) et (BCD).

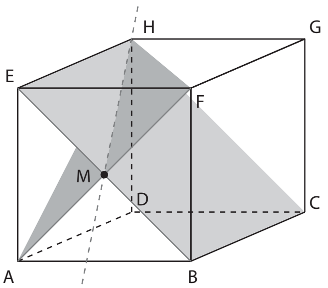
2. a. (AI) et (CD) sont coplanaires (dans (ACD)) et non parallèles.

b. (AI) et (CD) sont sécantes en J : J ∈ (AI) donc J ∈ (BAI) et J ∈ (CD) donc J ∈ (BCD).

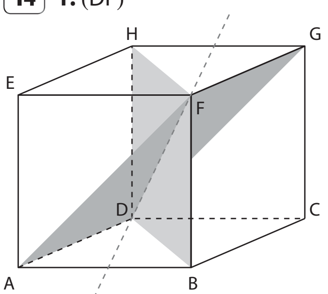
c. (BAI) et (BCD) ne sont pas confondus car A ∈ (BAI) et A ∉ (BCD) et ils ont deux points communs B et J donc (BAI) et (BCD) sont sécants suivant la droite (BJ).

13 H ∈ (BCE) et H ∈ (AFH).

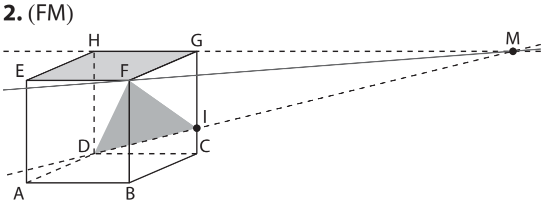
(AF) et (EB) sont sécantes en M car coplanaires et non parallèles. M ∈ (BC) donc M ∈ (BCE) et M ∈ (AF) donc M ∈ (AFH). Les plans (BCE) et (AFH) ne sont pas confondus donc ils sont sécants suivant (HM).



14 **1.** (DF)



2. (FM)

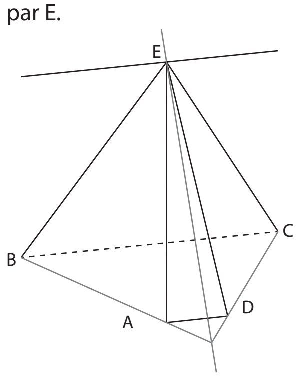


15 **1. a.** (AD) et (EC) sont non coplanaires.

b. (AB) et (CD) sont sécantes.

2. E est un point commun à (EAB) et (ECD). Soit M le point d'intersection de (AB) et (CD). M est un deuxième point commun à (EAB) et (ECD). Comme ces plans ne sont pas confondus leur intersection est la droite (EM).

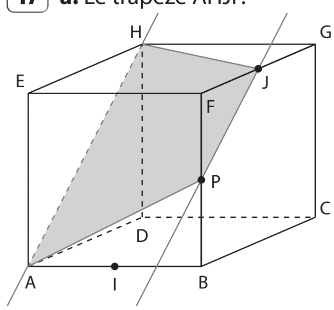
3. (EBC) et (EAD) contiennent deux droites parallèles (BC) et (AD). Comme ils ne sont ni confondus ni parallèles (car ils ont E en commun), d'après le théorème du toit, leur intersection est la parallèle à (AD) passant par E.



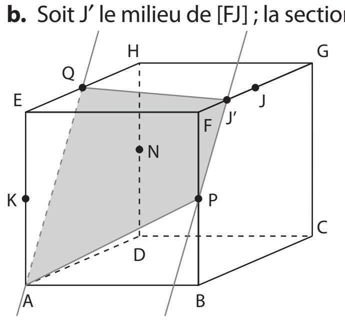
16 I ∈ [AB] donc I ∈ (ABJ) donc I est un point commun à (ABJ) et (CDI).

J ∈ [CD] donc J ∈ (CDI) donc J est un point commun à (CDI) et (ABJ). Comme (ABJ) et (CDI) ne sont pas confondus, ils sont sécants suivant la droite (IJ).

17 **a.** Le trapèze AHJP.

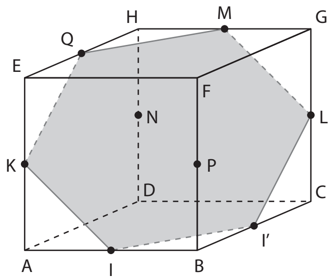


b. Soit J′ le milieu de [FJ] ; la section est le trapèze APJ′Q.

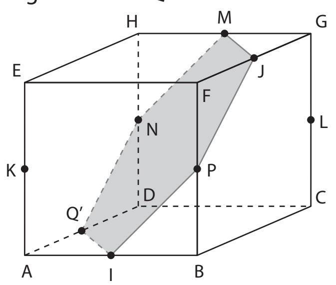


18 **a.** Soit I′ le milieu de [BC].

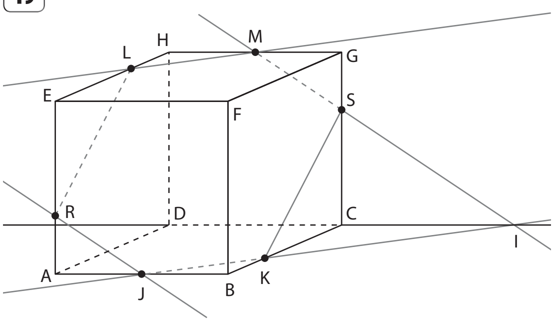
La section est l'hexagone régulier IKQMLI′.



b. Soit Q′ le milieu de [AD]. La section est l'hexagone régulier IPJMNQ′.



19



(MS) et (DC) se coupent en I ; (MS) // (RJ) ; (IJ) et (BC) se coupent en K ; (ML) // (JK).

La section est l'hexagone MSKJRL.

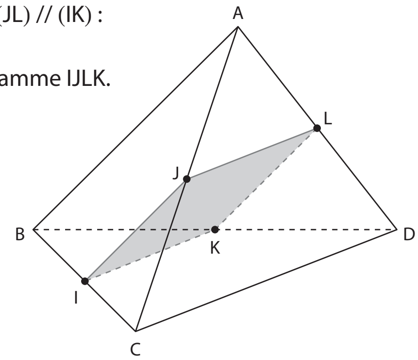
20 I est le milieu de [BC]. Soit J le milieu de [AC] et K le milieu de [BD], alors (IJ) est parallèle à (AB) et (IK) est parallèle à (CD). (IJK) est le plan passant par I et parallèle aux droites (AB) et (CD).

J est un point commun aux plans non confondus (IJK) et (ACD).

(IK) droite de (IJK) et (CD) droite de (ACD) sont parallèles donc, d'après le théorème du toit, (IJK) coupe (ACD) suivant la droite Δ passant par J et parallèle à (CD) (et(IJ)). Comme J est le milieu de [AC], Δ coupe [AD] en L milieu de [AD] et $\Delta = (JL)$.

L et K sont des points communs aux deux plans non confondus (ADB) et (IJK) donc (LK) est la droite d'intersection de ces deux plans. Comme L est le milieu de [AD] et K le milieu de [BD], (LK) est parallèle à (AB) et donc à (IJ).

(LK) // (IJ) et (JL) // (IK) : la section est le parallélogramme IJLK.



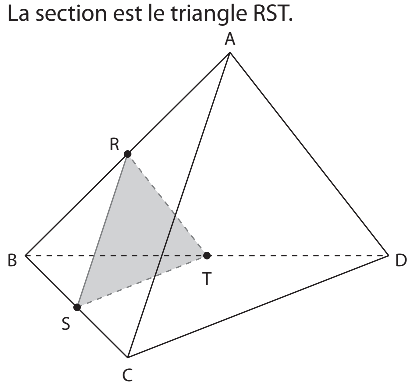
21 Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par R et parallèle au plan (ACD).

R est un point commun aux plans (ABC) et $\mathscr{P}$. Comme (ABC) et (ACD) sont sécants suivant la droite (AC), (ABC) et $\mathscr{P}$ sont sécants suivant la droite parallèle à (AC) passant par R. Cette droite coupe (BC) en S : S $\in$ [BC] et S appartient à $\mathscr{P}$.

De même, R est un point commun aux plans (ABD) et $\mathscr{P}$. Comme (ADB) et (ACD) sont sécants suivant la droite (AD), (ADB) et $\mathscr{P}$ sont sécants suivant la droite parallèle à (AD) passant par R.

Cette droite coupe (BD) en T : T $\in$ [BD] et T appartient à $\mathscr{P}$.

La section est le triangle RST.



22 **a.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$

b. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$

c. $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{LH}$

d. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

e. $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{DL}$

23 **a.** $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ **b.** $\overrightarrow{JB} = -\overrightarrow{JC}$

c. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DK}$ **d.** $\overrightarrow{GF} = -2\overrightarrow{AL}$

24 **a.** $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ **b.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

c. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG}$ **d.** $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CG}$

25 **a.** et **b.** Voir en fin de manuel.

c. $\overrightarrow{KQ}$ **d.** $\overrightarrow{BP}$ **e.** $\overrightarrow{OH}$ **f.** $\overrightarrow{QB}$

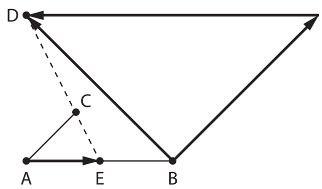
26 **1.** I milieu de [AB] et J milieu de [BC] donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

De même $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

2. On en déduit que IJKL est un parallélogramme.

27 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{CE}$ donc C, D et E sont alignés.



28 **a.** oui **b.** non **c.** oui **d.** non

29 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

30 **1. a.** et **b.** Voir en fin de manuel.

c. $2\vec{u} - \vec{v}$ **d.** $\vec{w} - \vec{v} + 2\vec{u}$

2. a. et **b.** Voir en fin de manuel.

c. $\overrightarrow{BD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ **d.** $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ et $\overrightarrow{DC} = 2\vec{u} - \vec{v}$

31 **1. a.** A, B, C et E sont coplanaires.

b. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ donc B, E et C sont alignés.

2. A, B, C et F sont coplanaires.

b. Les points B, F et C semblent alignés.

c. $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \left(\frac{a-1}{a} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{a}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{a}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{a}\overrightarrow{BC}$ donc B, F et C sont alignés.

32 Voir corrigé en fin de manuel.

33 **1. a.** $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{TE}$ donc $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{SE}$. Or les points S, E, I et H sont coplanaires (dans (HIS)) donc $\overrightarrow{CT}$, $\overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{SH}$ sont coplanaires.

b. $\overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{SH}$ dirigent le plan (SIH). Comme C n'appartient pas à (HIS) et $\overrightarrow{CT}$, $\overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{SH}$ sont coplanaires, (CT) est strictement parallèle au plan (HIS).

2. (BC)//(IS) donc (BC) //(HIS). Le plan (BCT) contient deux droites sécantes, (BC) et (CT) parallèles à (HIS) donc (HIS) et (BCT) sont parallèles.

34 **a.** Soit I le milieu de [BC].

$\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})\right)$ donc

$\overrightarrow{JG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{JE} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

b. On en déduit $\overrightarrow{JE} = 3\overrightarrow{JG}$ et donc les points J, E et G sont alignés.

35 **1. a.** $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

b. $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$

c. $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

2. a. $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$

b. $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}$

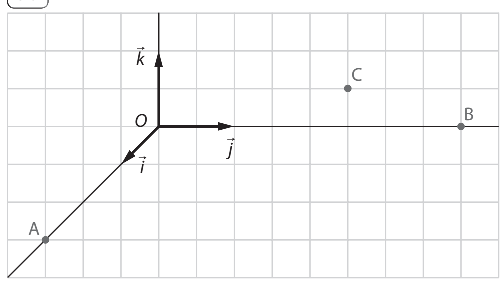
c. $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

36 **1.** A, B, C, D ne sont pas coplanaires donc $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ est un repère de l'espace.

2. $Q\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$; $N\left(0 ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{AC}(-1;1;0)$; $\overrightarrow{AG}(-1;1;1)$; $\overrightarrow{IF}\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$; $\overrightarrow{HB}(1;1;-1)$

37 **a.** $I(1 ; \frac{1}{2} ; 0)$ **b.** $\Omega(\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2})$ **c.** $O(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$

38



39 Voir corrigé en fin de manuel.

40 **2.** $\overrightarrow{AB}(-1 ; 7 ; -4)$

41 $\vec{u} + \vec{v}(-2 ; 6 ; 4)$; $2\vec{u} - 3\vec{v}$ $(16 ; 7 ; -27)$

42 $A(2 ; 7 ; 4)$; $B(2 ; -1 ; 3)$; $C(-1 ; 0 ; -3)$

43 **1.** $-2\vec{u} + 3\vec{v}(3 ; 6 ; 9)$

2. $-2\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{w}$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

44 **1.** $\overrightarrow{AD}(-2 ; 2 ; 2)$ et $\overrightarrow{BC}(-1;1;1)$ sont colinéaires donc (AD)//(BC).

2. $\overrightarrow{AB}(2 ; 1 ; -1)$ et $\overrightarrow{CD}(-3 ; 0 ; 2)$ ne sont pas colinéaires donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Comme elles sont coplanaires (d'après 1.) elles sont sécantes.

45 $\overrightarrow{AB}(-6 ; 1 ; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-12 ; 2 ; -2)$ sont colinéaires donc A, B et C sont alignés.

46 Voir corrigé en fin de manuel.

47 **1.** $\overrightarrow{AB}(4 ; -2 ; 4)$ et $\overrightarrow{AC}(0 ; -2 ; 1)$ ne sont pas colinéaires donc A, B et C définissent un plan.

2. $-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}(-4\,;6\,;-6)$ et $\overrightarrow{DE}(-2\,;3\,;-3)$ donc

$\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})$.

Donc (DE) est parallèle à (ABC).

48 **1.** $\overrightarrow{AB}(-1;0\,;5)$; $\overrightarrow{AC}(-2\,;-2\,;-2)$; $\overrightarrow{DE}(-4\,;-2\,;8)$

2. a. $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}-x-2y=-4\\-2y=-2\\5x-2y=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\\10-2=8\end{cases}$

d'où $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

b. De plus $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A, B et C définissent un plan.

On en déduit que (DE) est parallèle à (ABC).

49 <u>Méthode 1</u>

1. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$

$=\overrightarrow{DA}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\right)=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{DI}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=-\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{DE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ donc D, E et I sont alignés.

De même, $\overrightarrow{DK}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ donc

$3\overrightarrow{DF}=4\overrightarrow{DK}$ donc D, F et K sont alignés.

2. a. (IE) et (FK) sont donc sécantes en D.

b. Donc les points I, E, F et K sont coplanaires.

<u>Méthode 2</u>

1. a. A, B, C, D ne sont pas coplanaires donc $(B\,;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$ est un repère de l'espace.

b. A(0 ; 0 ; 1) ; B(0 ; 0 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; 1 ; 0) ;

$I(0\,;0\,;\frac{1}{2})$; $J(0\,;\frac{1}{2}\,;0)$; $K(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\,;0)$;

$\overrightarrow{AJ}\left(0\,;\dfrac{1}{2};-1\right)$ donc $E(0\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3})$; $F(\frac{2}{3}\,;0\,;0)$.

c. $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{IF}\left(\dfrac{2}{3};0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IE}\left(0\,;\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{6}\right)$.

$\overrightarrow{IK}=a\overrightarrow{IF}+b\overrightarrow{IE} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2}{3}a=\dfrac{1}{2}\\[4pt]\dfrac{1}{3}b=\dfrac{1}{4}\\[4pt]-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{6}b=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\[4pt]b=\dfrac{3}{4}\\[4pt]-\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{8}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow a=b=\dfrac{3}{4}$. Donc I, E, F et K sont coplanaires.

50 $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+5t\\z=3-4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

51 $\begin{cases}x=-2+t\\y=5-t\\z=4-2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

52 **1.** $\vec{u}(3\,;1;-2)$

2. A(2 ; –1 ; 1) et B(5 ; 0 ; –1).

3. $\begin{cases}2+3t=-1\\-1+t=-2\\1-2t=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=3\end{cases}$ donc $P\notin d$.

53 **1.** $d:\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

$d':\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

2. $\begin{cases}6=t\\-8=1+t\\-2=2+t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=6\\t=-9\\t=-4\end{cases}$ donc $M\notin d$.

$\begin{cases}6=1-t\\-8=2+2t\\-2=3+t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-5\\t=-5\\t=-5\end{cases}$ donc $M\in d'$.

3. d et d' ne sont pas parallèles car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On remarque que $B\in d$ ou on résout le système :

$\begin{cases}t=1-t'\\1+t=2+2t'\\2+t=3+t'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\t'=0\end{cases}$ donc les droites d et d' sont sécantes en B(1 ; 2 ; 3).

54 **1. a.** $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-1+2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

$d_2:\begin{cases}x=2+t\\y=-2t\\z=4+5t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

b. A(1 ; 2 ; –1) pour $t=0$ et B(2 ; 1 ; 1) pour $t=1$.

2. d_1 et d_2 ne sont pas parallèles car $\vec{u}(1;-1;2)$ vecteur directeur de d_1 et $\vec{v}(1;-2\,;5)$ vecteur directeur de d_2 ne sont pas colinéaires. 0 signifie « non ».

3. Ligne 4 : d_1 et d_2 sont coplanaires.

Ligne 5 : d_1 et d_2 sont sécantes en M(1 ; 2 ; –1).

Ligne 6 : $d_3:\begin{cases}x=1+2t\\y=7+t\\z=3+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

C(1 ; 7 ; 3) et D(3 ; 8 ; 4) sont des points de d_3.

Ligne 7 : d_1 et d_3 ne sont pas parallèles.

Ligne 8 : d_1 et d_3 ne sont pas coplanaires.

Ligne 9 : $d_4:\begin{cases}x=3+2t\\y=1-2t\\z=1+4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

E(3 ; 1 ; – 1) et F(5 ; – 1 ; 3) sont des points de d_4.

Ligne 10 : d_1 et d_4 sont parallèles.

Ligne 11 : A, B et E ne sont pas alignés et donc d_1 et d_4 sont strictement parallèles.

55 • Position relative de d_1 et d_2 : voir en fin de manuel.

• Position relative de d_1 et d_3 :

$\vec{u}_3 = -2\vec{u}_1$, donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$ sont colinéaires et les droites d_1 et d_3 sont parallèles.

$B(-1\,;1\,;0) \in d_1$. $\begin{cases} -1 = -6t \\ 1 = 6t \\ 0 = -4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{6} \\ t = 0 \end{cases}$.

Le système n'a pas de solution donc $B \notin d_3$.

Les droites d_1 et d_3 sont donc strictement parallèles.

• Position relative de d_2 et d_3 :

$\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ ne sont pas colinéaires donc les droites d_2 et d_3 ne sont pas parallèles.

$\begin{cases} -6t = -4 - 3t' \\ 6t = 9 - 2t' \\ -4t = -5 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{7}{6} \\ t' = 1 \\ -4 = -\dfrac{28}{6} \end{cases}$ (impossible)

donc les droites d_2 et d_3 ne sont pas sécantes.

Les droites d_2 et d_3 sont donc non coplanaires.

56

```
1  d1:=droite([-1+3*t,1-3*t,2*t],t)
   pnt(pnt[line[point[-1,1,0],point[2,-2,2]],0,"d1"])
2  d2:=droite([-4-3*t,9-2*t,-5+t],t)
   pnt(pnt[line[point[-4,9,-5],point[-7,7,-4]],0,"d2"])
3  d3:=droite([-6*t,6*t,-4*t],t)
   pnt(pnt[line[point[0,0,0],point[-6,6,-4]],0,"d3"])
4  est_parallele(d1,d2)
   0
5  est_coplanaire(d1,d2)
   1
6  inter(d1,d2)
   [pnt(pnt[point[-7,7,-4],0])]
7  est_parallele(d1,d3)
   1
8  est_aligne([-1,1,0],[0,0,0],[-6,6,-4])
   0
9  est_parallele(d2,d3)
   0
10 est_coplanaire(d2,d3))
   0
```

57 $\vec{u}_1(1\,;1\,;-1)$ et $\vec{u}_2(1\,;2\,;0)$ vecteurs directeurs respectifs de r et s ne sont pas colinéaires donc r et s ne sont pas parallèles.

$\begin{cases} 1+\lambda = \mu \\ \lambda = 2 + 2\mu \\ -\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$ donc les droites ne sont pas coplanaires.

58 **1.** Vrai **2.** Faux **3.** Faux

59 On déduit uniquement que les deux droites ne sont pas parallèles : elles peuvent être sécantes ou non coplanaires.

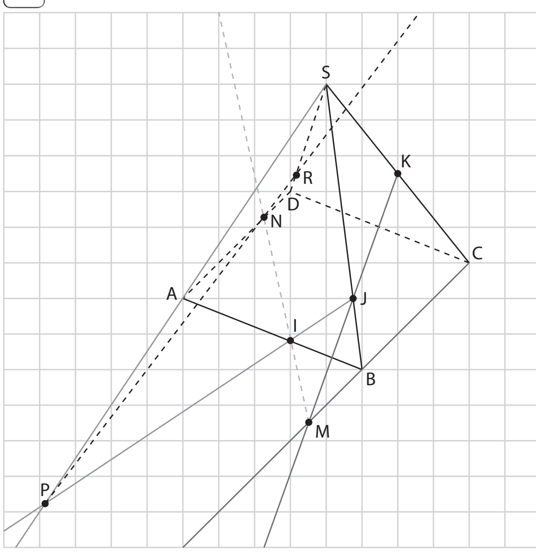
(AB) : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et (CD) : $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 1 \\ z = -6 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} 2 + 2t = 5 - 3t' \\ 1 + t = 1 \\ 5 - t = -6 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1 \\ t' = \dfrac{11}{2} \end{cases}$: ce système est impossible

donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires (et donc non sécantes).

APPROFONDISSEMENT

80



Dans (SBC), (KJ) coupe (BC) en M et M ∈ (IJK).

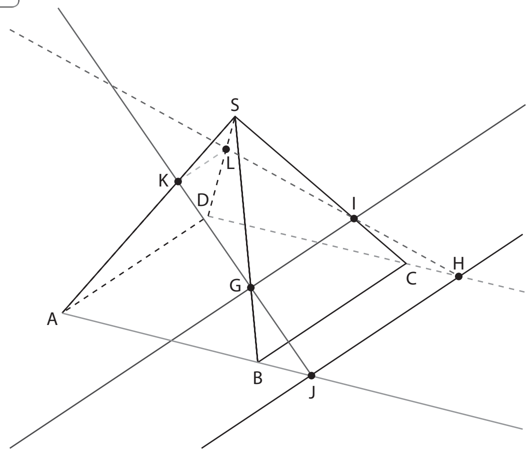
Dans (ABC), (MI) coupe (AD) en N et N ∈ (IJK).

Dans (SAB), (IJ) coupe (SA) en P et P ∈ (IJK).

Dans (SAD), (PN) coupe (SD) en R et R ∈ (IJK). De plus, S, I, J et K ne sont pas coplanaires donc (SD) n'est pas incluse dans (IJK).

On en déduit que R est le point d'intersection de (IJK) et (SD).

81



Les plans $\mathcal{P}$ et (SBC) sont sécants et contiennent deux droites parallèles (BC) et *d* donc, d'après le théorème du toit, leur intersection est une droite parallèle à (BC) et *d*. Comme I est un point commun à ces deux plans, l'intersection de (SBC) et $\mathcal{P}$ est la droite passant par I et parallèle à (BC) : elle coupe (SB) en G.

Dans le plan (ABC), (DC) et *d* sont sécantes en H et (AB) et *d* sont sécantes en J.

Dans le plan (SAB), (JG) et (SA) se coupent en K et dans le plan (SDC), (HI) et (SD) se coupent en L.

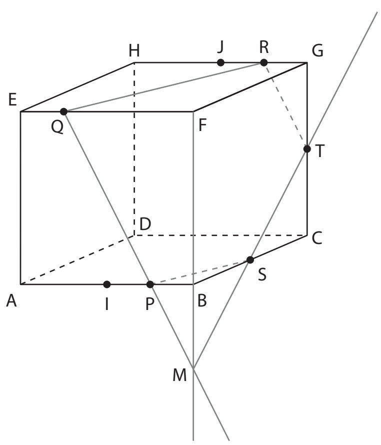
La section de la pyramide par le plan $\mathcal{P}$ est le quadrilatère IGKL. C'est un trapèze car $\mathcal{P}$ et (SAD) contiennent deux droites parallèles (*d* et (AD)) donc leur intersection (KL) est parallèle à *d* donc à (IG).

82 **A. 1.** Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles donc le plan (PQR) coupe le plan (ABC) suivant la parallèle à (QR) passant par P. Cette droite coupe (BC) en S.

Dans le plan (ABF), (QP) et (FB) son sécantes en M.

(MS) coupe (CG) en T. La section du cube par le plan (PQR) est le pentagone PQRTS.

2. Il semble que S et T sont les milieux respectifs de [BC] et [CG].



B. 1. a. $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{GF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CI}$.

b. Par construction, (PS) et (QR) sont parallèles donc (PS) et (CI) sont parallèles.

c. Dans le triangle IBC, (PS)//(CI) et P est le milieu de [IB] donc S est le milieu de [BC].

2. a. De même, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CJ}$.

b. (PQ) et (RT) sont parallèles car ce sont les intersections du plan (PQR) avec les deux plans parallèles (ABF) et (DCG) donc (RT)//(CJ).

Dans le triangle CJG, (CJ)//(RT) et R est le milieu de [JG] donc T est le milieu de [CG].

C. 1. a. $PS = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{2}(\sqrt{4^2 + 8^2}) = 2\sqrt{5}$.

De même, $RT = 2\sqrt{5}$.

$ST = \frac{1}{2}BG = 4\sqrt{2}$.

b. $QP = QR = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$

2. $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GR} = \overrightarrow{BG}$. Donc $PR = 8\sqrt{2}$.

Construction

PQ = QR donc PQR est isocèle en Q.

PS = RT et (PQ)//(ST) donc PSTR est un trapèze isocèle de bases PR et ST.

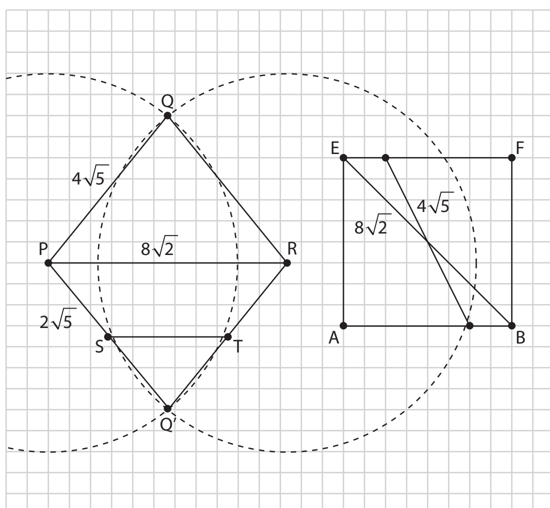
De plus $ST = \frac{1}{2}PR$ donc PQ′R est isocèle de sommet Q′ et PQ′ = 2PS = PQ.

On construit donc un carré de côté 8 dont la diagonale nous donne la longueur $8\sqrt{2}$ puis on place les points correspondants à Q et P pour obtenir la longueur $4\sqrt{5}$.

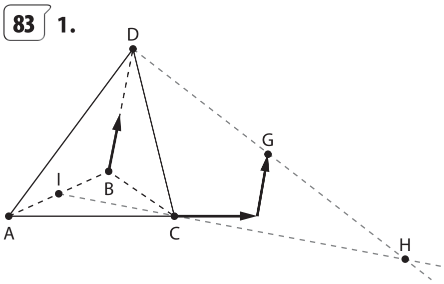
On construit le segment PR de longueur $8\sqrt{2}$ puis les deux triangles isocèles PQR et PQ′R

avec $PQ = PQ' = 4\sqrt{5}$.

Enfin on place S milieu de [PQ′] et T milieu de [RQ′].



83 **1.**



2. a. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$ car I est le milieu de [AB].

b. $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{IC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})=\frac{3}{2}\overrightarrow{IC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.$

On en déduit que G $\in$ (ICD) et donc I, G, D, C sont coplanaires.

3. Les droites (IC) et (DG) sont donc sécantes dans le plan (DCI) en un point H qui est le point d'intersection de (DG) et (ABC).

84 **1.** $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\frac{18}{5}\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DS}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AD}.$

2. On cherche deux réels a et b tels que $\overrightarrow{PR}=a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{PS}$ c'est-à-dire

$\overrightarrow{PR}=\left(\frac{18}{5}a-\frac{2}{5}b\right)\overrightarrow{AB}-3a\overrightarrow{AC}+\frac{5}{9}b\overrightarrow{AD}$ ce qui revient à

résoudre : $\begin{cases}\frac{18}{5}a-\frac{2}{5}b=-\frac{2}{5}\\ -3a=-\frac{2}{3}\\ \frac{5}{9}b=\frac{5}{3}\end{cases}$

ce qui donne $a=\frac{2}{9}$ et $b=3$ donc $\overrightarrow{PR}=\frac{2}{9}\overrightarrow{PQ}+3\overrightarrow{PS}$ et P, Q, R, S sont coplanaires.

85 **1.** ABCDEFGH est un parallélépipède donc ABCD est un parallélogramme et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CG}$.

D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, d'où $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.

2. a.

$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}=\sqrt{a^2+b^2}.$

b. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AI}$ et

$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AI}=\vec{0}.$

Par suite $\overrightarrow{IE}=-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}$.

3. a. Par construction, I appartient à la droite (AG) et donc I, B et D ne sont pas alignés et définissent un plan (IBD). Comme $\overrightarrow{IE}=-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}$, on en déduit que le point E appartient au plan (IBD) et donc les points I, B, D et E sont coplanaires.

b. Comme E $\in$ (IBD), cela revient à faire la section du parallélépipède par le plan (EBD). On obtient le triangle BDE.

86 **1. a.** $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

b. $k\vec{u}=k(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=(kx)\vec{i}+(ky)\vec{j}+(kz)\vec{k}$ donc $k\vec{u}(kx\,;ky\,;kz)$.

Si $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$,

$\vec{u}+\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}+x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

$\quad=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}+(z+z')\vec{k}$

donc $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y';z+z')$.

2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA}(x_A;y_A;z_A)$ donc $-\overrightarrow{OA}(-x_A;-y_A;-z_A)$ et comme $\overrightarrow{OB}(x_B;y_B;z_B)$ on a $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

3. a. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{OI}$ donc $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

b. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}(x_A+x_B\,;y_A+y_B\,;z_A+z_B)$ donc $\overrightarrow{OI}\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

87 A(3 ; 5 ; 0) B(3 ; 5 ; 7) C(–1 ; 0 ; 2) D(–1 ; –4 ; 2)

88 **1.** Quand on demande de construire le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (HEC), le logiciel Geoplan-Geospace répond que la droite et le plan ne sont pas sécants. On peut donc conjecturer que la droite est parallèle au plan ou contenue dans le plan.

2. M$(1-t\,;0\,;1)$; N$(1\,;1\,;1-t)$; E(0 ; 0 ; 1) ; H(0 ; 1 ; 1) ; C(1 ; 1 ; 0).

$\overrightarrow{MN}(t\,;1\,;-t)$; $\overrightarrow{EH}(0\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{HC}(1\,;0\,;-1)$.

$\overrightarrow{MN}=t\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{EH}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont coplanaires.

3. On en déduit (MN)//(HEC). De plus, le point d'intersection de la droite (EF) et du plan (HEC) est E donc (MN) est incluse dans (HEC) si et seulement si M = E, c'est-à-dire $t=1$ (et dans ce cas N = C).

89 **1.** $\vec{u}_1(-1;1;-2)$ vecteur directeur de d_1 et $\vec{u}_2(2\,;-2\,;-4)$ vecteur directeur de d_2 ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes si et seulement si il existe des réels t et t' tels que $\begin{cases}1-t=1+2t'\\ 2+t=2-2t'\\ 3-2t=-1-4t'\end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases}t=-2t'\\ 8t'=-4\end{cases}$ soit $\begin{cases}t=1\\ t'=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Donc d_1 et d_2 sont sécantes en K(0 ; 3 ; 1). K appartient à d_3 car le système $\begin{cases} 0 = -2+4t \\ 3 = 1+4t \\ 1 = 1 \end{cases}$ a pour solution $t = \frac{1}{2}$.

$\vec{u}_3(4\,;4\,;0)$ vecteur directeur de d_3 n'est pas colinéaire ni à $\vec{u}_1$, ni à $\vec{u}_2$ donc d_1 et d_3 ne sont pas parallèles ainsi que d_2 et d_3.

d_1, d_2 et d_3 sont donc concourantes en K(0 ; 3 ; 1).

2. On recherche s'il existe des réels a et b tels que $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$.

Le système $\begin{cases} -a+2b = 4 \\ a-2b = 4 \\ -2a-4b = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution car $a - 2b$ ne peut être à la fois égal à 4 et à – 4.

Donc d_1, d_2 et d_3 ne sont pas coplanaires.

90

```
1 d1:=droite([1-t,2+t,3-2*t],t)
  pnt(pnt[line[point[1,2,3],point[0,3,1]],0,"d1"])
2 d2:=droite([1+2*t,2-2*t,-1-4*t],t);
  pnt(pnt[line[point[1,2,-1],point[3,0,-5]],0,"d2"
3 inter(d1,d2)
  [pnt(pnt[point[0,3,1],0])]
4 d3:=droite([-2+4*t,1+4*t,1],t)
  pnt(pnt[line[point[-2,1,1],point[2,5,1]],0,"d3"])
5 inter(d1,d3)
  [pnt(pnt[point[0,3,1],0])]
6 inter(d2,d3)
  [pnt(pnt[point[0,3,1],0])]
7 est_coplanaire(d1,d2,d3)
  0
```

91 **1.** $\vec{u}_1(1\,;-1\,;2)$ et $\vec{u}_2(3\,;2\,;-1)$ ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

$M(x\,;y\,;z) \in d_1 \cap d_2 \Leftrightarrow$ il existe t et t' tels que $\begin{cases} 1+t = 3t' \\ 2-t = 1+2t' \\ 3+2t = 2-t' \end{cases}$; les deux premières équations donnent $t = \frac{1}{5}$ et $t' = \frac{2}{5}$ qui ne vérifient pas la troisième équation donc d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires.

2. $d_3 // d_1$ donc $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de d_3.

Tout point de d_2 peut être choisi comme point de d_3, par exemple A(0 ; 1 ; 2).

3. $d_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

92 **1. a.** $d_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1+t \\ z = -2-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b. $d_2 : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **c.** $d_3 : \begin{cases} x = t \\ y = -1+t \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'une part, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ d'autre part et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ enfin ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles deux à deux.

$M(x\,;y\,;z) \in d_1 \cap d_2$ revient à résoudre $\begin{cases} 1 = 3+2t' \\ -1+t = 0 \\ -2-t = t' \end{cases}$ ce qui est impossible donc d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires donc les trois droites ne sont pas concourantes. On peut aussi montrer que d_1 et d_3 ne sont pas coplanaires et que d_2 et d_3 ne sont pas coplanaires.

93 **1.** $\vec{u}(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $\vec{v}(x_2\,;y_2\,;z_2)$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow (x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ sont proportionnels

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1\,;y_1) \text{ et } (x_2\,;y_2) \\ (y_1\,;z_1) \text{ et } (y_2\,;z_2) \\ (x_1\,;z_1) \text{ et } (x_2\,;z_2) \end{cases}$ sont proportionnels

$\Leftrightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ et $y_1z_2 - y_2z_1 = 0$ et $x_1z_2 - x_2z_1 = 0$.

2.

Entrées
Saisir $(x_1;y_1;z_1)\,;(x_2;y_2;z_2)$
Traitement
$A \leftarrow x_1y_2 - x_2y_1\,;B \leftarrow y_1z_2 - y_2z_1\,;C \leftarrow x_1z_2 - x_2z_1$
Si A=0 et B=0 et C=0
Alors afficher « les vecteurs sont colinéaires »
Sinon afficher « les vecteurs ne sont pas colinéaires ».
FinSi

3.

Entrées
Saisir $(x_A;y_A;z_A)\,;(x_B;y_B;z_B)\,;(x_C;y_C;z_C)\,;$
$(x_D;y_D;z_D)$
Traitement
$x_1 \leftarrow x_B - x_A\,;y_1 \leftarrow y_B - y_A\,;z_1 \leftarrow z_B - z_A$
$x_2 \leftarrow x_D - x_C\,;y_2 \leftarrow y_D - y_C\,;z_2 \leftarrow z_D - z_C$
$A \leftarrow x_1y_2 - x_2y_1\,;B \leftarrow y_1z_2 - y_2z_1\,;C \leftarrow x_1z_2 - x_2z_1$
Si A=0 et B=0 et C=0
Alors afficher « les droites sont parallèles »
Sinon afficher « les droites ne sont pas parallèles ».
FinSi

94 **1. a.** d' : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b. $B \in d$ avec $t = -3$ et $C \in d'$ avec $t = -1$.

2. a. (AB) : $\begin{cases} x = 1-5t \\ y = -2+13t \\ z = 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b. $M \in [AB] \Leftrightarrow$ il existe $t \in [0,1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ ce qui donne [AB] : $\begin{cases} x = 1-5t \\ y = -2+13t \\ z = 6t \end{cases}, t \in [0;1]$.

Pour [AB) : $\begin{cases} x = 1-5t \\ y = -2+13t \\ z = 6t \end{cases}, t \in [0;+\infty[$.

$M \in [BA) \Leftrightarrow$ il existe t tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BA}$, avec $t \in [0;+\infty[$ ce qui donne [BA) : $\begin{cases} x = -4+5t \\ y = 11-13t \\ z = 6-6t \end{cases}, t \in [0;+\infty[$.

95 **1.** $\overrightarrow{AB}(0;1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;0;6)$ ne sont pas colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan $\mathscr{P}$.

2. $M(x ; y ; z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si il existe des réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire tels que $\begin{cases} x-1 = 2t' \\ y-1 = t \\ z+2 = t+6t' \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1+2t' \\ y = 1+t \\ z = -2+t+6t' \end{cases}$

$E(3;1;4) \in \mathscr{P}$ si et seulement si il existe des réels t et t' tels que $\begin{cases} 3 = 1+2t' \\ 1 = 1+t \\ 4 = -2+t+6t' \end{cases}$. On obtient $t' = 1$, $t = 0$ et la dernière équation est vérifiée car $4 = -2+6$, donc $E \in \mathscr{P}$.

$F(-1;2;-5) \in \mathscr{P}$ si et seulement si il existe des réels t et t' tels que que $\begin{cases} -1 = 1+2t' \\ 2 = 1+t \\ -5 = -2+t+6t' \end{cases}$

On obtient $t' = -1$, $t = 1$ mais la dernière équation n'est pas vérifiée car $-2+1-6 = -7$ et non -5, donc $F \notin \mathscr{P}$.

96 **1.** $\overrightarrow{AB}(2;1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(3;-1;1)$ ne sont pas colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés et forment un plan.

(ABC) : $\begin{cases} x = 3+2t+3t' \\ y = 3+t-t' \\ z = -2t+t' \end{cases}$, t et t' réels.

2. $\mathscr{P}$: $\begin{cases} x = 2t+3t' \\ y = t-t' \\ z = -2t+t' \end{cases}$, t et t' réels.

97 **1.** $\mathscr{P}$: $\begin{cases} x = -3+t \\ y = 2-t+2t' \\ z = 1+2t+t' \end{cases}$, t et t' réels.

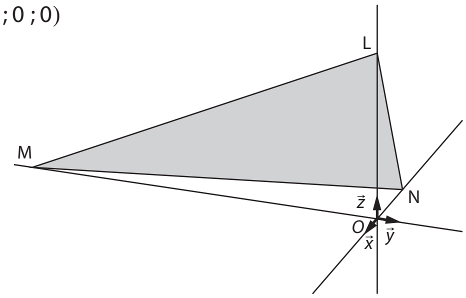
2. $L(0;0;z_L) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \begin{cases} -3+t = 0 \\ 2-t+2t' = 0 \\ 1+2t+t' = z_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = \dfrac{1}{2} \\ z_L = \dfrac{15}{2} \end{cases}$

Donc $L(0;0;\frac{15}{2})$

3. $M(0;-15;0)$

4. $N(-3;0;0)$

5.



98 $\vec{u}(3;2;3)$ et $\vec{v}(1;0;4)$ dirigent $\mathscr{P}$ et $\vec{w}(1;2;-5)$ est un vecteur directeur de d.

On cherche s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ce qui revient à résoudre le système : $\begin{cases} 3a+b = 1 \\ 2a = 2 \\ 3a+4b = -5 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ 3-8 = -5 \end{cases}$; on en déduit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires. De plus, le point $A(5;0;1)$ de d n'appartient pas à $\mathscr{P}$ car le système $\begin{cases} 2+3t+t' = 5 \\ 1+2t = 0 \\ 3t+4t' = 1 \end{cases}$ n'a pas de solution.

On en déduit que d est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.

On peut aussi montrer que d et $\mathscr{P}$ ont une intersection vide, c'est-à-dire que le système $\begin{cases} 2+3t+t' = 5+k \\ 1+2t = 2k \\ 3t+4t' = 1-5k \end{cases}$ n'a pas de solution.

99 **1.** $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{FA} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{FA}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA}$. Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FA}$ donc deux vecteurs dirigeant (ABE), (MM')//(ABE).

De même, $\overrightarrow{NN'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA}$ donc (NN')//(ABE).

Et $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI'} = \overrightarrow{FB}$ donc (II')//(ABE).

2. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{4}\overrightarrow{FH} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA}\right)$
$= \frac{1}{4}\overrightarrow{FH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FH} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{FH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

De même, $\overrightarrow{PS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FH} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{PT} = \frac{4}{3}\overrightarrow{PS} = 2\overrightarrow{PR} = 4\overrightarrow{PQ}$ donc P, Q, R, S, T sont alignés.

3. a. $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UF} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MV} = k\overrightarrow{AF} + \frac{1}{4}\overrightarrow{FH} + k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA}\right)$ $= \frac{1}{4}\overrightarrow{FH} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{UY} = \overrightarrow{UF} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HY} = k\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH} + k\overrightarrow{EB}$ $= k\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH} + k(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{FH} + 2k\overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{UY} = 4\overrightarrow{UV}$ donc U, V, Y sont alignés.

b. De même, on montre que $\overrightarrow{UW} = 2\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UX} = 3\overrightarrow{UV}$ donc U, V, W, X, Y sont alignés.

Remarque : on peut aussi résoudre cet exercice analytiquement en se plaçant dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ par exemple.

PROBLÈMES

100 **A. 1. a.** I est le milieu de [AE] donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

L est le milieu de [CG] donc $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$. Or $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ (car ABCDEFGH est un cube) donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CL}$ et AILC est un parallélogramme.

b. $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Or AILC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IL}$ et donc $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IL}$.

c. Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont donc colinéaires et par suite les droites (JK) et (IL) sont parallèles. Elles sont donc coplanaires et les points I, J, K et l également. On en déduit que les droites (IJ) et (KL) sont coplanaires. Elles ne sont pas parallèles puisque JKLI n'est pas un parallélogramme car $\overrightarrow{JK} \neq \overrightarrow{IL}$. Elles sont sécantes en un point R.

2. a. B et F sont des points communs aux plans distincts (AEB) et (BCG), ces deux plans sont donc sécants suivant la droite (BF).

b. $R \in (IJ)$ et $(IJ) \subset (AEB)$ donc $R \in (AEB)$;

$R \in (KL)$ et $(KL) \subset (BCG)$ donc $R \in (BCG)$.

R est un point commun aux plans (AEB) et (BCG) donc R appartient à (BF) droite d'intersection de ces deux plans.

B. 1. a. $F \notin (ABC)$ donc les points B, A, C et F ne sont pas coplanaires et donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}$ non plus ; d'où $(B\,;\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$ est un repère de l'espace.

b. Dans le repère $(B\,;\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$, B(0 ; 0 ; 0), A(1 ; 0 ; 0), C(0 ; 1 ; 0) , F(0 ; 0 ; 1), E(1 ; 0 ; 1) (car $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}$), G(0 ; 1 ; 1) (car $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$).

I est le milieu de [AE] donc $I\left(1\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$; L est le milieu de [CG] donc $L\left(0\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ donc $J\left(\frac{1}{4}\,;0\,;0\right)$; $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ donc $K\left(0\,;\frac{1}{4}\,;0\right)$.

2. a. $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{3}{4}\,;0\,;-\frac{1}{2}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (IJ) donc $-4\overrightarrow{IJ}(3\,;0\,;2)$ aussi. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (IJ).

$\overrightarrow{KL}\left(0\,;\frac{3}{4}\,;\frac{1}{2}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (KL) donc $4\overrightarrow{KL}(0\,;3\,;2)$ aussi. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3t' \\ z = \frac{1}{2} + 2t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (KL).

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point R(x ; y ; z) si et seulement si il existe des réels t et t' tels que $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} + 2t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3t' \\ z = \frac{1}{2} + 2t' \end{cases}$.

On résout le système $\begin{cases} 1 + 3t = 0 \\ 0 = 1 + 3t' \\ \frac{1}{2} + 2t = \frac{1}{2} + 2t' \end{cases}$ soit $\begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t' = -\frac{1}{3} \\ t = t' \end{cases}$.

Les droites (IJ) et (KL) sont donc sécantes en un point $R\left(0\,;0\,;-\frac{1}{6}\right)$.

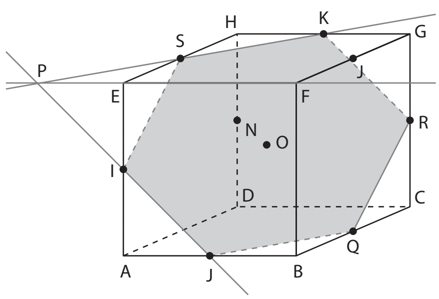
b. $\overrightarrow{BR}\left(0\,;0\,;-\frac{1}{6}\right)$ et $\overrightarrow{BF}(0\,;0\,;1)$. $\overrightarrow{BR} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{BF}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires et les points B, R et F sont alignés.

101 **A. 1.** Voir sur le site.

2. (IJ) et (EF) sont sécantes dans le plan (AEF) en P qui est donc le point d'intersection de (IJ) et du plan (EFG).

3. L'intersection de (IJK) et (EFG) est donc la droite (PK).

4. La parallèle à (SK) passant par J coupe (BC) en Q et la parallèle à (IJ) passant par K coupe (CG) en R.



La section du cube par le plan (IJK) est l'hexagone IJQRKS.

B. Dans le plan (EAB), (AJ)//(EP) et I, point d'intersection de (AE) et (PJ), est le milieu de [AE] donc I est le milieu de [PJ] et PEJA est un parallélogramme ce qui permet de dire que $PE = AJ = \frac{1}{2}AB$.

Comme $HK = \frac{1}{2}HG = \frac{1}{2}AB$, on en déduit que $PE = HK$.

De plus (HK)//(PE) donc PEKH est un parallélogramme et donc le point d'intersection de ses diagonales S est le milieu de [HE].

S milieu de [EH] et K milieu de [HG] donc (SK)//(EG). Comme (EG)//(AC) et par construction (JQ)//(SK), on en déduit que (JQ)//(AC). Comme J est le milieu de [AB], Q est le milieu de [BC].

De même, (IJ)//(EB), (EB)//(HC) et par construction (KR)//(IJ) donc (KR)//(HC). Comme K est le milieu de [HG], R est le milieu de [GC].

2. $IJ = JQ = QR = RK = KS = SI = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ car chacune de ces longueurs est égale à la moitié d'une diagonale des faces du cube.

3. a. Dans le plan (AEG), I est le milieu de [AE] et O est le milieu de [EC] donc (OI)//(AC) et $OI = \frac{1}{2}AC$.

De même (OR)//(EG) et $OR = \frac{1}{2}EG$.

Comme (AC)//(EG) et AC = EG, on en déduit que I, O et R sont alignés et $IO = OR = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc O est le milieu de [IR].

b. De même, dans le plan (EHC), on montre que O est le milieu de [SQ] et $SO = OQ = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ et dans le plan (ABG), O est le milieu de [JK] et $JO = OK = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $OI = OR = OS = OQ = OJ = OK = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc les points I, J, K, Q, R, S sont sur le cercle de centre O et de rayon $a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

102 **1.** $\vec{u}_1(1;3;0)$ vecteur directeur de D_1 et $\vec{u}_2(2;1;-1)$ vecteur directeur de D_2 ne sont pas colinéaires donc D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes s'il existe des réels a et b tels que

$$\begin{cases} 3+a = 0{,}5+2b \\ 9+3a = 4+b \\ 2 = 4-b \end{cases} \text{ c'est-à-dire tels que } \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ a = -1. \\ b = 2 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc D_1 et D_2 ne sont pas sécantes. Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont non coplanaires.

2. a. S (3 ; 4 ; 0,1) ; il n'existe pas de réel a tel que $\begin{cases} 3 = 3+a \\ 4 = 9+3a \\ 0{,}1 = 2 \end{cases}$ donc $S \notin D_1$.

Il n'existe pas de réel b tel que $\begin{cases} 3 = 0{,}5+2b \\ 4 = 4+b \\ 0{,}1 = 4-b \end{cases}$ donc $S \notin D_2$.

b. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan contenant S et D_1 et $\mathscr{P}_2$ le plan contenant S et D_2.

$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont un point commun S et ils ne sont pas confondus (s'ils l'étaient, D_1 et D_2 seraient coplanaires, or elles ne le sont pas d'après 1.), donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ passant par S.

c. D_1 et Δ sont des droites coplanaires puisque contenues dans le plan $\mathscr{P}_1$, elles sont donc soit parallèles, soit sécantes.

Supposons qu'elles soient parallèles, alors $\vec{u}_1(1;3;0)$ vecteur directeur de D_1 est aussi un vecteur directeur de Δ. Comme $S(3 ; 4 ; 0{,}1) \in \Delta$, $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 4+3t\,,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 0{,}1 \end{cases}$ est une représentation paramétrique de Δ. Les droites D_2 et Δ sont coplanaires (car dans $\mathscr{P}_2$) donc elles sont soit sécantes soit parallèles.

Elles sont sécantes s'il existe des réels b et t tels que $\begin{cases} 0{,}5+2b = 3+t \\ 4+b = 4+3t \\ 4-b = 0{,}1 \end{cases}$. Ce système équivaut à $\begin{cases} t = 5{,}3 \\ t = 1{,}3 \\ b = 3{,}9 \end{cases}$; il n'a pas de solution donc D_2 et Δ ne sont pas sécantes. Comme elles sont coplanaires, on a D_2 parallèle à Δ. Or on a supposé que Δ est parallèle à D_1, on obtient alors D_2 parallèle à D_1 ce qui est en contradiction avec D_1 et D_2 non coplanaires. Donc D_1 et Δ sont sécantes.

On démontre de même que D_2 et Δ sont sécantes.

d. Il est possible de trouver une droite (R) passant par S qui coupe D_1 et D_2 : il suffit de prendre pour (R) la droite Δ précédente, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Pour aller plus loin : à l'aide du logiciel Xcasfr, on obtient $A\left(\frac{19}{16};\frac{57}{16};2\right)$ et $B\left(-\frac{11}{6};\frac{17}{6};\frac{31}{6}\right)$. Voir ci-dessous :

```
1 D1:=droite([3+a,9+3*a,2],a)
  pnt(pnt[line[point[3,9,2],point[4,12,2]],0,"D1"])
2 D2:=droite([1/2+2*b,4+b,4-b],b)
  pnt(pnt[line[point[1/2,4,4],point[1/2+2,5,3]],0,"D2"])
3 S:=point([3,4,1/10])
  pnt(pnt[point[3,4,1/10],0,"S"])
4 P1:=plan(S,D1)
  pnt(pnt[hyperplan([-57/10,19/10,-5],point[3,4,1/10]),0,"P1"])
5 P2:=plan(S,D2)
  pnt(pnt[hyperplan([-39/10,53/10,-5/2],point[3,4,1/10]),0,"P2"])
6 (R):=inter(P1,P2)
  [pnt(pnt[line[point[3,4,1/10],point[99/4,37/4,-227/10]],0,"R"])]
7 A:=inter((R),D1)
  [pnt(pnt[point[19/16,57/16,2],0,"A"])]
8 B:=inter(((R),D2)
  [pnt(pnt[point[-11/6,17/6,31/6],0,"B"])]
```

103 Les points I, J, A, B sont coplanaires car les droites (OA) et (OB) sont sécantes donc les droites (IJ) et (AB) sont sécantes en un point M qui est le point d'intersection de (IJ) et $\mathscr{P}$.

104 Comme A, B, C et D sont non coplanaires, $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.

Dans ce repère, $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(0\,;0\,;1)$ et $D(0\,;0\,;1)$.

1. Coordonnées des points P_1, Q_1, R_3 et S_3 dans le repère précédent :

$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ d'où $P_1\left(0\,;0\,;\frac{1}{4}\right)$.

$\overrightarrow{AQ_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ d'où $Q_1\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};0\right)$.

$\overrightarrow{AS_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d'où $S_3\left(\frac{1}{2};0\,;0\right)$.

$\overrightarrow{AR_3} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DR_3} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ d'où $R_3\left(0\,;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{P_1Q_1}\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$ est un vecteur directeur de (P_1Q_1) donc $\vec{u}_1(3\,;1\,;-1)$ aussi et $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = \frac{1}{4} - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (P_1Q_1). $\overrightarrow{R_3S_3}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ est un vecteur directeur de (R_3S_3) donc $\vec{v}_3(-1\,;1\,;1)$ aussi et $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - t' \\ y = t' \\ z = t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (R_3S_3).

(P_1Q_1) et (R_3S_3) sont sécantes si et seulement si il existe des réels t et t' tels que $\begin{cases} 3t = \frac{1}{2} - t' \\ t = t' \\ \frac{1}{4} - t = t' \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} t = \frac{1}{8} \\ t' = \frac{1}{8} \end{cases}$.

Donc (P_1Q_1) et (R_3S_3) sont sécantes en $K\left(\frac{3}{8};\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right)$.

2. Coordonnées des points P_n, Q_n, R_p et S_p dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$: $\overrightarrow{AP_n} = \frac{n}{4}\overrightarrow{AD}$ d'où $P_n\left(0\,;0\,;\frac{n}{4}\right)$.

$\overrightarrow{AQ_n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ_n} = \overrightarrow{AB} + \frac{n}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{n}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= \left(1 - \frac{n}{4}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{n}{4}\overrightarrow{AC}$ d'où $Q_n\left(1 - \frac{n}{4};\frac{n}{4};0\right)$.

$\overrightarrow{AS_p} = \frac{p}{6}\overrightarrow{AB}$ d'où $S_p\left(\frac{p}{6};0\,;0\right)$.

$\overrightarrow{AR_p} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DR_p} = \overrightarrow{AD} + \frac{p}{6}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{p}{6}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{p}{6}\overrightarrow{AC} + \left(1 - \frac{p}{6}\right)\overrightarrow{AD}$ d'où $R_p\left(0\,;\frac{p}{6};1 - \frac{p}{6}\right)$.

(P_nQ_n) passe par $P_n\left(0\,;0\,;\frac{n}{4}\right)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{P_nQ_n}\left(1 - \frac{n}{4};\frac{n}{4};-\frac{n}{4}\right)$ donc $\begin{cases} x = \left(1 - \frac{n}{4}\right)t \\ y = \frac{n}{4}t \\ z = \frac{n}{4} - \frac{n}{4}t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (P_nQ_n).

(S_pR_p) passe par $S_p\left(\frac{p}{6};0\,;0\right)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{S_pR_p}\left(-\frac{p}{6};\frac{p}{6};1 - \frac{p}{6}\right)$ donc $\begin{cases} x = \frac{p}{6} - \frac{p}{6}t' \\ y = \frac{p}{6}t' \\ z = \left(1 - \frac{p}{6}\right)t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (S_pR_p). (P_nQ_n) et (S_pR_p) sont sécantes si et seulement si il existe des réels t et t' tels que $\begin{cases} \left(1 - \frac{4}{n}\right)t = \frac{p}{6} - \frac{p}{6}t' \\ \frac{n}{4}t = \frac{p}{6}t' \\ \frac{n}{4} - \frac{n}{4}t = \left(1 - \frac{p}{6}\right)t' \end{cases}$. Ce système équivaut à $\begin{cases} t = \frac{p}{6} \\ \frac{n}{4}t = \frac{p}{6}t' \\ t' = \frac{n}{4} \end{cases}$ soit $\begin{cases} t = \frac{p}{6} \\ t' = \frac{n}{4} \end{cases}$ puisque l'égalité $\frac{n}{4}t = \frac{p}{6}t'$ est vérifiée lorsque $t = \frac{p}{6}$ et $t' = \frac{n}{4}$. Donc les droites (P_nQ_n) et (R_pS_p) sont toujours sécantes en un point M tel que $\overrightarrow{P_nM} = \frac{p}{6}\overrightarrow{P_nQ_n}$ et $\overrightarrow{S_nM} = \frac{n}{4}\overrightarrow{S_pM_p}$. Comme $1 \leqslant p \leqslant 5$ et $1 \leqslant n \leqslant 3$, on a $\frac{p}{6} \in [0\,;\,1]$ et $\frac{n}{4} \in [0\,;\,1]$, donc M est un point des segments $[P_nQ_n]$ et $[S_pR_p]$. Les poutres $[P_nQ_n]$ et $[S_pR_p]$ sont donc toujours sécantes.

105 **1.** (LP) coupe le plan (EFG) en P. Comme (ABC) et (EFG) sont parallèles, (LP) coupe aussi le plan (ABC) en un point P′. On sait que (EA) est parallèle à (LP), donc les droites (EA) et (LP) sont coplanaires et $A \in (LEP)$.

(LEP) coupe (EFG) suivant la droite (EP). Comme (ABC) et (EFG) sont parallèles, (LEP) coupe aussi le plan (ABC) suivant une droite Δ parallèle à (EP). A et P′ sont deux points communs aux plans (LEP) et (ABC) donc $\Delta = (AP')$.

P′ est donc le point d'intersection de (LP) et de la parallèle à (EP) passant par A.

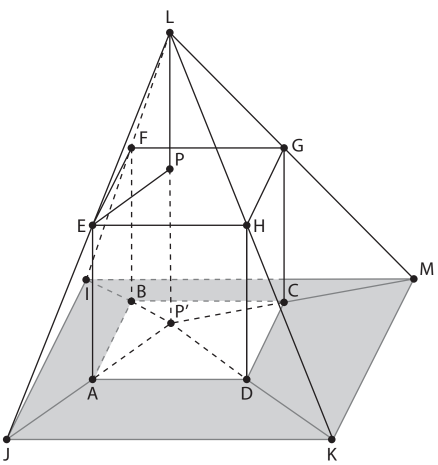
Les droites (LE) et (P′A) sont coplanaires (puisque dans le plan (LEP)) et non parallèles, elles sont donc sécantes en un point J. $J \in (AP')$, or $(AP') \subset (ABC)$ donc $J \in (ABC)$.

(LP)//(EA) et (EA)//(FB) donc (LP)//(FB). De même que précédemment, les droites (BP′) et (LF) sont coplanaires et sécantes en un point I et $I \in (ABC)$.

I appartient à (LF) donc à (LFE). J appartient à (LE) donc à (LFE).

I et J sont donc deux points communs aux plans (LFE) et (ABC).

(LFE) coupe (EFG) suivant (EF) et comme (EFG) et (ABC) sont parallèles, (LFE) coupe (ABC) suivant la droite (IJ) qui est parallèle à (FE).



On démontre de même que les droites (LH) et (P′D) sont coplanaires et sécantes en un point K qui appartient à (ABC), que les droites (LG) et (P′C) sont coplanaires et sécantes en un point M qui appartient à (ABC) et que (JK) et (AD) sont parallèles, (KM) et (DC) sont parallèles et (IM) et (BC) sont parallèles.

2. L'ombre du cube est donc formée de quatre trapèzes : ABIJ, BCMI, CDMK et ADKJ.

De plus, comme la face ABCD du cube est un carré, IJKM est un rectangle.

106 Voir la figure sur le site.

D'après la figure, il semble que K soit dans le carré ILPJ où I est le milieu de [AE], L est le centre de la face ABFE, P est le centre du cube et J est le centre de la face ADHE.

On se place dans le repère $(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$.

$M(0\,;t\,;1)$ avec $t \in [0\ ;\ 1]$ et $N(t'\,;0\,;0)$ avec $t' \in [0\ ;\ 1]$

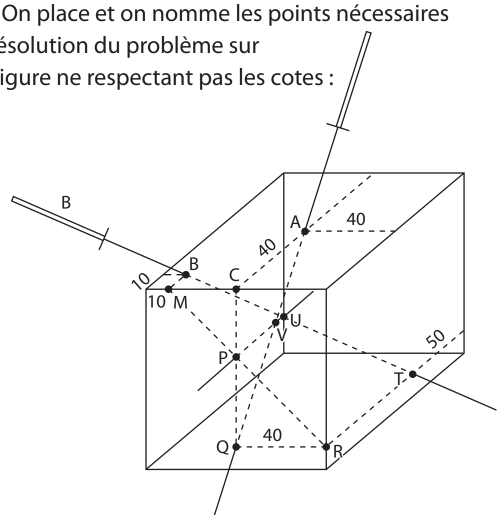
donc $K\left(\dfrac{t'}{2}\,;\dfrac{t}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

$I\left(0\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right);J\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right);L\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ donc

$\overrightarrow{IJ}\left(0;\dfrac{1}{2};0\right);\overrightarrow{IL}\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$.

Comme $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{t'}{2};\dfrac{t}{2};0\right)$, on a $\overrightarrow{IK} = t'\overrightarrow{IL} + t\overrightarrow{IJ}$ avec $t \in [0\ ;\ 1]$ et $t' \in [0\ ;\ 1]$ ce qui prouve la conjecture.

107 On place et on nomme les points nécessaires à la résolution du problème sur une figure ne respectant pas les cotes :



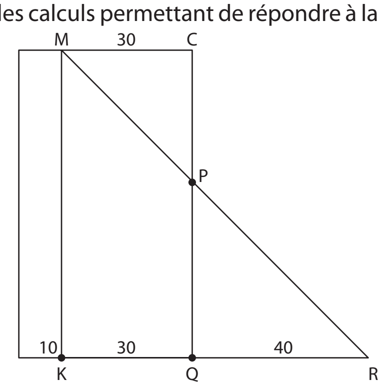
U est le point d'intersection de (BT) avec le plan (ACQ).
P est le point d'intersection de (MR) et (CQ).

La droite (PU) est donc la droite d'intersection des plans (MBT) et (ACQ).

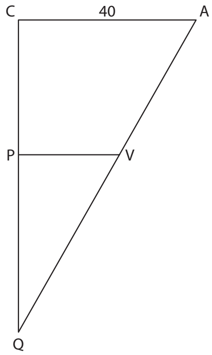
(PU) est parallèle à (RT) car les droites (PU) et (RT) sont les droites d'intersection respectives du plan (MBT) avec deux plans parallèles : (ACQ) et la face du cube contenant T.

Les droites (PU) et (AQ) sont sécantes en V.

Puis, on effectue les calculs permettant de répondre à la question.



$\frac{QP}{QC} = \frac{QP}{MK} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$; $\frac{MP}{MR} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$

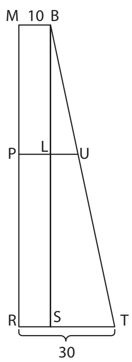


$\frac{PV}{40} = \frac{QP}{QC} = \frac{4}{7}$ (voir deuxième figure) d'où

$PV = \frac{160}{7} \approx 22,86.$

$\frac{PU - 10}{20} = \frac{LU}{ST} = \frac{MP}{MR} = \frac{3}{7}$ (voir deuxième figure) d'où

$7PU - 70 = 60$, soit $PU = \frac{130}{7} \approx 18,57.$



Conclusion : PU < PV donc l'épée A est derrière l'épée B.

108 **1.** Ce système revient à chercher les points d'intersection éventuels des droites *d* et *d'* de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = a + dt \\ y = b + et \\ z = c + ft \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et $\begin{cases} x = a' + d't' \\ y = b' + e't' \\ z = c' + f't' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$

Le système peut donc admettre exactement un unique couple solution dans le cas où les deux droites sont sécantes ou une infinité de solutions si les deux droites sont confondues, mais pas exactement deux couples solutions ou trois couples solutions.

2. Pour que le système admette un unique couple solution il faut que les deux droites ne soient pas parallèles c'est-à-dire que les couples $(d\,;\,e\,;\,f)$ et $(d'\,;\,e'\,;\,f')$ ne soient pas proportionnels. Cette condition n'est pas suffisante car dans ce cas les droites peuvent être non coplanaires et donc ne pas avoir de point d'intersection et alors le système n'a pas de solution.

Accompagnement personnalisé

1 Étudier des positions relatives de droites et de plans

1. a. Étape 1 : F $\in$ (ABF) et I $\in$ (ABF) donc (FI) $\subset$ (ABF) (**P1**) donc (ABF) $\cap$ (DIF) = (FI) (**P2**)

Étape 2 : D $\in$ (ABD) et I $\in$ (ABD) donc (DI) $\subset$ (ABD) (**P1**) donc (ABD) $\cap$ (DIF) = (DI) (**P2**)

Étape 3 : (ABD)//(EFG) donc (DIF) coupe (EFG) suivant la droite passant par F et parallèle à (DI) qui coupe (GH) en N. (**P4 et P3**)

Étape 4 : N $\in$ (DCG) et D $\in$ (DCG) donc (ND) $\subset$ (DCG) (**P1**) donc (DHG) $\cap$ (DIF) = (DN) (**P2**).

b. La section du cube est le quadrilatère DIFN. On montre facilement que DIFN est un parallélogramme : à l'étape 3, on a construit N tel que (FN)//(DI) ; de même, (DN)//(FI).

À l'étape 3, on aurait pu construire la parallèle à (FI) passant par D en utilisant la propriété 4.

2. Étape 1 : (KM) et (ML) sont incluses respectivement dans les plans (ABF) et (FBC) (**P1**) donc

(EFG) $\cap$ (KLM) = (KM) (**P2**) et (FBC) $\cap$ (KLM) = (ML) (**P2**)

Étape 2 : (ML) et (BF) sont sécantes en N dans le plan (FBC) (**P3**).

Étape 3 : (NK) est incluse dans (ABF) (**P1**) et coupe (AB) en P (**P3**) donc (ABF) $\cap$ (KLM) = (KP) (**P2**)

Étape 4 : (ABD)//(EFG) donc (KLM) coupe (ABD) suivant la droite passant par P et parallèle à (KM) qui coupe (DC) en Q. (**P4** et **P3**).

Étape 5 : Q et L sont dans (DCG) donc (QL) $\subset$ (DCG) (**P1**) et donc (DCG) $\cap$ (KLM) = (QL) (**P2**).

La section cherchée est le pentagone KMLQP.

Pour aller plus loin : à l'étape 3, on peut construire le point d'intersection de (ML) et (BC) puis relier ce point à P, ou à l'étape 4, on aurait pu construire la parallèle à (KP) passant par L.

2 Interpréter des relations vectorielles

1. (A) AMCB est un parallélogramme ;

(B) Les points A, B, M sont alignés ;

(C) Les points B, D et M sont alignés et M est le milieu de [BD] ;

(D) CANB est un parallélogramme ;

(E) M appartient au plan (BAD) ;

(F) L'égalité peut s'écrire : $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$, donc la droite (BM) est parallèle au plan (ACD) ;

(G) les droites (AM) er (BC) sont parallèles ; (H) la droite (BM) est parallèle au plan (ACD) ;

(K) la droite(CM) est parallèle au plan (BDA).

2. (A) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(B) Il existe un réel *k* tel que $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$.

(C) Il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$.
(D) Il existe des réels c et d tels que $\overrightarrow{AM} = c\overrightarrow{BC} + d\overrightarrow{BD}$.
(E) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
(F) Il existe de réels e et f tels que $\overrightarrow{DM} = e\overrightarrow{DA} + f\overrightarrow{DB}$.

3 Démonter que des points sont coplanaires

1. a. $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$
$= -\frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, car K est le milieu de [CD] donc $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$ d'après la règle du parallélogramme.

b. $2\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$, $6\overrightarrow{IL} = -\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BD}$ et $6\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BC}$ d'où $6\overrightarrow{IJ} + 6\overrightarrow{IL} = -4\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{BD}$ $= 4(2\overrightarrow{IK}) = 8\overrightarrow{IK}$. On a donc $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{IL}$.

c. On en déduit que I, J, K et L sont coplanaires.

2. a. ABCD est un tétraèdre donc B, C, D, A ne sont pas coplanaires et $(B\,;\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ est un repère de l'espace.
Dans ce repère B(0 ; 0 ; 0), C(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), A(0 ; 0 ; 1), $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$, $J\left(\frac{2}{3}\,;0\,;0\right)$.

$$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \text{ donc } \begin{cases} x_L = 0 \\ y_L = \frac{2}{3} \\ z_L - 1 = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{d'où } L\left(0\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right).$$

b. $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{2}{3}\,;0\,;-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IL}\left(0\,;\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{6}\right)$.

On cherche s'il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{IK} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IL} \text{ c'est-à-dire tels que } \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\alpha \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\beta \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\beta \end{cases}$$

On trouve $\alpha = \frac{3}{4}$ et $\beta = \frac{3}{4}$ et la 3^e^ égalité est vérifiée
$-\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$.

Donc $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{IL}$.

c. On en déduit que $K \in (IJL)$ et donc que I, J, K et L sont coplanaires.

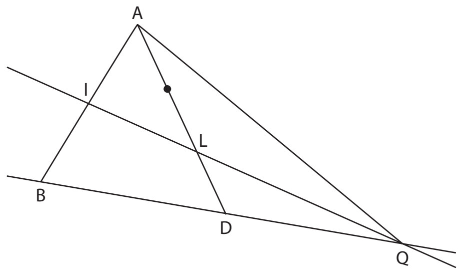
3. a. Voir sur le site.

b. Il semble que les droites (IL) et (JK) soient sécantes en un point de (BD) qui est le symétrique de B par rapport à D. Démontrons-le.

On désigne par Q le symétrique de B par rapport à D.

• Les droites (IL) et (BD) sont coplanaires car elles sont dans le plan (ABD).

Démontrons qu'elles sont sécantes en Q.



$\overrightarrow{QL} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{QA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. Or D est le milieu de [BQ] donc d'après la règle du parallélogramme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AD}$ et donc $\overrightarrow{QL} = \overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AI}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{QI}$.

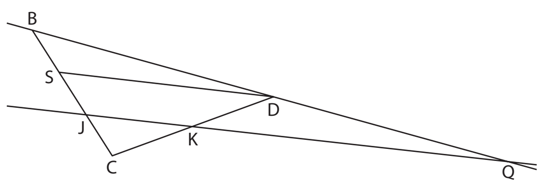
Les vecteurs $\overrightarrow{QL}$ et $\overrightarrow{QI}$ sont colinéaires et donc les points I, L et Q sont alignés. Par suite les droites (DB) et (IL) sont bien sécantes en Q.

Autre méthode utilisant le résultat suivant : *Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle et situé aux 2/3 de chaque médiane en partant du sommet.*

Dans le triangle ABQ, D est le milieu de [BQ] donc (AD) est une médiane. Comme $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, L est le centre de gravité du triangle ABQ. Or I est le milieu de [AB] donc (QI) est aussi une médiane et $L \in (QI)$. Les droites (IL) et (QI) sont donc confondues et (DB) et (IL) sont donc bien sécantes en Q.

• Les droites (JK) et (BD) sont coplanaires car elles sont dans le plan (BCD).

Montrons qu'elles sont sécantes en Q.



$\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{QC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Or K est le milieu de [CD] donc, d'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{CB})$ d'où

$\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{QC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CQ} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{QC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{QJ} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{QC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. On a donc $\overrightarrow{QK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{QJ}$.

Par suite J, K et Q sont alignés et donc les droites (JK) et (BD) sont sécantes en Q.

Autre méthode en introduisant le point S milieu de [BJ].
On se place dans le plan (BCD).

Dans le triangle SCD, J est le milieu de [SC] et K est le milieu de [CD], donc (JK) est parallèle à (SD).

Dans le triangle BJQ, D est le milieu de [BC] et S est le milieu de [BJ], donc (SD) est parallèle à (JQ).

On en déduit que les droites (JK) et (JQ) sont parallèles. Comme elles ont un point commun J, elles sont confondues et donc les points J, K et Q sont alignés et les droites (JK) et (BD) sont bien sécantes en Q.

c. Les droites (IL), (BD) et (JK) sont concourantes en Q. En particulier, les droites (JK) et (IL) sont sécantes en Q, elles sont donc coplanaires et les points I, J, K et L également.

CHAPITRE 11

Produit scalaire dans l'espace

Pour reprendre contact

① Produit scalaire dans un repère

1. ABCD est un carré de côté 4 donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = 4$; on en déduit que $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \perp \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\left\|\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right\| = 1$ donc $\left(A ; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé du plan.

2. $A(0 ; 0)$, $D(0 ; 4)$, $I(2 ; 0)$, $J(4 ; 2)$ donc $\overrightarrow{AJ}(4 ; 2)$ et $\overrightarrow{DI}(2 ; -4)$ et donc $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$.

3. On en déduit que $(AJ) \perp (DI)$.

② Produit scalaire et projeté orthogonal

a. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = AI \times AB = 8$ $\quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BJ} = BC \times BJ = 8$

b. $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = -8 + 8 = 0$.

③ Produit scalaire et norme

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 7\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2) = 18$

④ Produit scalaire et cosinus

1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) = 12\sqrt{3}$.

2. $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC\cos(\widehat{ABC})$ donc $AC^2 = 52 - 24\sqrt{3}$ et $AC = \sqrt{52 - 24\sqrt{3}}$.

⑤ Droite et cercle dans le plan

1. $\vec{u}(1 ; 2)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{n}(2 ; -1)$ est un vecteur normal à d.

2. $M(x ; y) \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1(x - 1) + 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$.

3. $M(x ; y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow AM = 2 \Leftrightarrow AM^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

⑥ Volume d'un tétraèdre

2. $V = \frac{1}{3}\text{Aire}(ABC) \times AD = \frac{32}{3}$.

3. Soit h la hauteur issue de A : $V = \frac{1}{3}\text{Aire}(BCD) \times h$. Or Aire (BCD) $= \frac{1}{2}CD \times BB'$ où B′ est le milieu de [CD]

$CD^2 = AD^2 + AC^2 = 16 + 16 = 32$, d'où $CD = 4\sqrt{2}$ et $BB' = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$, donc $\text{Aire}(BCD) = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$ et $V = \frac{1}{3} \times 8\sqrt{3} \times h$. On en déduit que $h = \frac{32}{8\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

7 Représentation paramétrique

1. (AB) : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 4t \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2 - t = -2 \\ -1 - t = -5 \\ 3 - 4t = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 4 \\ t = 4 \end{cases}$ donc $C \in (AB)$. $\begin{cases} 2 - t = 0 \\ -1 - t = -3 \\ 3 - 4t = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$ donc $D \notin (AB)$.

Activité 1

1. a. Dans (ABF), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 16$.

b. Dans (ACG), $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC}^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$.

c. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ donc dans (HBF), $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BF}^2 = -4^2 = -16$.

d. $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$, donc dans (EHD),

$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DI}) \cdot (\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \cdot (-\overrightarrow{DA}) + HD^2 + 0 = -8$.

e. Dans (OAB), $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(12 + 12 - 16) = 4$, car $OA = OB = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

2. Dans (ABC), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 16$.

Dans (ABG), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ} = AB \times AJ = 4 \times 2 = 8$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc dans (DCG), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{LC} = \frac{1}{2}DC^2 = 8$.

$16 = 8 + 8$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LC}$ ou encore $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LC}$.

Activité 2

A. 1. a. (OAG) // (CBF).

b. C(0 ; 4 ; 0), B(2 ; 4 ; 0), F(0 ; 4 ; 3), E(2 ; 4 ; 3). Tous ces points ont la même ordonnée : 4.

c. (CBF) // (OAG) donc $\vec{i}$ et $\vec{k}$ dirigent (CBF). Comme $C \in (CBF)$, si $M \in (CBF)$ il existe x et z réels tels que $\overrightarrow{CM} = x\vec{i} + z\vec{k}$, d'où $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = 4\vec{j} + x\vec{i} + z\vec{k} = x\vec{i} + 4\vec{j} + z\vec{k}$ et $M(x\,;4\,;z)$.

d. Réciproquement, si $M(x\,;4\,;z)$ alors $\overrightarrow{CM}(x\,;0\,;z)$ soit $\overrightarrow{CM} = x\vec{i} + z\vec{k}$ et M appartient au plan passant par C et dirigé par $\vec{i}$ et $\vec{k}$ c'est-à-dire au plan (CBF).

2. a. (OAG) : $y = 0$ **b.** (OCG) : $x = 0$ **c.** (ABD) : $x = 2$

d. (OAC) : $z = 0$ **e.** (GDF) : $z = 3$.

B. 1. $y = 4$ est une équation du plan (BCF), $z = 0$ est une équation du plan (ABC) donc l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ est (BC) la droite d'intersection de ces deux plans.

2. (BE) est la droite d'intersection des plans (ABD) d'équation $x = 2$ et (BCF) d'équation $y = 4$, donc le système $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ définit la droite (BE).

3. (DE) est la droite d'intersection des plans (ABD) et (DGF) donc (DE) est définie par le système $\begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Activité 3

1. $A(2\,;0\,;0)$; $B(0\,;\frac{3}{2}\,;0)$; $C(0\,;0\,;-3)$

2. a. $\overrightarrow{AB}(-2\,;\frac{3}{2}\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;0\,;-3)$ ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés.

b. On en déduit que ε ne peut pas être une droite.

3. a. (AB) : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = 0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.

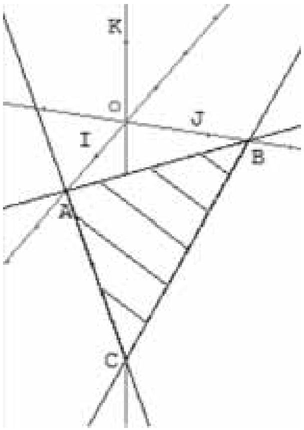
b. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $3(2-2t)+4(\frac{3}{2}t)-2\times 0-6=6-6t+6t-6=0$ donc tout point de (AB) appartient à ε.

4. (AC) : $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 0 \\ z = -3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $3(2-2t)+4\times 0-2(-3t)-6=6-6t+6t-6=0$ donc tout point de (AC) appartient à ε.

5. ε semble être le plan (ABC).

6. Avec Geoplan-Geospace



Activité 4

1. $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y+z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3z-1 \\ 2(2y-3z-1)+y+z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3z-1 \\ 5y-5z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z+3 \\ y=z+2 \end{cases}$

2. $x-2y+3z+1=0$ et $2x+y+z-8=0$ sont des équations cartésiennes de deux plans non parallèles donc l'ensemble des points M(x ; y ; z) dont les coordonnées vérifient (S) est la droite d d'intersection de ces deux plans.

Pour $z=0$, $x=3$ et $y=2$ donc A(3 ; 2 ; 0) appartient à d.

Pour $z=1$, $x=2$ et $y=3$ donc B(2 ; 3 ; 1) appartient à d et $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ est un vecteur directeur de d.

3. a. Le logiciel permet de conclure que le système (S) est équivalent à $\begin{cases} y=-x+5 \\ z=-x+3 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x=t \\ y=5-t \\ z=3-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ qui

est la représentation paramétrique de la droite de vecteur directeur de coordonnées (1 ; – 1 ; – 1) soit $-\overrightarrow{AB}$ et passant par le point de coordonnées (3 ; 2 ; 0) (pour $t = 3$) soit A, donc la réponse est bien compatible avec 2.

b. On a changé l'ordre des variables : (z ; y ; x) au lieu de (x ; y ; z). On retrouve alors le système de la question 1.

TP1. Tétraèdre rectangle et régulier

1. OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles isocèles en O.

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2a^2$. De même $AC^2 = 2a^2$ et $BC^2 = 2a^2$ donc $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$ et ABC est un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$.

$\text{aire(ABC)} = \frac{1}{2}\,AB \times AC \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times 2a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. a. $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IH})\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}$

Or (OI) médiane issue de O dans OAB isocèle en O est aussi la hauteur issue de O donc (OI)$\perp$(AB).

On a aussi (IH)$\perp$(AB) car (IH) est la médiane (CI) dans ABC équilatéral ; elle est aussi hauteur.

D'où $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 + 0 = 0$ et donc les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.

Autre méthode : OA = OB ; CA = CB et IA = IB donc O, C et I sont équidistants de A et B : ils appartiennent donc au plan médiateur $\mathcal{P}$ de [AB].

Comme ils ne sont pas alignés, $\mathcal{P}$ = (OCI). Or (AB) est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc (AB) est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à (OH).

b. (OH) est la hauteur issue de O dans le triangle OCI donc (OH) est orthogonale à (CI).

(OH) est donc orthogonale à (CI) et (AB) deux droites sécantes (en I) du plan (ABC) donc (OH) est orthogonale à (ABC).

3. a. (OH) est donc orthogonale à toutes les droites du plan (ABC) en particulier à (BC).

Comme OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O, la droite (OA) est orthogonale à (OB) et (OC) deux droites sécantes du plan (OBC). Elle est donc orthogonale à ce plan et donc à (BC). On en déduit que (BC) étant orthogonale à deux droites sécantes, (OA) et (OH), de (OAH) est orthogonale à (OAH) et donc à (AH). D'où (AH) est bien la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Autre méthode :

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$ car OAB et OAC sont rectangles en O et (OH) est orthogonale à (ABC) donc à (BC). D'où (AH) est bien la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

b. Comme ABC est équilatéral, la hauteur (AH) est aussi médiane et donc H est le point d'intersection des médianes (CI) et (AH). D'où $\overrightarrow{CH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CI}$.

4. $V = \dfrac{1}{3}\times \text{aire(OBC)} \times OA = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{a^2}{2}\times a = \dfrac{a^3}{6}$ et $V = \dfrac{1}{3}\times\text{aire(ABC)}\times OH = \dfrac{1}{3}\times a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times OH = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times OH$, d'où $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times OH = \dfrac{a^3}{6}$ et donc $OH = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. 1. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et de norme 1 donc $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

2. Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $A(a\,;0\,;0)$, $B(0\,;a\,;0)$ et $C(0\,;0\,;a)$. I est le milieu de [AB] donc $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$.

$\overrightarrow{CI}\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};-a\right)$. D'après 3. b., $\overrightarrow{CH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CI}$ soit $\begin{cases} x_H = \dfrac{a}{3} \\ y_H = \dfrac{a}{3} \\ z_H - a = -\dfrac{2a}{3}\end{cases}$ d'où $H\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{a}{3};\dfrac{a}{3}\right)$.

D est le symétrique de H par rapport à O d'où $D\left(-\dfrac{a}{3};-\dfrac{a}{3};-\dfrac{a}{3}\right)$.

3. $DA = \sqrt{\left(\dfrac{4a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{a}{3}\right)^2} = a\sqrt{2}$; de même $DB = DC = a\sqrt{2}$. Comme d'après A. 1., $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$, ABCD est bien un tétraèdre régulier.

4. a. Le plan médiateur de [AB] est (OCI) (voir A. 2. a. (deuxième méthode)).

La hauteur (AH) est la médiane issue de A dans ABC équilatéral. Elle coupe [BC] en son milieu J.

JB = JC, OB = OC, AB = AC et O, A, J non alignés donc (OAJ) est le plan médiateur de [BC].

b. O et H sont deux points communs aux plans distincts (OCI) et (OAJ) donc ces deux plans sont sécants suivant la droite (OH).

Comme Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, on a ΩA = ΩB = ΩC = ΩD.

Ω est équidistant de A et B donc Ω appartient à (OCI) plan médiateur de [AB] ; Ω est équidistant de B et C donc Ω appartient à (OAJ) plan médiateur de [BC]. Ω appartient donc à l'intersection de ces deux plans c'est-à-dire à la droite (OH).

c. Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{O\Omega} = k\overrightarrow{OH}$ d'où $\Omega\left(\dfrac{ak}{3};\dfrac{ak}{3};\dfrac{ak}{3}\right)$.

Or ΩA = ΩD soit $\left(a-\dfrac{ak}{3}\right)^2+\left(\dfrac{ak}{3}\right)^2+\left(\dfrac{ak}{3}\right)^2 = 3\left(\dfrac{ak}{3}+\dfrac{a}{3}\right)^2$.

On obtient : $\dfrac{a^2}{9}\left((3-k)^2+k^2+k^2\right) = \dfrac{3a^2(k+1)^2}{9}$ soit $k = \dfrac{1}{2}$ d'où $\Omega\left(\dfrac{a}{6};\dfrac{a}{6};\dfrac{a}{6}\right)$ et Ω est le milieu de [OH].

TP2. Produit scalaire et maximum

A. Voir site en ligne.

Conjecture : Il semble que la valeur maximale de l'angle $\widehat{AMC}$ soit d'environ 2,094 radians et que dans ce cas, M soit le projeté orthogonal de A sur (BH) (pour le visualiser, isoler le plan (ABH)).

B. 1. Les points B et H sont équidistants de A et C donc la droite (BH) est incluse dans la plan médiateur du segment [AC] donc le point M de (BH) est aussi équidistant de A et C donc MA = MC.
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}) = MA^2 + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}$.
Soit I le milieu de [AC]. M appartient au du plan médiateur de [AC] donc I est le projeté orthogonal de M sur (AC) donc
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC} = IA \times AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \times \sqrt{2}a = a^2$.
On en déduit que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = MA^2 - a^2$.

2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = MA \times MC \times \cos(\widehat{AMC})$ donc $\cos(\widehat{AMC}) = \dfrac{MA^2 - a^2}{MA^2} = 1 - \dfrac{a^2}{MA^2}$.

La fonction cos étant décroissante sur $[0\,;\pi]$, $\widehat{AMC}$ est maximum quand $\cos(\widehat{AMC})$ est minimum et donc quand $\dfrac{a^2}{AM^2}$ est maximum et donc quand AM^2 est minimum.

3. Dans le triangle ABH, rectangle en A, AM est minimum quand M est le projeté orthogonal de A sur (HB). On a alors $AM = AB\sin(\widehat{ABH}) = AB \times \dfrac{AH}{HB}$
Donc $AM = a \times \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$ et $\cos(\widehat{AMC}) = -\dfrac{1}{2}$ soit $\widehat{AMC} = \dfrac{2\pi}{3} \approx 2{,}094$ rad.

TP3. Volume d'un tétraèdre

1. b. K semble être le symétrique de A par rapport à E.

c. Il semble que KGB et KDG soient rectangles en G.

2. Si E est le milieu de [AK], $\overrightarrow{KG}\cdot\overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG})\cdot(\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}) = 0$ donc KGB est rectangle en G et
$\overrightarrow{KG}\cdot\overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HG})\cdot(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HD}) = 0$ donc KDG est rectangle en G.
On en déduit que (KG) est orthogonale à (GD) et (GB) droites sécantes de (BGD) donc KG est la hauteur associée à la base BGD du tétraèdre BDGK.
Or BDG est un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ (en nommant a la longueur de l'arête du cube) donc
$\text{Aire}(BGD) = \dfrac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.
De plus, GK = CE est la grande diagonale du cube donc $GK = a\sqrt{3}$ et donc $V(BDGK) = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{3}a \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) = \dfrac{a^3}{2}$.

TP4. Intersection de 2 plans

1. a. $\overrightarrow{n_1}(1\,;-1\,;2)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$; $\overrightarrow{n_2}(-3\,;3\,;-6)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$; $\overrightarrow{n_2} = -3\overrightarrow{n_1}$ donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

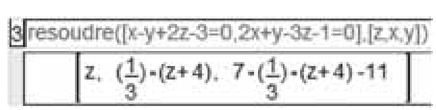
b. Le système n'a pas de solution donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont strictement parallèles.

2. a. $\overrightarrow{n_3}(2\,;1\,;-3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_3}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ ne sont pas parallèles et sont donc sécants suivant une droite.

b. Le système admet une infinité de triplets solutions : les coordonnées des points de la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$.

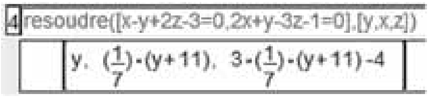
c. $\dfrac{-3(7x-11)-5}{-7} = 3x - 4$. L'ensemble des solutions du système du b. est l'ensemble des triplets de la forme $(x\,;7x-11\,;3x-4)$ où $x \in \mathbb{R}$.

d. En posant $x = t$, on obtient le 1er système qui est une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$. En modifiant l'ordre des variables, le logiciel Xcasfr donne :



$\frac{7}{3}(z+4)-11=\frac{7}{3}z-\frac{5}{3}$; en posant $z=t$, on obtient $\begin{cases} x=\frac{4}{3}+\frac{t}{3} \\ y=-\frac{5}{3}+\frac{7}{3}t \\ z=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ qui est une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$.

En choisissant cette fois-ci y comme première variable, le logiciel Xcasfr donne également :



4 resoudre([x-y+2z-3=0,2x+y-3z-1=0],[y,x,z])

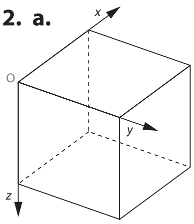
[y, (1/7)·(y+11), 3·(1/7)·(y+11)-4]

$\frac{3}{7}(y+11)-4=\frac{3}{7}y+\frac{5}{7}$; en posant $y=t$, on obtient $\begin{cases} x=\frac{t+11}{7} \\ y=t \\ z=\frac{3t+5}{7} \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ qui est une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$.

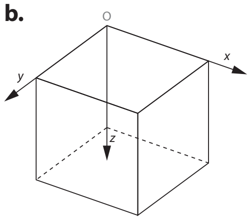
TP5. Le cube colorimétrique

1. Pour $\mathcal{P}_1$: noir, rouge, vert, jaune. Pour $\mathcal{P}_2$: noir, vert, bleu, cyan. Pour $\mathcal{P}_3$: noir, rouge, bleu, magenta.

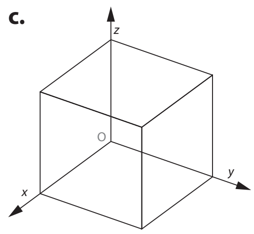
2. a.



b.



c.



3. a. Figure 1 : Le plan cherché passe par les points de coordonnées (1 ; 0 ; 0)(rouge), (0 ; 1 ; 0) (vert) et (0 ; 0 ; 1) (bleu) et a pour équation :
(2) : $x+y+z-1=0$.

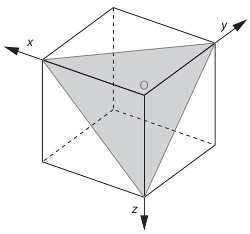


Figure 2 : Le plan cherché passe par les points de coordonnées (1 ; 1 ; 0) (jaune), (1 ; 0 ; 1) (magenta) et (0 ; 0 ; 0) (noir) et a pour équation :
(1) : $-x+y+z=0$.

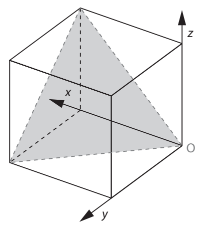
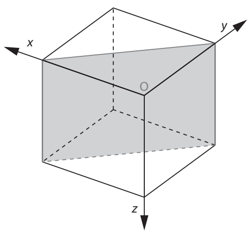
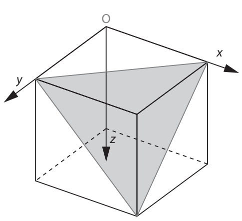


Figure 3 : Le plan cherché passe par les points de coordonnées (0 ; 1 ; 1) (cyan), (0 ; 1 ; 0) (vert), (1 ; 0 ; 0) (rouge) et (1 ; 0 ; 1) (magenta) et a pour équation :
(3) : $x+y-1=0$.



b. La section du cube par le plan d'équation (4) : $x+y-z-1=0$ passe par les points de coordonnées (1 ; 0 ; 0) (rouge), (0 ; 1 ; 0) (vert) et (1 ; 1 ; 1) (blanc). Avec le repère indiqué sur la figure 3, on obtient le triangle ci-contre :



Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 Oui, car $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$ et (AF) ⊥ (EB) ; non, car EBG est équilatéral ; non (vecteurs égaux non nuls) ; non, car $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$ et EBG équilatéral.

2 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB}^2 = a^2$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = AB^2 = a^2$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

3 (AD) ⊥ (ABE) ; (GB) ⊥ (DEF).

4 **a.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ **b.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -13$ **c.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

5 d et d' sont orthogonales car $\vec{u}$ et $\vec{u}'(1 ; 2 ; 1)$ vecteur directeur de d' sont orthogonaux.

d et d' sont perpendiculaires, car de plus $A \in d'$.

6 Oui, car leurs coordonnées vérifient cette équation $2x - 3y + 2z + 6 = 0$.

7 $\vec{n}(2 ; 3 ; -5)$.

8 $\vec{n}(2 ; 5 ; -2)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + 5y - 2z - 5 = 0$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 - 2 = 0$ donc la droite est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

$A(-1 ; 3 ; 4) \in \mathscr{P}$ car $-2 + 15 - 8 - 5 = 0$. Donc la droite est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

9 $-2x + y + 4z - 4 = 0$.

10 $A(-2 ; 0 ; 0)$, $B\left(0 ; -\dfrac{3}{2} ; 0\right)$, $C(0 ; 0 ; 6)$.

11 $z = 6$.

ENTRAÎNEMENT

12 **1. a.** Oui, car (EF) est orthogonale au plan (BFG).

b. Non, car (HF) est parallèle à (DB) et DBG équilatéral.

c. Oui, car (ED) est parallèle à (FC) et (FC) est perpendiculaire à (BG) (diagonales d'un carré).

2. a. Oui, car (EG) est orthogonale à (HF) (diagonales du carré EFGH) et (EG) est orthogonale à (BF) (puisque (BF) est orthogonale au plan (EFG)).

b. Non, car si (EC) était orthogonale à (BFH), (EC) serait orthogonale à (BH) droite de (BFH) ce qui est impossible car BCHE est un rectangle qui n'est pas un carré.

3. a. Oui, car (EG) droite de (EGA) est orthogonale à (HF) et à (BF) droites sécantes de (DFH) donc (EG) est orthogonale à (DFH).

b. Oui, car (AC) droite de (ACF) est orthogonale à (DB) et (HD) droites sécantes de (DFH) donc (AC) est orthogonale à (DFH).

13 ABC et ABD sont rectangles en A donc (AB) est orthogonale à (AC) et (AD) deux droites sécantes du plan (ACD), d'où (AB) est orthogonale à ce plan donc à toutes les droites de ce plan en particulier à (CD).

14 Voir le corrigé en fin de manuel.

15 **1.** ABC est équilatéral donc la médiane (AI) est aussi la hauteur issue de A et donc (AI) ⊥ (BC).

De même BCD est équilatéral donc (DI) ⊥ (BC).

(BC) est orthogonale à (AI) et (DI) deux droites sécantes en I du plan (ADI) donc (BC) est orthogonale au plan (ADI).

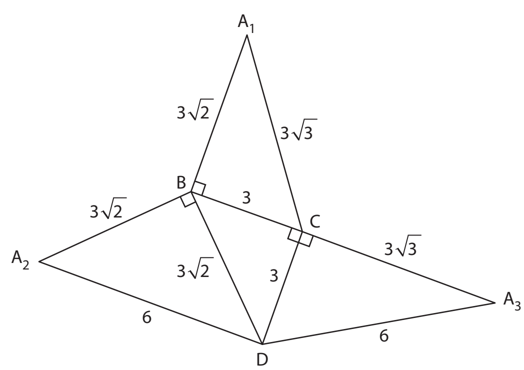
Deuxième méthode : ABCD est régulier donc AC = AD et DC = DB et I est le milieu de [BC] donc IB = IC. Les trois points non alignés A, D, I définissent donc le plan médiateur de [BC] ce qui prouve que (BC) est orthogonal à (ADI).

2. (BC) est donc orthogonale à toutes les droites du plan (ADI) en particulier à (AD).

16 **1.** $AB^2 + BC^2 = 18 + 9 = 27 = BC^2$ et
$AB^2 + BD^2 = 18 + 18 = 36 = AD^2$, donc ABC et ABD sont des triangles rectangles en B.

$BC^2 + CD^2 = 9 + 9 = 18 = BD^2$ et
$CD^2 + CA^2 = 9 + 27 = 36 = AD^2$, donc BDC et ADC sont des triangles rectangles en C.

2.



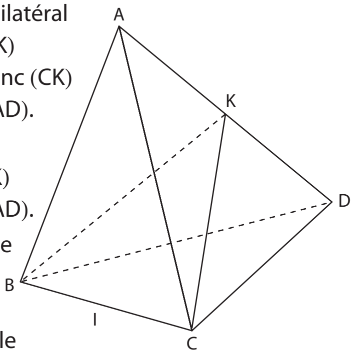
3. a. ABC et ABD sont des triangles rectangles en B donc (AB) ⊥ (BC) et (AB) ⊥ (BD) ; (AB) est orthogonale à deux droites sécantes (en B) du plan (BCD) donc (AD) est orthogonale à ce plan et par suite (AD) est la hauteur issue de A du tétraèdre ABCD.

b. BDC et ADC sont des triangles rectangles en C donc (DC) ⊥ (CA) et (DC) ⊥ (BC) ; (DC) est orthogonale à deux droites sécantes (en C) du plan (ABC) donc (DC) est orthogonale à ce plan et (DC) est donc la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD.

4. Volume de ABCD :

$V = \frac{1}{3} \times \text{aire(BCD)} \times AB = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$

17 **1.** ACD est équilatéral donc la médiane (CK) est aussi hauteur donc (CK) est orthogonale à (AD).



De même, ABD est équilatéral donc (BK) est orthogonale à (AD).

(AD) est orthogonale à deux droites sécantes de (BCK) donc est orthogonale à ce plan et [AK] est la hauteur issue de A du tétraèdre ABCK.

On peut aussi montrer que (BCK) est le plan médiateur de [AD].

2. $BK = CK = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (hauteurs de triangles équilatéraux de côté 6), donc BCK est isocèle en K.

Soit I le milieu de [BC]. La médiane (BI) de BCK est aussi hauteur donc le triangle BIK est rectangle en I et donc $IB^2 + IK^2 = BK^2$ soit $IK^2 = 27 - 9 = 18$. D'où $IK = 3\sqrt{2}$.

$\text{Aire(BCK)} = \frac{IK \times BC}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 6}{2} = 9\sqrt{2}.$

Et le volume V du tétraèdre ABCK :

$V = \frac{1}{3} \times \text{aire(BCK)} \times AK = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{2} \times 3 = 9\sqrt{2}.$

18 Voir le corrigé en fin de manuel.

19 Le point d'intersection de (AB) et du plan (BCG), orthogonal à (AB) passant par J est B donc B est le projeté orthogonal de J sur (AB).

D'où $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = a^2$.

2. a. $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}^2 = a^2$;

$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA}^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$;

$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BF} = a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}.$

b. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BL}^2 = \frac{a^2}{4}$; $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FG}^2 = a^2$;

$\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{a}{2} \times a = \frac{a^2}{2}.$

20 **1.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BK} \cdot (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ}) = 0 + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BL}$

$$= a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

2. $BK^2 = BC^2 + CK^2 = \frac{5}{4}a^2$ d'où $BK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

De même $BJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

3. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BJ} = BK \times BJ \times \cos(\widehat{BKJ})$

d'où $\cos(\widehat{BKJ}) = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{5a^2}{4}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ et $\widehat{BKJ} \approx 66{,}4°$.

Cette mesure ne dépend pas de a.

21 **1.** $OF = OG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(OF^2 + OG^2 - FG^2)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3a^2}{4} \times 2 - a^2\right) = \frac{a^2}{4}.$$

3. a. Les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme 1.

b. Dans le repère choisi, $F(a\,;0\,;a)$, $G(a\,;a\,;a)$ et $O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{OF}\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OG}\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$,

d'où $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{a^2}{4}$.

22 **1.** ABC est équilatéral donc

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}.$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{a^2}{2}.$

Enoncé modifié $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ au lieu de $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$

2. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}$ d'où IJKL est un parallélogramme.

De plus, $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. D'où $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ d'après 1. et donc (IJ) et (IL) dont perpendiculaires.

De plus, $IJ = \frac{1}{2}a = IL$.

IJKL est donc un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur, donc IJKL est un carré.

23 D'après la propriété d'AL-Kashi,

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$ soit

$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times 2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos(\widehat{AOB})$ d'où

$\cos(\widehat{AOB}) = \dfrac{\frac{3a^2}{2} - a^2}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}$ et $\widehat{AOB} \approx 70{,}5°$.

$\widehat{BOG} = 180 - \widehat{AOB} \approx 109{,}5°$.

$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}(OI^2 + OJ^2 - IJ^2)$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - a^2\right) = 0.$$

D'où $\widehat{IOJ} = 90°$.

$IG^2 = IB^2 + BG^2 - 2IB \times BG \times \cos(\widehat{IBG})$; comme IB = IG, on obtient $BG^2 = 2IB \times BG \times \cos(\widehat{IBG})$ soit

$$\cos(\widehat{IBG}) = \frac{BG}{2IB} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \times \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ d'où } \widehat{IBG} \approx 50,8°.$$

24 $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{DA}^2$
$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$
$= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} \cdot (2\overrightarrow{DB}) = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

2. a. BAC est isocèle en B et DAC est isocèle en D donc BA = BC et DA = DC d'où $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 0$ et donc d'après 1., $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, d'où (AC) et (DB) sont orthogonales.

3. BA = BC donc B appartient au plan médiateur $\mathcal{P}$ de [AC]. DA = DC donc D appartient aussi à $\mathcal{P}$.

Par suite (DB) est incluse dans $\mathcal{P}$. Or (AC) est orthogonale à $\mathcal{P}$ donc (AC) est orthogonale à (DB).

25 **a.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2y - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow y = x + 6$.

Pour $x = 0$ et $y = 6$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -6 - 5 + xy = 0 \Leftrightarrow xy = 11$.

Pour $x = 1$ et $y = 11$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

26 **1.** $\overrightarrow{AB}(1 ; -1 ; -3)$; $\overrightarrow{AC}(0 ; -3 ; 1)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 - 3 = 0$ donc (AB) $\perp$ (AC) et ABC est un triangle rectangle en A.

2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$.

$\overrightarrow{BA}(-1 ; 1 ; 3)$; $\overrightarrow{BC}(-1 ; -2 ; 4)$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 11$

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \times BC} = \frac{11}{\sqrt{11} \times \sqrt{21}}$$

d'où $\widehat{ABC} \approx 0,76$ rad.

$\widehat{ACB} = \pi - \frac{\pi}{2} - \widehat{ABC} \approx 0,81$ rad.

27 **1.** $\overrightarrow{AB}(1 ; 3 ; -1)$; $\overrightarrow{AC}(4 ; 4 ; 0)$; $\overrightarrow{BC}(3 ; 1 ; 1)$.

$AB = BC = \sqrt{11}$ et $AC = \sqrt{32}$ donc le triangle ABC est isocèle en B.

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$\text{d'où } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{16}{\sqrt{11} \times \sqrt{32}} = \frac{4}{\sqrt{22}}$$

et $\widehat{BAC} \approx 31,5°$. Comme ABC est isocèle en B,

$\widehat{ACB} = \widehat{BAC} \approx 31,5°$ et $\widehat{ABC} = 180 - 2\widehat{BAC} \approx 117°$.

28 Voir le corrigé en fin de manuel.

29 **1.** $\overrightarrow{AC}(3 ; 10 ; 3)$, $\overrightarrow{BD}(3 ; 10 ; 3)$, $\overrightarrow{AB}(-6 ; 3 ; -4)$.

D'où $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -18 + 30 - 12 = 0$.

2. ABDC est un parallélogramme qui a un angle droit donc ABDC est un rectangle.

30 **1. a.** (Mm) est orthogonale à $\mathcal{P}$ donc (Mm) est orthogonale à (Om) droite du plan $\mathcal{P}$ d'où

$OM^2 = Om^2 + mM^2$.

b. $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ d'où $M(x ; y ; z)$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$ avec $\overrightarrow{Om} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{mM} = z\vec{k}$ par définition des coordonnées d'un point dans un repère.

$Om^2 = x^2 + y^2$ car $m(x ; y)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$ et $mM^2 = \|z\vec{k}\|^2 = z^2 \times \|\vec{k}\|^2 = z^2 \times 1 = z^2$.

c. $OM^2 = Om^2 + mM^2$ d'où $OM^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2.
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\big((x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2\\ &\quad - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2\big)\end{aligned}$$

31 $\overrightarrow{AC}(3 ; 10 ; 3)$, $\overrightarrow{BD}(3 ; 10 ; 3)$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AB}(-6 ; 3 ; -4)$, $\overrightarrow{AD}(-3 ; 13 ; -1)$, $\overrightarrow{BC}(9 ; 7 ; 7)$ et

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -18 + 30 - 12 = 0$,

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -27 + 91 - 7 \neq 0$.

2. ABCD est donc un parallélogramme ayant un angle droit donc ABCD est un rectangle (qui n'est pas un carré car (AD) et (BC) ne sont pas perpendiculaires).

Aire(ABCD) $= AB \times AC = \sqrt{61} \times \sqrt{118} = \sqrt{7198}$.

32 Soit $(x ; y ; z)$, $(x' ; y' ; z')$ et $(x'' ; y'' ; z'')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans un repère orthonormé de l'espace.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x(x' + x'') + y(y' + y'') + z(z' + z'')\\ &= xx' + yy' + zz' + xx'' + yy'' + zz'' = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$

33 **1. a.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 4 + 0 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b. $\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$; $\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{u}$ est de norme 1 et colinéaire à $\vec{u}$.

c. $\|\vec{v}\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{20}}\vec{v}$ est de norme 1 et colinéaire à $\vec{v}$.

2. a. $\vec{w}(x ; y ; z)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} z = -\frac{5}{3}x \\ y = 2x \end{cases}$$

Posons $t = \frac{x}{3}$, les solutions du système sont les triplets de la forme $(3t ; 6t ; -5t)$ où t décrit $\mathbb{R}$.

b. $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est un repère orthonormal de l'espace

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} \vec{e_1} \perp \vec{e_3} \text{ et } \vec{e_2} \perp \vec{e_3} \\ \|\vec{e_3}\| = 1 \end{cases}.$$

D'après 2., les coordonnées de $\vec{e_3}$ sont de la forme $(3t ; 6t ; -5t)$.

$\|\vec{e_3}\| = 1 \Leftrightarrow 9t^2 + 36t^2 + 25t^2 = 1 \Leftrightarrow 70t^2 = 1$

$\Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{70} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{70}}$ ou $t = -\frac{1}{\sqrt{70}}$.

$\overrightarrow{e_3}\left(\frac{3}{\sqrt{70}};\frac{6}{\sqrt{70}};-\frac{5}{\sqrt{70}}\right)$ ou $\overrightarrow{e_3}\left(-\frac{3}{\sqrt{70}};-\frac{6}{\sqrt{70}};\frac{5}{\sqrt{70}}\right)$.

34 **1.** VARIABLES : x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B nombres.
ENTREES : Saisir x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B.
TRAITEMENT : D2 prend la valeur
$(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2$.
SORTIE : Afficher « AB^2 = », D2.
2. Voir le site Math'x.

35 **1.** Voir le site Math'x.

2. a. $d:\begin{cases}x=2-t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

b. Pour M point de d de paramètre t :

$$\begin{aligned}\mathrm{MA}=\mathrm{MB} &\Leftrightarrow \mathrm{MA}^2=\mathrm{MB}^2\\ &\Leftrightarrow (-1+t)^2+(-2+2t)^2+(-t)^2\\ &= t^2+(-2+2t)^2+(-2-t)^2\\ &\Leftrightarrow t^2-2t+1=t^2+4t+4 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Il existe donc un seul point de d tel que MA = MB : c'est le point M de d de paramètre $-\frac{1}{2}$: $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2};4;\frac{1}{2}\right)$.

3. a. L'ensemble des points M de l'espace tels que MA = MB est le plan médiateur $\mathcal{P}$ de [AB].

Il n'existe aucun point de d tel que MA = MB si et seulement si d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$ c'est-à-dire $\vec{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\mathrm{C}\notin\mathcal{P}$.

$\vec{u}(x;y;z)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(1;0;-1)$
$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \Leftrightarrow x-z=0 \Leftrightarrow x=z$.

Soit I le milieu de [AB] : $\mathrm{I}\left(\frac{3}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$.

$\mathrm{C}\notin\mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq 0 \Leftrightarrow x_C-z_C-2\neq 0$.

Donc il n'existe aucun point de d tel que MA = MB si et seulement si d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1;y;1)$, avec y quelconque dans $\mathbb{R}$ et passant par C tel que $x_C-z_C-2\neq 0$.

b. Tous les points de d sont équidistants de A et B si et seulement si d est contenue dans $\mathcal{P}$ si et seulement si d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1;y;1)$, avec y quelconque dans $\mathbb{R}$ et passant par C tel que $x_C-z_C-2=0$.

36 **1.** $d:\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

2. a. $\begin{cases}3=2+t\\2=t\\4=1+t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\t=2\\t=3\end{cases}$

Ce système n'a pas de solution donc $\mathrm{B}(3;2;4)\notin d$.

b. H est le point de d de paramètre t tel que $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{u}$ soit tel que $(2+t-3)\times 1+(t-2)\times 1+(1+t-4)\times 1=0$ c'est-à-dire tel que $t=2$, d'où H(4 ; 2 ; 3).

c. $\overrightarrow{\mathrm{BH}}(1;0;-1)$ donc $\mathrm{BH}=\sqrt{2}$.

3. a. M point de d de paramètre t.
$\overrightarrow{\mathrm{BM}}(t-1;t-2;t-4)$ et
$\mathrm{BM}=\sqrt{(t-1)^2+(t-2)^2+(t-3)^2}=\sqrt{3t^2-12t+14}$.

b. *Enoncé modifié : $f(t)=3t^2-12t+14$.*

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $f'(t)=6t-12$, d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

c. Pour tout réel t, $\mathrm{BM}=\sqrt{f(t)}$; f est positive sur $\mathbb{R}$ (somme de carrés) et, donc $\sqrt{f}$ est aussi strictement décroissante sur $]-\infty;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$. BM est donc minimale pour $x=2$ et ce minimum est $\sqrt{f(2)}=\sqrt{3\times 2^2-12\times 2+14}=\sqrt{2}$.

d. Il s'agit de la distance de B à la droite d.

37 **1.** Voir le site Math'x.

Conjecture : Il semble qu'il existe deux points M de d tels que AMB soit rectangle en M.

2. a. $d:\begin{cases}x=2t\\y=1-3t\\z=2-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

b. ABM rectangle en M $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$
$\Leftrightarrow (2-2t)(3-2t)+(3+3t)3t+(-3+t)(3+t)=0$
$\Leftrightarrow 14t^2-t-3=0$.

Cette équation a deux solutions : $t_1=\frac{1}{2}$; $t_2=-\frac{3}{7}$.

Donc il existe deux points M de d tels que ABM soit rectangle en M. Il s'agit du point M_1 de d de paramètre $\frac{1}{2}$ et du point M_2 de d de paramètre $-\frac{3}{7}$: $\mathrm{M}_1\left(1;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et $\mathrm{M}_2\left(-\frac{6}{7};\frac{16}{7};\frac{17}{7}\right)$.

38 Soit $\vec{n}(a;b;c)$.

a. $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2a+3b+6c=0\\a+5c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3b=-16c\\a=-5c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-\frac{16}{3}c\\a=-5c\end{cases}$.

Prenons $c=-3$, alors $\vec{n}(15;16;-3)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-b+3c=0\\2a+b+5c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3c\\2a=-8c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3c\\a=-4c\end{cases}$.

Prenons $c=1$, alors $\vec{n}(-4;3;1)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c. $4\vec{u}(6;4;3)$. $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$

$\Leftrightarrow \vec{n}\cdot(4\vec{u}) = 0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a+4b+3c=0 \\ 2a+3b+4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+4b+3c=0 \\ 5b+9c=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{10}c \\ b = -\dfrac{9}{5}c \end{cases}.$

Prenons $c = 10$, alors $\vec{n}(7\,;-18\,;10)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

39 **1.** $\overrightarrow{BC}(2\,;-1;-5)$ et $\overrightarrow{BD}(1;2\,;0)$ ne sont pas colinéaires donc les points B, C, D ne sont pas alignés.

2. a. $\overrightarrow{AE}(-2\,;1;-1)$.

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC} = -4-1+5=0$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD} = -2+2+0=0$

(AE) est orthogonale à (BC) et (BD) deux droites sécantes du plan (BCD) donc (AE) est orthogonale au plan (BCD).

3. $\overrightarrow{BE}(0\,;-1;-1)$ et $5\overrightarrow{BE}(0\,;-5\,;-5)$.

On remarque que $\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BD}(0\,;-5\,;-5)$, d'où $\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC} - \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BD}$ et donc $E \in (BCD)$. Par suite B, C, D et E sont coplanaires.

4. $(AE)\perp(BCD)$ et $E\in(BCD)$ donc le projeté orthogonal de A sur (BCD) est E.

40 Voir le corrigé en fin de manuel.

41 **1.** $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{ED}$

$= \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED} = 0+0=0$ car HDAE est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires et $(AB)\perp(ADE)$ donc (AB) est orthogonale à (ED).

De même, $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{EG} = (\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FB})\cdot\overrightarrow{EG}$

$= \overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{EG} = 0+0=0.$

(HB) est orthogonale à (ED) et (EG) deux droites sécantes du plan (EDG) donc (HB) est orthogonale à ce plan.

2. DH est la hauteur relative à la base EHG du tétraèdre DEGH donc le volume V de ce tétraèdre est :

$V = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{EH\times HG}{2}\times DH = \dfrac{a^3}{6}.$

3. DEG est un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ car ses côtés sont des diagonales de faces carrées de côté a du cube.

Aire(DEG)

$= \dfrac{1}{2}\times ED\times DG\times\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\times 2a^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

4. Comme $(HB)\perp(DEG)$, HK est la hauteur relative à la base DEG du tétraèdre DEGH et

$V = \dfrac{1}{3}\times \text{aire(DEG)}\times HK = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\times HK.$

Or $V = \dfrac{a^3}{6}$ d'où $a^2\sqrt{3}\times HK = a^3$ et $HK = \dfrac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

42 **1.** $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{EB}$

$= \overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB} = 0+0=0$ car FEAB est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires et $(AD)\perp(ABE)$ donc (AD) est orthogonale à (EB).

2. De même, $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EG} = (\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HD})\cdot\overrightarrow{EG}$

$= \overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{EG} = 0+0=0.$

(FD) est orthogonale à (EB) et (EG) deux droites sécantes du plan (EBG) donc (FD) est orthogonale à ce plan.

3. $EF = a$ et $ED = a\sqrt{2}$ donc $EF \neq ED$ et par conséquent (EBG) n'est pas le plan médiateur de [FD].

Remarque

Comme (FD) est orthogonale à (EBG), on peut conclure que le plan (EBG) ne coupe pas le segment [FD] en son milieu.

43 **1.** Si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$ alors $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Réciproquement, supposons que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$.

Soit $\vec{w}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ alors $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et donc d'après le 1^er^ prérequis, il existe des réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u}+y\vec{v}$.

On a alors $\vec{n}\cdot\vec{w} = \vec{n}\cdot(x\vec{u}+y\vec{v})$

$= \vec{n}\cdot(x\vec{u})+\vec{n}\cdot(y\vec{v}) = x(\vec{n}\cdot\vec{u})+y(\vec{n}\cdot\vec{v})$

$= x\times 0 + y\times 0 = 0$

d'où $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{P}$.

2. Soit d et d' deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, Δ une droite orthogonale à d et à d' et $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ des vecteurs directeurs respectifs de d, d' et Δ.

Soit d'' une droite quelconque de $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{w}$.

D'après le 3^e^ prérequis, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ (puisque d et d' sont deux droites sécantes de $\mathcal{P}$) d'où d'après 1., $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$ donc à $\vec{w}$.

Et donc, d'après le 3^e^ prérequis, Δ est orthogonale à d''.

44 **1.** $MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA})^2 - (\overrightarrow{MB})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot(2\overrightarrow{MI}+\vec{0}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$

2. $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$

Donc l'ensemble des points équidistants de A et B est le plan passant par I milieu de [AB] et de vecteur normal

$\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire le plan passant par le milieu de [AB] et orthogonal à (AB), soit le plan médiateur de [AB].

45 **1.** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$

$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2.$

2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow MI = IA.$
D'où l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de centre I et de rayon IA, c'est-à-dire la sphère de diamètre [AB].

46 **a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AM} = 0.$

L'ensemble cherché est le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

avec I milieu de [AC]. L'ensemble cherché est le plan passant par B et orthogonal à la droite (IB).

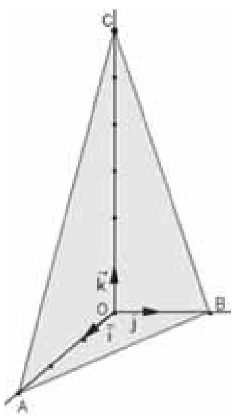
47 **a.** $\vec{n}(2\,;-6\,;2)$ **b.** $\vec{n}'(-1\,;0\,;1)$ **c.** $\vec{n}''(1\,;2\,;3)$.

48 Voir le corrigé en fin de manuel.

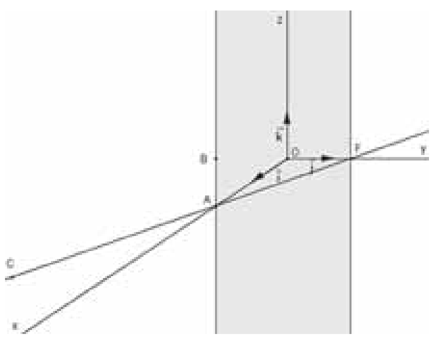
49 (a)(GFC) : (4) $x = 0$ (b) (DGH) : (1) $y = 0$
(c) (HKL) : (2) $z = 2$ (d) (BCF) : (3) $y = 2$.

50 **1. a.** (DGF) : $z = 4$. **b.** $y = 1$.
2. a. $x = 1$: plan (DAB). **b.** $z = 0$: plan (OAC).
c. $z = 1$: plan parallèle à (ABC) passant par le milieu de [OH].
d. $y = \dfrac{1}{2}$: plan parallèle à (AOG) passant par le milieu de [OJ].

51 **1.** A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 6).
2.

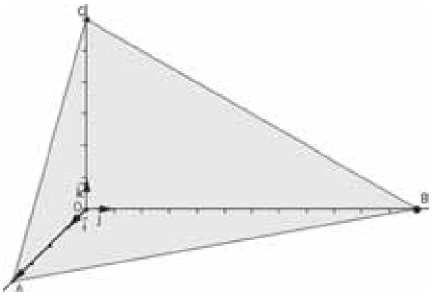


52 **1. a.** $2\times 2 - 4 = 0$ donc $A(2\,;0\,;0)\in\varepsilon$.
$2\times 2 - 4 = 0$ donc $B(2\,;0\,;1)\in\varepsilon$.
$2\times 5 + 3\times(-2) - 4 = 0$ donc $C(5\,;-2\,;0)\in\varepsilon$.
b. $\overrightarrow{AB}(0\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;-2\,;0)$ ne sont pas colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés.
c. Et donc ε n'est pas une droite puisqu'il contient trois points A, B, C non alignés.
2. a. ε : $2x + 3y - 4 = 0$ soit $2x + 3y + 0z - 4 = 0$ de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $a = 2$, $b = 3$, $c = 0$ et $d = -4$.
b. ε est un plan.
3. a. $\vec{n}(2\,;3\,;0)$ est un vecteur normal à ε.
$\vec{n}\cdot\vec{k} = 0$ donc ε est parallèle à l'axe (Oz).
(ou bien on remarque que $\overrightarrow{AB} = \vec{k}$ donc (AB) // (Oz) et comme (AB) $\subset \varepsilon$, on a (Oz) // ε).
b. (xOy) a pour équation $z = 0$; $z_A = 0$ donc $A \in (xOy)$, $z_C = 0$ donc $C \in (xOy)$.
A et C sont deux points communs à (xOy) et ε, plans non confondus (puisque $B \notin (xOy)$), donc (xOy) et ε sont sécants suivant la droite (AC).
c. (AC) est définie par le système formé par les équations de ε et de (xOy) c'est-à-dire : $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.
Et donc une équation de (AC) dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan (xOy) est $2x + 3y - 4 = 0$.
d. A et B sont des points communs aux plans non confondus (xOz) et ε donc ces deux plans sont sécants suivant (AB).
(AC) et (Oy) sont coplanaires : elles sont dans le plan (xOy). Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point F. Comme (Oz) est parallèle à ε, la parallèle à (Oz) passant par F est contenue dans ε. C'est aussi une droite de (yOz), donc les deux plans non confondus (yOz) et ε sont sécants suivant cette droite.

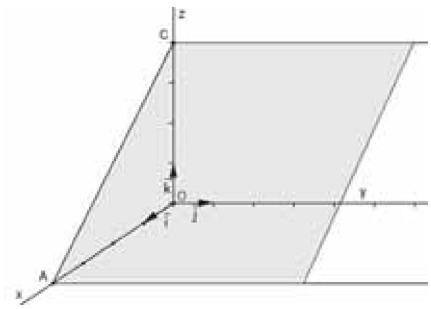


53 Voir le corrigé en fin de manuel.

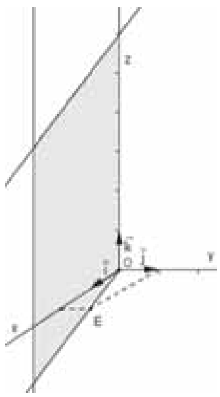
54 **a.** A(4 ; 0 ; 0), B(0 ; 12 ; 0), C(0 ; 0 ; 6) sont les points d'intersection du plan d'équation $3x + y + 2z - 12 = 0$ avec les axes.



b. $\vec{n}(1\,;0\,;1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x+z-4=0$; $\vec{n}\cdot\vec{j}=0$ donc $\mathcal{Q}$ est parallèle à l'axe (Oy).
$\mathcal{Q}$ coupe (Ox) en A(4 ; 0 ; 0) et (Oz) en C(0 ; 0 ; 4).



c. $\vec{n}(2\,;-1\,;0)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{R}$ d'équation $2x-y=0$; $\vec{n}\cdot\vec{k}=0$ donc $\mathcal{R}$ est parallèle à l'axe (Oz). Or O $\in\mathcal{R}$ donc (Oz) $\subset\mathcal{R}$ et de plus $\mathcal{R}$ passe par E(1 ; 2 ; 0).



55 Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points quelconques de $\mathcal{P}$ alors $ax_A+by_A+cz_A+d=0$ et $ax_B+by_B+cz_B+d=0$ d'où
$a(x_A-x_B)+b(y_A-y_B)+c(z_A-z_B)=0$ soit $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et donc $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ de $\mathcal{P}$.

56 Le plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan d'équation $3x-y+5z=0$ a une équation de la forme $3x-y+5z+d=0$ (même vecteur normal).
$A(2\,;3\,;-1)\in\mathcal{P}$ donc $6-3-5+d=0$ soit $d=2$.
$\mathcal{P}$ a pour équation : $3x-y+5z+2=0$.

57 Le plan médiateur $\mathcal{P}$ de [AB] est le plan passant par $I\left(1;\dfrac{3}{2};1\right)$ milieu de [AB] et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(-2\,;5\,;0)$.

$$M(x\,;y\,;z)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow-2(x-1)+5\left(y-\frac{3}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow-2x+5y-\frac{11}{2}=0\Leftrightarrow 4x-10y+11=0.$$

58 **1.** $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;3\,;-5)$ ne sont pas colinéaires donc A, B, C définissent un plan.
2. $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ normal à (ABC) $\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b+c=0\\2a+3b-5c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{8}{5}c\\b=\dfrac{3}{5}c\end{cases}$ donc $\vec{n}(8\,;3\,;5)$ est normal à (ABC).
3. $M(x\,;y\,;z)\in$ (ABC)
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow 8x+3(y-2)+5(z-3)=0$
$\Leftrightarrow 8x+3y+5z-21=0.$

59 **1.** $\overrightarrow{AB}(-2\,;3\,;5)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;5\,;1)$ ne sont pas colinéaires donc A, B, C définissent un plan.
2. $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ normal à (ABC) $\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+3b+5c=0\\-a+5b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{22}{7}c\\b=\dfrac{3}{7}c\end{cases}$ donc $\vec{n}(22\,;3\,;7)$ est normal à (ABC).
3. $M(x\,;y\,;z)\in$ (ABC) $\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$
$\Leftrightarrow 22(x-2)+3y+7(z+1)=0\Leftrightarrow 22x+3y+7z-37=0.$

60 Justification : voir exercice résolu 7 page 345.
VARIABLES : $x_A;y_A;z_A;x_B;y_B;z_B;x_C;y_C;z_C$ nombres.
ENTREES : saisir $(x_A;y_A;z_A)$, $(x_B\,;y_B\,;z_B)$, $(x_C;y_C;z_C)$.
TRAITEMENT ET SORTIES :
$x_1\leftarrow x_B-x_A\,;y_1\leftarrow y_B-y_A\,;z_1\leftarrow z_B-z_A$
$x_2\leftarrow x_C-x_A\,;y_2\leftarrow y_C-y_A\,;z_2\leftarrow z_C-z_A$
a $\leftarrow y_1z_2-y_2z_1$; b $\leftarrow z_1x_2-z_2x_1$; c $\leftarrow x_1y_2-x_2y_1$
Si a = 0 et b = 0 et c = 0 alors
  afficher « les points A, B, C sont alignés » sinon
  afficher « Les points A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan ; un vecteur normal à (ABC) a pour coordonnées (a ; b ; c) avec a = », a, « b = », b, « c = », c.
  d $\leftarrow -ax_A-by_A-cz_A$
  afficher « une équation de (ABC) est ax + by + cz + d = 0 avec d = », d.
FinSi

61 $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc $\vec{n}\neq\vec{0}$ soit $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$.
$M\in\mathcal{P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$
$\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$
en posant $d=-ax_A-by_A-cz_A$.

D'où $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$.

62 $M \in \varepsilon \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = -2$

$$\Leftrightarrow -(x+1) + 4(y-4) + 7(z-7) = -2$$
$$\Leftrightarrow -x + 4y + 7z - 64 = 0.$$

Donc ε est le plan d'équation $-x + 4y + 7z - 64 = 0$.

$\overrightarrow{OA}(-1;4;7)$ est normal à ε donc ε et (OA) sont orthogonaux et donc sécants en un point K.

$$(OA): \begin{cases} x = -t \\ y = 4t \\ z = 7t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

K est le point de (OA) de paramètre t tel que $t + 16t + 49t - 64 = 0$ soit tel que $t = \frac{64}{66} = \frac{32}{33}$ et donc $K\left(-\frac{32}{33};\frac{128}{33};\frac{224}{33}\right)$.

63 **1. a.** A(6 ; 0 ; 0), B(0 ; – 12 ; 0) et C(0 ; 0 ; 4) sont les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les axes du repère.

b. $2x - y + 3z - 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6} - \frac{y}{12} + \frac{z}{4} - 1 = 0.$

2. (ABC) : $px + qy + rz + s = 0$

$A(a\,;0\,;0) \in \mathcal{P}$ donc $pa + s = 0$ soit $p = -\frac{s}{a}$;

$B(0\,;b\,;0) \in \mathcal{P}$ donc $qb + s = 0$ soit $q = -\frac{s}{b}$;

$C(0\,;0\,;c) \in \mathcal{P}$ donc $rc + s = 0$ soit $r = -\frac{s}{c}$.

Pour $s = -1$, (ABC) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

64 **1.** $OA^2 = 4$; $OB^2 = 1 + 3 = 4$ et $AB^2 = 1 + 3 = 4$ donc OAB est équilatéral.

2. I(1 : 0 : 0) est le milieu de [OA].

$M(x\,;y\,;z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$J\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ est le milieu de [OB].

$M(x\,;y\,;z) \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 2 = 0.$

3. Comme OABC est un tétraèdre régulier, C est équidistant de O, A et B donc C appartient aux plans médiateurs de [OA] et [OB] c'est-à-dire à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ donc $x_C = 1$ et $1 + \sqrt{3}y_C - 2 = 0$ donc $y_C = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. OC = OA donc $OC^2 = OA^2$ donc $1 + \frac{1}{3} + z_C^2 = 4$ donc $z_C^2 = \frac{8}{3}$ donc $z_C = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Il existe donc deux points C tels que OABC soit régulier : $C_1\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}};2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ et $C_2\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}};-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

65 $\vec{n}(2\,;3\,;1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$,

$\overrightarrow{AB}(-2\,;2\,;-4)$; $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -4 + 6 - 4 = -2 \neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux et par suite, (AB) et $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles : ils sont donc sécants en un point K.

$$(AB): \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t \\ z = -2t + 2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

K est le point de (AB) de paramètre t tel que $2(-t + 2) + 3t - 2t + 2 - 5 = 0$ c'est-à-dire tel que $t = 1$ et donc K(1 ; 1 ; 0).

2. Voir le site Math'x.

66 **a.** $\vec{n}(2\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$,

$\overrightarrow{u_1}(1;-3;-1)$ est un vecteur directeur de d_1 ;

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{u_1} = 2 - 3 + 1 = 0$ donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{u_1}$ sont orthogonaux et par suite, (AB) et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

$E(1\,;-2\,;1) \in d_1$ et $2 \times 1 - 2 - 1 + 1 = 0$ donc $E \in \mathcal{P}$, d'où $d_1 \subset \mathcal{P}$.

b. $\vec{n}(2\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$;

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 + 3 - 1 = 0$ donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux et par suite, (AB) et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

$B(0\,;1\,;4) \in d_2$ et $2 \times 0 + 1 - 4 + 1 = -2 \neq 0$ donc $B \notin \mathcal{P}$, d'où d_2 est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

67 **1. a.** $\vec{n}(5\,;-2\,;0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 5 - 2 \neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux et par suite, la droite d et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles : ils sont donc sécants en un point K.

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 3 \\ z = t + 5 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

$K(t+1\,;t-3\,;t+5) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 5(t+1) - 2(t-3) = 7 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{3}$ d'où $K\left(-\frac{1}{3};-\frac{13}{3};\frac{11}{3}\right)$.

b. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 10 - 10 + 0 = 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux d'où d et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

$A(2\,;1\,;-3) \in d$ et $5 \times 2 - 2 \neq 7$ donc $A \in \mathcal{P}$, d'où d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

c. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux d'où d et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

$A(3\,;4\,;2) \in d$ et $5 \times 3 - 2 \times 4 = 7$ donc $A \in \mathcal{P}$, d'où $d \subset \mathcal{P}$.

2. Voir le site.

68 **1.** $\overrightarrow{n_1}(2;1;2)$ vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et $\overrightarrow{n_2}(1;-2;6)$ vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants suivant une droite d.

2. $M(x\,;y\,;z) \in d \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 10z - 1 \\ x = 2y - 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z - \frac{1}{5} \\ x = -2z - \frac{2}{5} \end{cases}$$

d'où une représentation paramétrique de d :

$$\begin{cases} x = -2t - \dfrac{2}{5} \\ y = 2t - \dfrac{1}{5} \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

3. Voir le site Math'x.

69 Voir le corrigé en fin de manuel.

70 **1.** $\vec{n}(1;1;0)$ vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'(0;1;1)$ vecteur normal à $\mathcal{P}'$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants suivant une droite.

Soit M$(1-t\,;t\,;2-t)$ un point quelconque de D ; M $\in \mathcal{P}$ car $1-t+t-1=0$ et M $\in \mathcal{P}'$ car $t+2-t-2=0$ donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant la droite D dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \qquad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 2-t \end{cases}$

2. a. $\vec{u}(-1;1;-1)$ vecteur directeur de D est un vecteur normal à $\mathcal{R}$ et comme $\mathcal{R}$ passe par O, $\mathcal{R}$ a pour équation $-x+y-z=0$.

b. Le point de D de paramètre 1 a pour coordonnées $(0\,;1\,;1)$ donc I$(0\,;1\,;1) \in$ D.

De plus, $0+1-1=0$ donc I $\in \mathcal{R}$.

Et donc I$(1\,;1\,;0)$ est le point d'intersection de D et $\mathcal{R}$.

3. a. $\dfrac{1}{2}+0-\dfrac{1}{2}=0$ et $-1+1+0=0$ donc A et B sont des points de $\mathcal{R}$.

b. I est le milieu de [AA′] et de [BB′] donc ABA′B′ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{IA}\left(-\dfrac{1}{2};-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IB}(1;0;-1)$

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = -\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{2}=0$ donc les diagonales du parallélogramme ABA′B′ sont perpendiculaires et donc ABA′B′ est un losange.

c. Le système $\begin{cases} 2 = 1-t \\ -1 = t \\ 3 = 2-t \end{cases}$ équivaut à $t=-1$, donc S$(2\,;-1\,;3)$ appartient à D.

d. A, B, A′, B′ et I sont des points du plan $\mathcal{R}$, I et S sont des points de D et D est orthogonale à $\mathcal{R}$ donc (IS) est la hauteur issue de S de la pyramide SABA′B′. Donc le volume de la pyramide est : $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire(ABA'B')} \times \text{SI}$.

ABA′B′ est un losange de centre I donc

$\text{aire(ABA'B')} = 4 \times \text{aire(ABI)} = 4 \times \dfrac{1}{2} \times \text{AI} \times \text{IB}$.

$\text{AI} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

$\text{IB} = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ et

$\text{SI} = \sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{12}$.

D'où $V = \dfrac{1}{3} \times 4 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{12} = \dfrac{1}{3} \times 12 = 4$.

71 $\overrightarrow{AB}(-2\,;1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0\,;3)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z-1=0 \\ -x+3z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z-7 \\ y = 5z-13 \end{cases}.$$

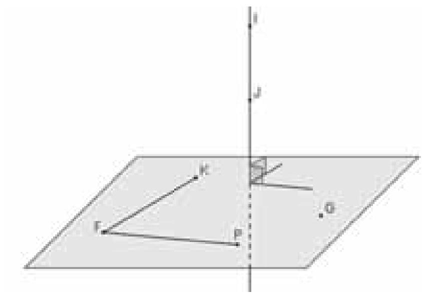
L'ensemble cherché est donc la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3t-7 \\ y = 5t-13\,, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

Elle passe par E$(-7\,;-13\,;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3\,;5\,;1)$.

Remarque

L'ensemble cherché est l'intersection du plan passant par A et perpendiculaire à (AB) et du plan passant par B et perpendiculaire à (AC).

72



73 Dans un repère orthonormé de l'espace, soit les points A$(1\,;1\,;0)$, B$(1\,;2\,;1)$ et C$(3\,;-1\,;2)$.

1. Montrer que A, B, C définissent un plan $\mathcal{R}$ qui a pour équation : $2x+y-z-3=0$.

2. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x+2y-z-4=0$ et le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $2x+3y-2z-5=0$. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection D.

3. Montrer que la droite D et le plan $\mathcal{R}$ sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. Que peut-on en déduire pour les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$?

APPROFONDISSEMENT

93 **1. a.** $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}$

or (OA) est orthogonal à (OBC) et (BC) est incluse dans (OBC) donc $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ et H est l'orthocentre de OBC donc (OH) et (BC) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. On en déduit $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HK})\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{BC}$

or $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ d'après la question précédente et comme K est le projeté orthogonal de H sur (ABC), (HK) est perpendiculaire à (ABC) donc (HK) est orthogonale à (BC) donc $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Donc $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

b. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BH}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OC}$

$= 0 + 0 = 0.$

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK})\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= 0 + 0 = 0.$

2. On en déduit que K est l'orthocentre de ABC.

94 m est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ et M $\notin \mathcal{P}$ donc la droite (Mm) existe et est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc (Mm) est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$, en particulier à d.

Dans le plan $\mathcal{P}$, H est le projeté orthogonal de m sur d, donc H $\in d$ et $\overrightarrow{mH}$ et $\vec{u}$ vecteur directeur de d sont orthogonaux.

$\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = (\overrightarrow{Mm}+\overrightarrow{mH})\cdot\vec{u} = \overrightarrow{Mm}\cdot\vec{u}+\overrightarrow{mH}\cdot\vec{u} = 0 + 0 = 0$ d'où $\overrightarrow{MH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. Comme de plus, H $\in d$, H est bien le projeté orthogonal de M sur d.

95 **1. a.** Dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$, $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;0)$, $\overrightarrow{AM}(x\,;y\,;z)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = x$.

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = AB \times AM \times \cos(\widehat{MAB}) = AM \times \cos\alpha$ car AB = 1, d'où $x = AM\cos\alpha$ soit $\cos\alpha = \dfrac{x}{AM}$.

De même, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AM} = y$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AM} = AM\times 1\times\cos(\widehat{MAD})$, d'où $\cos\beta = \cos(\widehat{MAD}) = \dfrac{y}{AM}$.

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AM} = z$ et $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AM} = AM\times 1\times\cos(\widehat{MAE})$, d'où $\cos\gamma = \cos(\widehat{MAE}) = \dfrac{z}{AM}$.

b. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma =$

$\dfrac{x^2}{AM^2}+\dfrac{y^2}{AM^2}+\dfrac{z^2}{AM^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{AM^2} = \dfrac{AM^2}{AM^2} = 1.$

2. I est le milieu de [EG] avec E(0 ; 0 ; 1) et G(1 ; 1 ; 1) donc $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};1\right)$.

$\cos(\widehat{IAB}) = \dfrac{x_I}{AI} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ d'où

$\widehat{IAB} \approx 65{,}9°$.

De même, $\cos(\widehat{IAD}) = \dfrac{y_I}{AI} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ et $\widehat{IAD} \approx 65{,}9°$.

$\cos(\widehat{IAE}) = \dfrac{z_I}{AI} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $\widehat{IAE} \approx 35{,}3°$.

3. $\widehat{LAB} = \widehat{LAD} = \widehat{LAE}$ donc $\cos(\widehat{LAB}) = \cos(\widehat{LAD}) = \cos(\widehat{LAE})$. Comme AL = 1, les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ de L vérifient $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ soit $x = y = z$ et à l'aide de la relation du 1.b. $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{1^2}+\dfrac{z^2}{1^2} = 1$ d'où $3x^2 = 1$ soit $x^2 = \dfrac{1}{3}$ d'où $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

Comme L est à l'intérieur du cube, on a $0 < x < 1$ et donc $L\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\,;\sqrt{\dfrac{1}{3}}\,;\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$.

$\cos\widehat{LAB} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{1} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ d'où $\widehat{LAB} \approx 54{,}7°$ et

$\widehat{LAD} = \widehat{LAE} = \widehat{LAB} \approx 54{,}7°$.

4. De même, les points $M(x_M\,;y_M\,;z_M)$ à l'intérieur du cube tels que $\widehat{MAB} = \widehat{MAD} = \widehat{MAE}$ sont tels que $x_M = y_M = z_M$ avec $0 < x_M < 1$ c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{AM} = x_M\overrightarrow{AG}$ avec $0 < x_M < 1$. On en déduit que l'ensemble cherché est le segment ouvert]AG[.

96 **1. a.** H est le projeté orthogonal de M_0 sur le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ donc $\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires d'où

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\times\|\vec{n}\| = M_0H\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

b. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0)+b(y_H - y_0)+c(z_H - z_0)$

$= ax_H + by_H + cz_H - ax_0 - by_0 - cz_0.$

Or H $\in \mathcal{P}$ donc $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$ d'où

$ax_H + by_H + cz_H = -d$ et

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d.$

c. On a donc :

$M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \left|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d\right|$ d'où

$M_0H = \dfrac{\left|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$

2. a. $d(F, \mathcal{P})$

$= \dfrac{\left|x_F + 2y_F - z_F - 1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{\left|-7-2\times 0-4-1\right|}{\sqrt{6}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$

b. $2\sqrt{6} < 6$; la distance de F au plan $\mathcal{P}$ est inférieure au rayon de la sphère $\mathcal{S}$ donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont sécants.

Soit r le rayon et I le centre du cercle $\mathcal{C}$ intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$. Pour tout point M de $\mathcal{C}$, le triangle FIM est rectangle en I donc $FM^2 = FI^2 + IM^2$ soit $6^2 = (2\sqrt{6})^2 + r^2$ d'où $r^2 = 36 - 24 = 12$ et $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

3. a. $\vec{n}(-2\,;1\,;5)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$ et $\vec{n}'(1\,;2\,;0)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{R}$.

$\vec{n}\cdot\vec{n}' = -2+2 = 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux et par suite les plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

b. Une équation de $\mathcal{Q}$ est de la forme $-2x+y+5z+d=0$.

$B(1\,;-2\,;1) \in \mathcal{Q}$ donc $-2-2+5+d = 0$ soit $d = -1$ et $\mathcal{Q}$ a donc pour équation : $-2x+y+5z-1 = 0$.

Soit Δ la droite passant par $E(-1\,;4\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;-1\,;1)$.

$-2(-1)+4+5(-1)-1 = 6-6 = 0$ donc $E \in \mathcal{Q}$.

De plus $\vec{u}\cdot\vec{n} = 2\times(-2) - 1\times 1 + 1\times 5 = 0$ donc $\Delta \subset \mathcal{Q}$

$-1+24-7 = 0$ donc $E \in \mathcal{R}$.

De plus, $\vec{u}\cdot\vec{n}' = 2\times 1 - 1\times 2 + 0 = 0$ donc $\Delta \subset \mathcal{R}$.

$\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ étant perpendiculaires, ils sont sécants suivant une droite et comme Δ est une droite commune à ces deux plans, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont sécants suivant la droite Δ.

c. $d(A, \mathcal{Q}) = \dfrac{|-2x_A + y_A + 5z_A - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}}$

$= \dfrac{|-10 - 2 - 5 - 1|}{\sqrt{30}} = \dfrac{18}{\sqrt{30}} = \dfrac{3\sqrt{30}}{5}$

$d(A, \mathcal{R}) = \dfrac{|x_A + 2y_A - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \dfrac{|5 - 4 - 7|}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

d. Soit K le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{Q}$ et L le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{R}$.

$AK = d(A, \mathcal{Q}) = \dfrac{3\sqrt{30}}{5}$ et $AL = d(A, \mathcal{R}) = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ donc $A \neq K$ et $A \neq L$.

(AK) est orthogonale au plan $\mathcal{Q}$ donc (AK) est orthogonale à Δ droite de $\mathcal{Q}$; (AL) est orthogonale au plan $\mathcal{R}$ donc (AL) est orthogonale à Δ droite de $\mathcal{R}$. Δ est donc orthogonale à (AK) et (AL) deux droites sécantes du plan (AKL) donc Δ est orthogonale à ce plan. Soit H le projeté orthogonal de A sur Δ, alors H est le point d'intersection de Δ et de (AKL) plan orthogonal à Δ passant par A. Les points A, K, H et L sont coplanaires.

(AK) est orthogonale à $\mathcal{Q}$ qui contient (KH) donc $(AK) \perp (KH)$;

(AL) est orthogonale à $\mathcal{R}$ qui contient (LH) donc $(AL) \perp (LH)$;

$\overrightarrow{AK}$ est normal à $\mathcal{Q}$, $\overrightarrow{AL}$ est normal à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q} \perp \mathcal{R}$ donc $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{AL}$ donc le quadrilatère AKHL a trois angles droits donc c'est un rectangle.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AKH rectangle en K, on a $AH^2 = AK^2 + KH^2 = AK^2 + AL^2$

d'où $AH^2 = \left(\dfrac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \dfrac{270}{25} + \dfrac{180}{25} = \dfrac{450}{25} = 18$

et donc $AH = d(A, \Delta) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

e. Autre méthode : Δ est la droite passant par $E(-1 ; 4 ; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$ donc une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Le projeté orthogonal H de A sur Δ est le point de Δ tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ c'est-à-dire le point de paramètre t de Δ tel que $2(-1 + 2t - 5) - (4 - t + 2) + (-1 + t + 1) = 0$ soit tel que $t = 3$. D'où $H(5 ; 1 ; 2)$ et

$d(A, \Delta) = AH = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

97 **1.** Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(0 ; 0 ; 0)$, $C(a ; a ; 0)$ et $I\left(\dfrac{a}{2} ; 0 ; a\right)$ donc $IC^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2 + (-a)^2 = \dfrac{9a^2}{4}$ et

$IA^2 = \left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 + 0^2 + (-a)^2 = \dfrac{5a^2}{4}$, d'où $IC^2 - IA^2 = a^2$ et donc $I \in \mathcal{P}$.

2. Pour $M(x ; y ; z)$ dans $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$MC^2 - MA^2 = (a - x)^2 + (a - y)^2 + (-z)^2 - x^2 - y^2 - z^2$
$= 2a^2 - 2a(x + y)$.

$M(x ; y ; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MC^2 - MA^2 = a^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a(x + y) = a^2 \Leftrightarrow x + y = \dfrac{a}{2}$.

$\mathcal{P}$ est donc un plan de vecteur normal $\vec{n}(1 ; 1 ; 0)$ orthogonal à $\vec{k}$ donc $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (AE).

$\dfrac{a}{2} + 0 = \dfrac{a}{2}$ donc $K\left(\dfrac{a}{2} ; 0 ; 0\right) \in \mathcal{P}$ et $0 + \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$ donc $L\left(0 ; \dfrac{a}{2} ; 0\right) \in \mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ est le plan parallèle à (AE) passant par K milieu de [AB] et L milieu de [AD] (et par I).

3. Soit J le milieu de [EH], $J\left(0 ; \dfrac{a}{2} ; a\right)$, $0 + \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$ donc $J \in \mathcal{P}$.

La section du cube par le plan $\mathcal{P}$ est le quadrilatère IJLK.

$\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{KL}$ donc IJKL est un parallélogramme.

$\overrightarrow{KI}(0 ; 0 ; a)$ et $\overrightarrow{KL}\left(-\dfrac{a}{2} ; \dfrac{a}{2} ; 0\right)$ donc $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$.

IJKL est un parallélogramme qui a un angle droit, donc IJKL est un rectangle (qui n'est pas un carré car $KI = a$ et $KL = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$).

98 On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on cherche une équation de chacun des six plans diagonaux sous la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Plan (ABH) :

$A(0 ; 0 ; 0) \in (ABH)$ donc $d = 0$;

$B(1 ; 0 ; 0) \in (ABH)$ donc $a + d = 0$ soit $a = -d$;

$H(0 ; 1 ; 1) \in (ABH)$ donc $b + c + d = 0$.

On obtient $d = 0$, $a = 0$, $b = -c$.

En prenant $c = 1$, on obtient une équation de (ABH) :

$y - z = 0$ soit $y = z$.

Par une méthode analogue, on obtient :

(DEF) : $y + z - 1 = 0$; (FDA) : $x - z = 0$;

(EBC) : $x + z - 1 = 0$;

(BDF) : $x + y - 1 = 0$; (EAC) : $x - y = 0$.

99 **Partie A**

Soit O le point d'intersection des hauteurs issues de A et B du tétraèdre ABCD.

O est un point de (AH) donc (OH) est orthogonale à (BCD) qui contient (CD) donc $(OH) \perp (CD)$.

(BH) est orthogonale à (ACD) qui contient (CD) donc $(BH) \perp (CD)$. La droite (CD) est donc orthogonale à (OH) et (BH) qui sont deux droites sécantes de (OBH) donc (CD) est orthogonale au plan (OBH) qui contient (BH) donc $(BH) \perp (CD)$. Comme H est un point du plan (BCD) on en déduit que (BH) est la hauteur issue de B du triangle BCD.

Partie B

1. a. Les coordonnées de B, C et D vérifient l'équation proposée donc $-2x-3y+4z-13=0$ est une équation de (BCD) (*on remarque que le texte suggère que B, C et D ne sont pas alignés*).

b. H est le point d'intersection de la droite d perpendiculaire à (BCD) passant par A et du plan (BCD).

Le vecteur $\vec{n}(-2\,;-3\,;4)$ normal à (BCD) est un vecteur directeur de d donc $d:\begin{cases} x=3-2t \\ y=2-3t \\ z=-1+4t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

$H(3-2t\,;2-3t\,;-1+4t)\in(BCD)\Leftrightarrow$

$-2(3-2t)-3(2-3t)+4(-1+4t)-13=0\Leftrightarrow t=1$

donc $H(1\,;-1\,;3)$.

c. $\overrightarrow{BH}(7\,;-2\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(-5\,;-2\,;-4)$ donc $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=-39$.

d. (BH) n'est pas orthogonale à (CD) donc (BH) n'est pas la hauteur issue de B du triangle BCD, donc par contraposée de la propriété démontrée dans la partie A, ABCD n'est pas orthocentrique.

2. Le repère est orthonormé donc

$(IO)\perp(OJK)$ donc (IO) est la hauteur issue de I,

$(JO)\perp(OIK)$ donc (JO) est la hauteur issue de J,

$(KO)\perp(OIJ)$ donc (KO) est la hauteur issue de K, et la hauteur issue de O passe par le point O donc les quatre hauteurs sont concourantes en O et donc le tétraèdre OIJK est orthocentrique.

100 **1.** Soit O le point d'intersection des quatre hauteurs du tétraèdre orthocentrique ABCD.

Montrons que $(AB)\perp(CD)$.

(AO) est orthogonale à (BCD) qui contient (CD) donc $(AO)\perp(CD)$.

(BO) est orthogonale à (ACD) qui contient (CD) donc $(BO)\perp(CD)$.

(CD) est orthogonale à (AO) et (BO) qui sont deux droites sécantes de (ABO) donc (CD) est orthogonale à (ABO) qui contient (AB) donc $(CD)\perp(AB)$.

De même, on montre que $(AC)\perp(BD)$ et que $(AD)\perp(BC)$.

2. a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

b. On en déduit que $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})^2=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})^2$ donc $AB^2+CD^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=AD^2+CB^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ et

$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})^2=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})^2$ donc

$AC^2+BD^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2+BC^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

3. a. Si ABCD a ses arêtes opposées deux à deux orthogonales, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

Et en remplaçant dans les égalités précédentes, on obtient $AB^2+CD^2=AD^2+CD^2=AC^2+BD^2$.

Réciproquement :

Si $AB^2+CD^2=AD^2+CD^2=AC^2+BD^2$, en remplaçant dans les égalités précédentes on obtient

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{CA}=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ donc les arêtes opposées [DB] et [AC] sont orthogonales.

De même, on montre que les arêtes [AB] et [CD] d'une part et [AD] et [BC] d'autre part sont orthogonales.

b. $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2=AC^2+BD^2=4+9=13$ donc d'après 3.a. ABCD est orthocentrique.

c. $AB^2+CD^2=4+9=13$ et $AC^2+BD^2=4+4=8$ donc d'après 3.a. ABCD n'est pas orthocentrique.

101 **1.** Le vecteur $\overrightarrow{n_1}(1\,;1\,;-1)$ normal à $\mathcal{P}_1$ et le vecteur $\overrightarrow{n_2}(2\,;1\,;1)$ normal à $\mathcal{P}_2$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$M(x\,;y\,;z)\in\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\Leftrightarrow\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x=-y+z \\ -y+3z=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-2z+3 \\ y=3z-3 \end{cases}$

donc $\Delta:\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=3t-3 \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

2. $\vec{u}(-2\,;3\,;1)$ est un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{n_3}(1\,;2\,;-4)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$.

Or $\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_3}=-2+6-4=0$ donc Δ est parallèle à $\mathcal{P}_3$.

De plus $A(3\,;-3\,;0)\in\Delta$ et $3+2\times(-3)-4\times0+3=0$ donc $A\in\mathcal{P}_3$ donc Δ est incluse dans $\mathcal{P}_3$. On en déduit que l'intersection de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ est Δ.

Remarque

On peut aussi montrer que tout point de Δ vérifie l'équation de $\mathcal{P}_3$.

102 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-3x_3=3 \\ x_1-4x_2+6x_3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=x_2-x_3+1 \\ 3x_2-5x_3=1 \\ -3x_2+5x_3=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{5}{3}x_3+\dfrac{1}{3} \\ x_1=\dfrac{2}{3}x_3+\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des triplets $\left(\dfrac{2}{3}x_3+\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{5}{3}x_3+\dfrac{1}{3}\,;x_3\right)$ où x_3 est un réel quelconque.

On peut en déduire que l'intersection des trois plans d'équations $x_1-x_2+x_3=1$, $2x_1+x_2-3x_3=3$ et

$x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$ est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x_1 = 2t + \dfrac{4}{3} \\ x_2 = 5t + \dfrac{1}{3},\ t \in \mathbb{R}. \\ x_3 = 3t \end{cases}$

103 *Texte modifié : La droite D a pour représentation paramétrique :* $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

1. $\overrightarrow{\Omega M}(x-3\,;y+1\,;z)$ donc $(x-3)^2 + (y+1)^2 - z^2 = 9 \Leftrightarrow \Omega M^2 = 9$ et $\mathscr{S}$ est la sphère de centre Ω et de rayon 3.

2. Le point M(3 ; 2 – *t* ; *t*) de D appartient à $\mathscr{S} \Leftrightarrow (3-3)^2 + (2-t+1)^2 + t^2 = 9 \Leftrightarrow 2t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 3$.

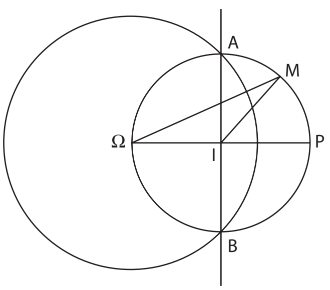
Pour *t* = 3, on obtient A(3 ; – 1 ; 3) et pour *t* = 0, on obtient B(3 ; 2 ; 0).

3. a. I est le milieu de [AB] et de [ΩP] donc AΩBP est un parallélogramme. De plus A et B appartiennent à la sphère $\mathscr{S}$ de centre Ω donc ΩA = ΩB donc AΩBP est un losange.

$\overrightarrow{\Omega A}(0\,;\,0\,;\,3)$ et $\overrightarrow{\Omega B}(0\,;3\,;0)$ donc $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega B} = 0$ donc AΩBP est un carré.

b. AΩBP est un carré donc d'une part P ∈(AΩB) et d'autre part (PA) ⊥ (ΩA) et (PB) ⊥ (ΩB) donc (PA) et (PB) sont tangentes respectivement en A et B au cercle de centre Ω et de rayon ΩA = ΩB = 3.

c. Il s'agit donc de montrer que les points M situés sur le demi-cercle de diamètre [AB] contenant P distincts de A et B vérifient ΩM > 3.



Première méthode : Un point M est situé sur le demi-cercle de diamètre [AB] contenant P distinct de A et B $\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos(\widehat{M\Omega P}) \leqslant 1$ avec α mesure principale de $(\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IM})$ donc $\dfrac{\alpha}{2}$ mesure principale de $(\overrightarrow{\Omega P},\overrightarrow{\Omega M})$ en orientant le plan (AΩB).

Or dans le triangle isocèle IΩM, $\Omega M = 2\Omega I \cos(\widehat{M\Omega I})$ donc $\Omega M = 2\Omega I \cos(\widehat{M\Omega P})$. Or $\Omega I = \dfrac{1}{2}\Omega P = \dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{2}$ donc $\Omega M = 3\sqrt{2}\cos(\widehat{M\Omega P})$ et comme $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos(\widehat{M\Omega P})$, $\Omega M > 3\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ soit ΩM > 3.

Deuxième méthode : A(3 ; – 1 ; 3), B(3 ; 2 ; 0) et Ω(3 ; – 1 ; 0) donc *x* = 3 est une équation du plan (AΩB).

I est le milieu de [AB] donc $I\left(3\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

Dans le plan (AΩB), M est situé sur le demi-cercle de diamètre [AB] contenant P distinct de A et B si et seulement si :

- M(3 ; *y* ; *z*) (c'est-à-dire M ∈ (AΩB)),
- $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$ (c'est-à-dire M appartient au cercle de diamètre [AB])
- $\overrightarrow{I\Omega}\cdot\overrightarrow{IM} < 0$ (car $\overrightarrow{I\Omega}\cdot\overrightarrow{IM} = I\Omega \times IM\cos\widehat{\Omega IM}$

et $\cos\widehat{\Omega IM} < 0$ pour $\widehat{\Omega IM}$ angle obtus).

$\overrightarrow{IM}\left(0\,;y-\dfrac{1}{2}\,;z-\dfrac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{I\Omega}\left(0\,;-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{I\Omega}\cdot\overrightarrow{IM} < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}\left(y-\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{3}{2}\left(z-\dfrac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow y + z > 2.$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow 0^2 + (y+1)(y-2) + (z-3)z = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + z^2 - y - 3z - 2 = 0.$

Or $\Omega M^2 = 0^2 + (y+1)^2 + z^2 = y^2 + z^2 + 2y + 1$. On en déduit que si M appartient au demi-cercle de diamètre [AB] contenant P et est distinct de A et B, alors $y^2 + z^2 = y + 3z + 2$ et $y + z > 2$,

donc $\Omega M^2 = 3y + 3z + 3 = 3(y + z + 1)$ avec $y + z + 1 > 3$, d'où $\Omega M^2 > 3^2$ c'est-à-dire ΩM > 3.

104 **1.** Le plan médiateur de [AB] a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(0\,;\,1\,;\,1)$ donc admet une équation de la forme $y + z + d = 0$. De plus, il passe par $I\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ milieu de [AB] donc $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + d = 0$ donc *d* = – 1 donc il a pour équation : $y + z - 1 = 0$.

De même, le plan médiateur de [AC] a pour équation : $x - y - z + \dfrac{1}{2} = 0$, le plan médiateur de [BC] a pour équation : $x - \dfrac{1}{2} = 0$ le plan médiateur de [AD] a pour équation : $x + z - 2 = 0$.

2. On remarque que ces quatre équations sont des équations des quatre plans précédents.

$$\begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ 2x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -z + 1 \\ y = -z + 1 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

donc $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$ est l'unique point commun aux quatre plans.

3. Ω appartient aux plans médiateurs de [AB], [AC] et [AD] donc ΩA = ΩB, ΩA = ΩC et ΩA = ΩD et donc ΩA = ΩB = ΩC = ΩD.

On en déduit que $\Omega B = \Omega D$ et donc Ω appartient au plan médiateur de [BD].

De même, que $\Omega C = \Omega D$ et donc Ω appartient au plan médiateur de [CD].

4. $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ donc Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD dont le rayon est $\Omega A = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

105 **A. 2.** Il semble que les coordonnées de H qui minimise la distance soit (– 3 ; 3 ; 5).

3. De même, il semble que H′(3 ; 0 ; – 4).

B. 1. $d: \begin{cases} x = -2+t \\ y = 8+5t \\ z = 4-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $d': \begin{cases} x = 5+2t' \\ y = 1+t' \\ z = -3+t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc d et d' ne sont pas parallèles.

d et d' sont sécantes $\Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que $\begin{cases} -2+t = 5+2t' \\ 8+5t = 1+t' \\ 4-t = -3+t' \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} t = 7+2t' \\ 43+10t' = 1+t' \\ -3-2t' = -3+t' \end{cases}$

soit $\begin{cases} t = 7+2t' \\ t' = -\dfrac{14}{3} \\ t' = 0 \end{cases}$ ce qui est impossible.

d et d' ne sont ni parallèles ni sécantes donc elles sont non coplanaires.

3. a. $\begin{cases} -2+t = -3 \\ 8+5t = 3 \\ 4-t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$ donc $H(-3\,;3\,;5) \in d$ et

$\begin{cases} 5+2t' = 3 \\ 1+t' = 0 \\ -3+t' = -4 \end{cases} \Leftrightarrow t' = -1$ donc $H'(3\,;0\,;-4) \in d'$.

b. $\overrightarrow{HH'}(6\,;-3\,;-9)$ donc $\overrightarrow{HH'}\cdot\vec{u} = 6-15+9 = 0$ et $\overrightarrow{HH'}\cdot\vec{v} = 12-3-9 = 0$ donc (HH′) est orthogonale à d et d' et comme $H \in d$ et $H' \in d'$, (HH′) est perpendiculaire à d et d'.

c. $HH' = \sqrt{36+9+81} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$.

106 **1.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc d et δ ne sont pas parallèles.

$d: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+2 \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\delta: \begin{cases} x = 0 \\ y = t'+1 \\ z = t'+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

d et δ sont sécantes $\Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que $\begin{cases} t+1 = 0 \\ 2t+2 = t'+1 \\ -1 = t'+2 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} t = -1 \\ t' = -3 \\ -2+2 = -3+1 \end{cases}$ ce qui est impossible.

d et δ ne sont ni parallèles ni sécantes donc elles sont non coplanaires.

2. a. Soit $\vec{n}(x\,;y\,;z)$.

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow x+2y = 0$ et $y+z = 0 \Leftrightarrow x = -2y$ et $z = -y$ donc $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. $M(x\,;y\,;z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}+t'\vec{n} \Leftrightarrow$ il existe deux réesl t et t' tels que $\begin{cases} x = 1+t+2t' \\ y = 2+2t-t' \\ z = -1+t' \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} t' = z+1 \\ x = 3+t+2z \\ y = 1+2t-z \end{cases}$

soit $\begin{cases} t' = z+1 \\ t = x-2z-3 \\ y = 2x-5z-5 \end{cases}$.

Le plan $\mathcal{P}$ admet donc pour équation cartésienne : $2x-y-5z-5 = 0$.

3. Le point $E(0\,;t'+1\,;t'+2)$ de δ appartient à P si et seulement si $2\times 0-(t'+1)-5(t'+2)-5 = 0$ soit $t = -\frac{8}{3}$.

Donc $E\left(0\,;-\frac{5}{3}\,;-\frac{2}{3}\right)$.

4. a. $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = -\dfrac{5}{3}-t \\ z = -\dfrac{2}{3}+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b. D'après 2.a. $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc Δ est orthogonale à d et δ.

c. $F(x\,;y\,;z) \in d \cap \Delta \Leftrightarrow$ il existe t et t' tels que $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+2 \\ z = -1 \end{cases}$

et $\begin{cases} x = 2t' \\ y = -\dfrac{5}{3}-t' \\ z = -\dfrac{2}{3}+t' \end{cases}$ ce qui revient à résoudre

$\begin{cases} t+1 = 2t' \\ 2t+2 = -\dfrac{5}{3}-t' \\ -1 = -\dfrac{2}{3}+t' \end{cases}$ soit $\begin{cases} t' = -\dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$ donc $F\left(-\frac{2}{3}\,;-\frac{4}{3}\,;-1\right)$.

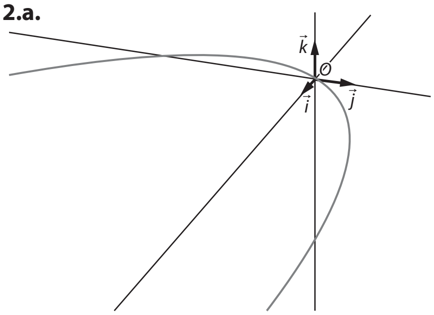
5. $EF^2 = \left(-\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right)^2+\left(-1+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$ donc $EF = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

107 **1.** $x_{\vec{u}} = 2x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}} = -y_{\vec{v}}$ donc les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9} = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$\|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = 1$, de même $\|\vec{v}\|^2 = 1$ donc $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.

2.a.



Il semble que $\mathscr{C}$ soit une parabole.

b. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} t+2t^2 \\ 2t-t^2 \\ -2t-t^2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM} = 3t\vec{u} + 3t^2\vec{v}$ donc $X = 3t$ et $Y = 3t^2$.

c. Quand t décrit $\mathbb{R}$, X décrit $\mathbb{R}$ et $t = \dfrac{X}{3}$ donc $Y = 3\left(\dfrac{X}{3}\right)^2 = \dfrac{X^2}{3}$.

d. Pour tout M de $\mathscr{C}$, il existe deux réels X et Y tels que $\overrightarrow{AM} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ donc M est un point du plan $\mathscr{P}$ et comme $Y = \dfrac{X^2}{3}$ avec X décrivant $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ est la parabole d'équation $Y = \dfrac{X^2}{3}$ dans le repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ du plan $\mathscr{P}$.

PROBLÈMES

108 **A. 2.** Le plan (IJK) semble couper les arêtes [CD], [FE], [HG].

B. 1. $I(1\,;\frac{1}{2}\,;0)$; $J(1\,;0\,;\frac{1}{2})$; $K(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1)$.

2. $\overrightarrow{IK}\left(-\dfrac{1}{2};0;1\right)$ et $\overrightarrow{IJ}\left(0;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ donc

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK} = -1+0+1 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$. Comme $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont deux vecteurs non colinéaires, $\vec{n}$ est un vecteur normal à (IJK).

$M(x\,;y\,;z) \in (IJK) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1) + (y-\frac{1}{2}) + z = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + 2z - 5 = 0.$

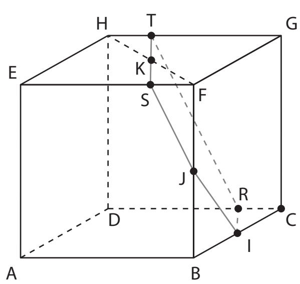
3. a. $\overrightarrow{DC}(1;0;0)$ est un vecteur directeur de (CD) et $D(0\,;1\,;0)$ donc (CD) : $\begin{cases} x = t \\ y = 1,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$

b. Le point $R(t\,;1\,;0)$ de (CD) appartient à (IJK)

$\Leftrightarrow 4t + 2 - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{4}$

donc $R(\frac{3}{4}\,;1\,;0)$.

4. b. La parallèle à (IR) passant par K coupe [EF] en S et [HG] en T. La section est donc le polygone IJSTR.



109 **Partie A**

1. Dans le triangle FBI rectangle en B,

$FI^2 = FB^2 + BI^2 = \dfrac{13}{9}$; de même dans FEJ, $FJ^2 = \dfrac{13}{9}$ donc FIJ est isocèle en F. La médiane (FK) est donc aussi hauteur issue de F donc (FK) $\perp$ (IJ).

2. (IJ) est orthogonale à (FK) et (GK) qui sont deux droites sécantes de (FGK) et donc (IJ) $\perp$ (FGK).

3. P est le projeté orthogonal de G sur (FIJ) donc (GP) $\perp$ (FIJ) et donc (GP) $\perp$ (IJ).

(IJ) $\perp$ (FGK) donc (IJ) $\perp$ (FG).

On en déduit que (IJ) est orthogonale à (GP) et (FG) qui sont deux droites sécantes de (FGP) et donc (IJ) $\perp$ (FGP).

4. a. Les plans (FGK) et (FPG) sont orthogonaux à une même droite (IJ) donc ils sont parallèles. Comme ils ont un point commun F, ils sont confondus et donc F, G, K, P sont coplanaires.

b. Les plans (FIJ) et (FGK) ne sont pas parallèles (ils ont un point commun F) ni confondus (G n'appartient pas à (FIJ)) donc ils sont sécants suivant une droite.

Or F $\in$ (FIJ) $\cap$ (FGK)

K $\in$ (FIJ) $\cap$ (FGK) car K $\in$ (IJ)

P $\in$ (FIJ) $\cap$ (FGK) car F, G, K, P sont coplanaires et P est le projeté orthogonal de G sur (FIJ) donc F, K et P sont alignés sur la droite d'intersection de (FIJ) et (FGK).

Partie B

1. $F(1\,;0\,;1)$; $G(1\,;1\,;1)$; $I(1\,;\frac{2}{3}\,;0)$ et $J(0\,;\frac{2}{3}\,;1)$.

2. a. N $\in$ (GP) et (GP) $\perp$ (FIJ) donc (GN) $\perp$ (FIJ) et donc (GN) $\perp$ (FI) et (GN) $\perp$ (FJ).

b. $\overrightarrow{GN}(x-1;y-1;-1)$; $\overrightarrow{FI}\left(0;\dfrac{2}{3};-1\right)$ et $\overrightarrow{FJ}\left(-1;\dfrac{2}{3};0\right)$.

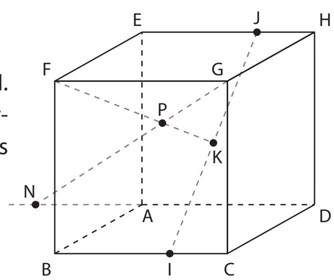
$\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI} = \dfrac{2}{3}(y-1)+1$ et $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FJ} = -x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}$.

c. $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FJ} = 0 \Leftrightarrow -x + \dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc $N\left(0\,;-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$.

3. On place le point N. P est le point d'intersection des droites (NG) et (FK).



110 **1. a.** Les arêtes de AFCH sont toutes des diagonales des faces du cube donc elles ont toutes la même longueur : $a\sqrt{2}$. L'aire de chaque face de ce tétraèdre est $\dfrac{1}{2}(a\sqrt{2})\left(a\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Dans le tétraèdre AEFH, la hauteur associée à la base AEH est EF donc $V' = \frac{1}{3}\frac{a^2}{2} \times a = \frac{a^3}{6}$.

c. De même le volume de chacun des tétraèdres CFGH, ABCF, ADCH est aussi $\frac{a^3}{6}$ donc le volume du tétraèdre AFCH est $V = a^3 - 4 \times \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$.

d. Dans le tétraèdre AFCH, la hauteur associée à la base FCH est la distance h de A au plan (FCH) donc $\frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} \times a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times h$ donc $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

2. a. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JH}) \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{FC}$
$= 0 + 0 = 0$ car (AJ) (resp. (HJ)) est la hauteur issue de A (resp. H) dans le triangle équilatéral AFC (resp. HFC).

On en déduit que (AH) et (FC) sont orthogonales.

b. $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH} = (\overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FA}) \cdot (\overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FH})$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - a\sqrt{2} \times \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{1}{2} - a\sqrt{2}$$
$$\times \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{1}{2} + (a\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

c. $AJ = JH = a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ donc

$\cos\widehat{AJH} = \frac{\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH}}{AJ \times JH} = \frac{1}{3}$ soit $\widehat{AJH} \approx 70{,}53°$.

111 $\overrightarrow{n_1}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{n_2}(2;3;1)$ vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant une droite D.

$$M(x;y;z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - z \\ -x - 2z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 + z \\ x = -4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$$

avec t réel, représentation paramétrique de D.

2. a. $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$
$\Leftrightarrow (1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + z - 4\lambda = 0$ donc $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_\lambda$.

b. Pour $\lambda = 0$, $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x + y + z = 0$ donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont confondus.

c. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n_1}(1;1;1)$ et $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ sont orthogonaux si et seulement si $3\lambda + 3 = 0$ soit $\lambda = -1$.

3. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{-1}$ sont perpendiculaires donc sécants suivant une droite D′.

$$M(x;y;z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 4 \\ x + 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 + z \\ x = -4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$$

avec t réel, représentation paramétrique de D′ qui est aussi une représentation paramétrique de D donc D = D′.

4. La distance du point A à la droite D est la distance minimale entre A et un point de D .

$M \in D \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $M(-4 - 2t ; 4 + t ; t)$.

On a donc

$AM = \sqrt{(-5 - 2t)^2 + (3 + t)^2 + (t - 1)^2} = \sqrt{6t^2 + 24t + 35}$.

La fonction $f(t) = 6t^2 + 24t + 35$ admet un minimum en $t = -2$ et comme $f(t) > 0$ pour tout t,

$\sqrt{f(t)}$ admet aussi un minimum pour $t = -2$.

$\sqrt{f(-2)} = \sqrt{11}$ donc la distance de A à D est $\sqrt{11}$.

112 **A. 1.** Voir sur le site.

2. Il semble que la valeur maximale de $\widehat{IMJ}$ soit 2,09 radians et qu'alors M soit le projeté orthogonal de I sur (EC).

B. 1. a. Si $\alpha \in [0 ; \pi]$, $\frac{\alpha}{2} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Comme la fonction linéaire $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{2}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que la fonction sinus est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, α est maximale quand $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

b. Montrons que MI = MJ : E et C sont équidistants de I et J donc (EC) est incluse dans le plan médiateur de [IJ]. Comme M est un point de (EC), M est équidistant de I et J et donc MI = MJ.

Dans le triangle MIJ isocèle de sommet M, soit K le milieu de [IJ]. [MK] est aussi la hauteur issue de M donc MKI est rectangle en K et [MK] est la bissectrice de $\widehat{IMJ}$ donc $\widehat{IMK} = \frac{\alpha}{2}$. On en déduit $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{IK}{IM} = \frac{IJ}{2IM}$ et comme IJ est constante, on en déduit que $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximale quand IM est minimale.

2. a. $C(1 ; 1 ; 0)$; $E(0 ; 0 ; 1)$; $I(1 ; \frac{1}{2} ; 0)$; $J(\frac{1}{2} ; 1 ; 0)$.

b. $M(x ; y ; z) \in [CE] \Leftrightarrow$ il existe un réel t de [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow$ il existe un réel t de [0 ; 1] tel que $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$

soit $M(1 - t ; 1 - t ; t)$.

3. a. $CI^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}$; $CJ^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}$ donc $CI = CJ$ et $EI^2 = 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4}$ et $EJ^2 = \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{9}{4}$ donc $EI = EJ$ donc C et E appartiennent au plan médiateur de [IJ].

b. Comme M appartient à [CE], M est aussi dans le plan médiateur de [IJ] et donc MI = MJ c'est-à-dire MIJ est isocèle en M.

c. $IM^2 = (1 - t - 1)^2 + \left(1 - t - \frac{1}{2}\right)^2 + t^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.

4. a. $f'(t) = 6t - 1$ donc f est décroissante sur $\left[0\,;\frac{1}{6}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{6};1\right]$.

b. f admet donc un minimum pour $t = \frac{1}{6}$. On en déduit que IM^2 et donc IM est minimum pour $t = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire quand M est en $M_0\left(\frac{5}{6};\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)$ et pour cette position de M, d'après la question 1., $\widehat{IMJ}$ est maximal.

c. $M_0 \in [CE]$ et

$$\overrightarrow{IM_0}\cdot\overrightarrow{EC} = \left(\frac{5}{6}-1\right)\times 1+\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)\times 1+\frac{1}{6}\times(-1)$$

$$= -\frac{1}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6} = 0$$

donc $(IM_0) \perp (EC)$ donc M_0 est le projeté orthogonal de I sur [EC].

Remarque

On peut calculer alors la valeur maximale de $\widehat{IMJ}$:

$$\cos(\widehat{IMJ}) = \frac{\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}}{MI\times MJ} = -\frac{1}{2} \text{ donc } \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

113 **1. a.** Voir le site.

b. Il semble que MNPQ soit un rectangle.

c. Il semble que l'aire de ce rectangle soit maximale quand M est le milieu de [OB].

2. Montrons que MNPQ est un rectangle.

$M \in [OB]$ donc il existe c de $[0\,;8]$ tel que $M(0\,;0\,;c)$.

Soit $\mathscr{R}$ le plan passant par M et orthogonal à (OB). $\overrightarrow{OB}(0\,;0\,;8)$ est un vecteur normal à $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}$ passe par M donc une équation cartésienne de $\mathscr{R}$ est $z - c = 0$.

(AC) : $\begin{cases} x = 5t \\ y = -3t+6 \\ z = 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $P \in (AC) \cap \mathscr{R}$ donc $P\left(\frac{5}{4}c\,;-\frac{3}{4}c+6\,;c\right)$.

(OC) : $\begin{cases} x = 5t \\ y = 0 \\ z = 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $N \in (OC) \cap \mathscr{R}$ donc $N\left(\frac{5}{4}c\,;0\,;c\right)$.

(AB) : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3t+6 \\ z = 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $Q \in (AB) \cap \mathscr{R}$ donc $Q\left(0\,;-\frac{3}{4}c+6\,;c\right)$.

On en déduit $\overrightarrow{MN}\left(\frac{5}{4}c\,;0\,;0\right)$ et $\overrightarrow{QP}\left(\frac{5}{4}c\,;0\,;0\right)$ donc MNPQ est un parallélogramme et $\overrightarrow{NP}\left(0\,;-\frac{3}{4}c+6\,;0\right)$ donc $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP} = 0$ et MNPQ est un rectangle.

Montrons que l'aire de MNPQ est maximale quand M est le milieu de [OB].

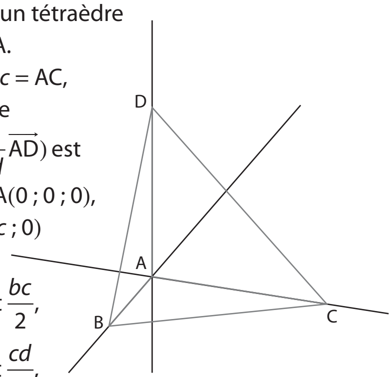
L'aire de MNPQ est donnée par

$A(c) = MN\times NP = \frac{5}{4}c\left(6-\frac{3}{4}c\right)$ car comme $c \in [0\,;8]$, $\frac{5}{4}c \geqslant 0$ et $6-\frac{3}{4}c \geqslant 0$.

$A(c) = -\frac{15}{16}c^2+\frac{15}{2}c$ qui est une fonction polynôme du second degré de variable c qui admet un maximum pour $c = \frac{\frac{15}{2}}{2\times\frac{15}{16}} = 4$ et le point $M(0\,;0\,;4)$ est bien le milieu de [OB].

114 Soit ABCD un tétraèdre trirectangle en A.

On note $b = AB$, $c = AC$, $d = AD$. Le repère $\left(A\,;\frac{1}{b}\overrightarrow{AB},\frac{1}{c}\overrightarrow{AC},\frac{1}{d}\overrightarrow{AD}\right)$ est orthonormé et $A(0\,;0\,;0)$, $B(b\,;0\,;0)$, $C(0\,;c\,;0)$ et $D(0\,;0\,;d)$.



L'aire de ABC est $\frac{bc}{2}$,

l'aire de ACD est $\frac{cd}{2}$,

l'aire de ABD est $\frac{bd}{2}$.

Calcul de l'aire de BCD.

$BC = \sqrt{b^2+c^2}$

Soit $H(x\,;y\,;z)$ le projeté orthogonal de D sur (BC).

$H \in (BC) \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$ soit

$\begin{cases} x = -bt+b \\ y = ct \\ z = 0 \end{cases}$

D'autre part, $(DH) \perp (BC)$ donc $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ soit $-bx+cy = 0$.

On en déduit que $-b(-bt+b)+c^2t = 0$

puis que $t = \frac{b^2}{b^2+c^2}$.

On a donc $H\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}\,;\,\frac{cb^2}{b^2+c^2}\,;0\right)$ et

$$DH = \sqrt{\frac{b^2c^4}{(b^2+c^2)^2}+\frac{c^2b^4}{(b^2+c^2)^2}+d^2}$$

Donc $DH = \sqrt{\frac{b^2c^2+d^2b^2+d^2c^2}{b^2+c^2}}$.

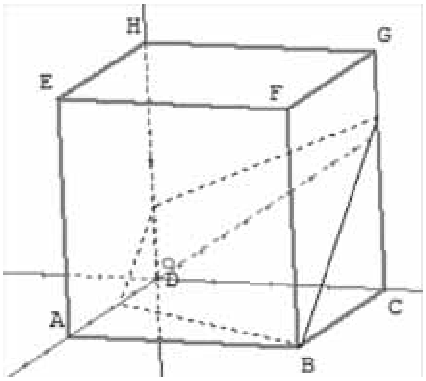
L'aire de BCD est donc

$$\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{\frac{b^2c^2+d^2b^2+d^2c^2}{b^2+c^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+d^2b^2+d^2c^2}$$

On peut donc conclure que

$\text{Aire}(BCD)^2 = \text{Aire}(ABC)^2+\text{Aire}(ABD)^2+\text{Aire}(ACD)^2$.

115 La figure construite avec Geoplan-Geospace permet de conjecturer que la section du cube par $\mathcal{P}_1$ est un quadrilatère dont les sommets appartiennent à [DH], [DA], [BC] et [CG].



$M(x\,;y\,;z) \in [DH] \cap \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow$ il existe $t \in [0\,;4]$ tel que

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ 9x - 5y + 12z - 15 = 0 \end{cases} \quad \text{soit } z = t = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

donc $M(0\,;0\,;\frac{5}{4})$.

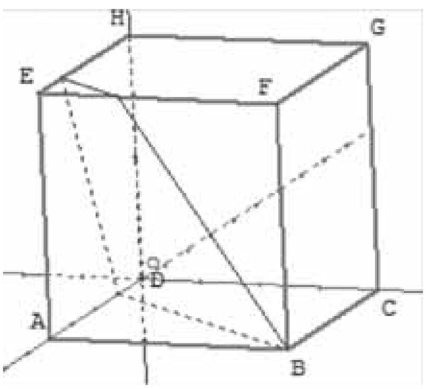
De même, on trouve $N(\frac{5}{3}\,;0\,;0) \in [DA] \cap \mathcal{P}_1$,

$P(\frac{35}{9}\,;4\,;0) \in [BC] \cap \mathcal{P}_1$ et $Q(0\,;4\,;\frac{35}{12}) \in [CG] \cap \mathcal{P}_1$.

M et N sont dans la face ADHE donc le segment [MN] est bien un des côtés de la section, de même pour [NP] (dans ABCD), [PQ] (dans BCGE) et [QM] (dans DCGH). On peut conclure que la section est le quadrilatère MNPQ.

De même la section du cube par le plan $\mathcal{P}_2$ semble être un quadrilatère dont un sommet est B et les autres appartiennent à [DA], [EH] et [FE].

$B(4\,;\,4\,;\,0)$ et $4 \times 4 - 3 \times 4 - 2 \times 0 - 4 = 0$ donc les coordonnées de B vérifient l'équation de $\mathcal{P}_2$.



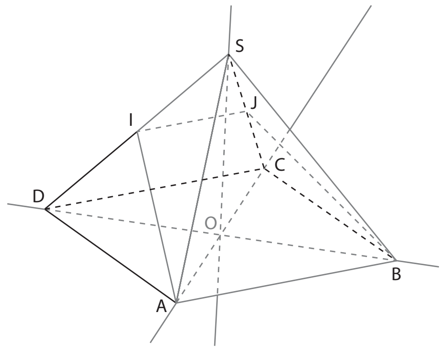
$R(1\,;0\,;0) \in [DA] \cap \mathcal{P}_2$, $S(3\,;0\,;4) \in [EH] \cap \mathcal{P}_2$ et $T(4\,;\frac{4}{3}\,;4) \in [EF] \cap \mathcal{P}_2$. De plus, [BR] (dans la face ABCD), [RS] (dans ADHE), [RT] (dans EFGH) et [TB] (dans BCGH) sont des côtés de la section donc on peut conclure que la section est le quadrilatère BRST.

116 À partir de la pyramide, on choisit comme repère $(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$ où O est le centre de la base carrée ABCD. ABCD est un carré donc $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$. SA = SB= SC donc SAC est isocèle de sommet S ; comme O est le milieu de [AC], $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OA}$. De même $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OB}$. Donc le repère $(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est orthogonal. On choisit comme unité la demi-diagonale du carré ABCD. Ainsi OA = OB = 1. De plus, dans le triangle SOA rectangle en O, $SA = AB = \sqrt{2}$ et OA = 1 donc $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 1$ donc SO = 1 et on peut conclure que le repère choisi est orthonormé.

Calcul du volume de la pyramide SABCD

$V = \frac{1}{3} \times AB \times BC \times SO = \frac{2}{3}$ unités de volume.

Calcul du volume de la pyramide SABJI.



a. Aire de la base ABIJ

I est le milieu de [SD] et J est le milieu de [SC] donc (IJ) // (DC) et donc (IJ) // (AB) et $IJ = \frac{1}{2}\,DC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

De plus IA = JB donc ABJI est un trapèze isocèle.

Soit H le pied de la hauteur issue de I.

Dans le triangle IHA, rectangle en H, $IH^2 = IA^2 - AH^2$.

$AH = \frac{1}{2}(AB - IJ) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Dans le triangle SAD équilatéral de côté $\sqrt{2}$, I est le milieu de [SD] donc AI est la hauteur issue de A donc $AI = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. On a donc $IH^2 = \frac{6}{4} - \frac{2}{16} = \frac{11}{8}$ soit $IH = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}$.

L'aire du trapèze ABJI est donc :

$\frac{1}{2}(IJ + AB) \times IH = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \times \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{11}}{8}$.

b. Calcul de la distance de S au plan (ABJ).

Dans le repère choisi, A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 1 ; 0) et comme C(– 1 ; 0 ; 0) et S(0 ; 0 ; 1), on a $J\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.

(ABJ) a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$

avec $\begin{cases} a+d=0 \\ b+d=0 \\ -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c+d=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=-d \\ b=-d \\ c=-3d \end{cases}$

donc $x+y+3z-1=0$ est une équation de (ABJ).

Soit K le projeté orthogonal de S sur la plan (ABJ).

$\overrightarrow{SK}$ est colinéaire à $\vec{n}(1;1;3)$ vecteur normal à (ABJ) donc il existe un réel t tel que $\overrightarrow{SK} = t\vec{n}$ c'est-à-dire tel que

$\begin{cases} x_K = t \\ y_K = t \\ z_K - 1 = 3t \end{cases}$

Comme $K \in (ABJ)$ on a $t+t+3(3t+1)-1=0$ soit $t=-\frac{2}{11}$

et $\overrightarrow{SK}\left(-\frac{2}{11};-\frac{2}{11};-\frac{6}{11}\right)$ d'où

$SK = \sqrt{\frac{4}{121}+\frac{4}{121}+\frac{36}{121}} = \frac{\sqrt{44}}{11} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$

c. Volume de SABJI

Le volume de SABJI est $\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{11}}{8}\times\frac{2}{\sqrt{11}}=\frac{1}{4}.$

Conclusion

$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$: les doutes du géomètre sont justifiés car les deux parts ne sont pas égales.

117 $\overrightarrow{AB}(-80;0;60)$ et $\overrightarrow{AC}(-80;-60;60)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{E}$ est le plan (ABC).

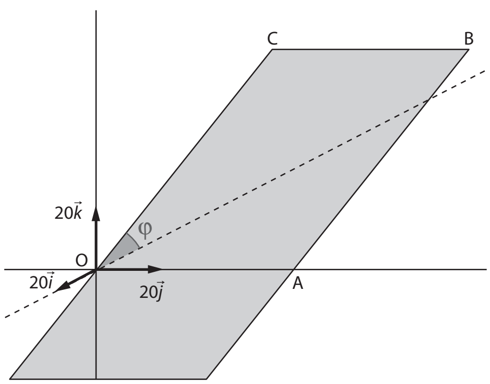
Le plan $\mathcal{E}$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$

avec $\begin{cases} 60b+d=0 \\ -80a+60b+60c+d=0 \\ -80a+60c+d=0 \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} b=d=0 \\ -4a+3c=0 \end{cases}$

On peut prendre $a=3$ et $c=4$ donc une équation de $\mathcal{E}$ est $3x+4z=0$.

Ce plan contient l'origine du repère et le point A(0 ; 60 ; 0) donc il contient l'axe (Oy) et coupe le plan (xOz) perpendiculairement suivant (OC) car O et C appartiennent à (xOz).



Le plan (xOz) perpendiculaire à (Oy), coupant le plan $\mathcal{E}$ suivant (OC) et le plan (xOy) suivant (Ox), les deux droites (Ox) et (OC) déterminent dans le plan (xOz) 4 angles géométriques deux à deux opposés par le sommet et égaux deux à deux, dont les mesures sont celles des 4 angles dièdres déterminés par les deux plans sécants $\mathcal{E}$ et (xOy).

La mesure φ des deux angles aigus égaux est donc telle que : soit φ est une mesure de $(\vec{i}, \overrightarrow{OC})$, soit φ est une mesure de $(-\vec{i}, \overrightarrow{OC})$.

Comme $\vec{i}\cdot\overrightarrow{OC}<0$ et $-\vec{i}\cdot\overrightarrow{OC}>0$, φ est la mesure de $(-\vec{i}, \overrightarrow{OC})$ telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Comme $\cos(\varphi) = \frac{-\vec{i}\cdot\overrightarrow{OC}}{OC} = 0{,}8$, on a $\varphi \approx 0{,}64$ radians ou 36,9°.

118 **1.** $\vec{n}_1(1;0;-1)$ et $\vec{n}_2(0;1;3)$ vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite d.

De même $\vec{n}_1'(1;2;1)$ et $\vec{n}_2'(3;3;2)$ vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont sécants suivant une droite d'.

2. $M(x;y;z) \in d' \Leftrightarrow \begin{cases} x-z-a=0 \\ y+3z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z+a \\ y=-3z-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t+a \\ y=-3t-1,\ t\in\mathbb{R}. \\ z=t \end{cases}$

Donc $\vec{u}(1;-3;1)$ est un vecteur directeur de d.

$M(x;y;z) \in d' \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z-2b=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-4b+7 \\ z=-3y+6b-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t'-4b+7 \\ y=t' \\ z=-3t'+6b-7 \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}.$

Donc $\vec{u}'(1;1;-3)$ est un vecteur directeur de d'.

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc d et d' ne sont pas parallèles.

3. d et d' sont concourantes $\Leftrightarrow$ il existe t et t' tels que

$\begin{cases} x=t+a \\ y=-3t-1 \\ z=t \\ x=t'-4b+7 \\ y=t' \\ z=-3t'+6b-7 \end{cases}$ ce qui revient à résoudre

$\begin{cases} t+a=t'-4b+7 \\ -3t-1=t' \\ t=-3t'+6b-7 \end{cases}$ soit $\begin{cases} t=t'-a-4b+7 \\ 4t'=3a+12b-22. \\ 4t'=a+10b-14 \end{cases}$

On peut donc conclure que d et d' sont concourantes $\Leftrightarrow 3a+12b-22=a+10b-14 \Leftrightarrow a+b=4.$

Dans ce cas $(a+b=4)$, $t'=-\frac{9}{4}a+\frac{13}{2}$, $t=\frac{3}{4}a-\frac{5}{2}$ et d et d' sont sécantes en $K\left(\frac{7}{4}a-\frac{5}{2}\,;-\frac{9}{4}a+\frac{13}{2}\,;\frac{3}{4}a-\frac{5}{2}\right)$.

d et d' définissent donc un plan $\mathscr{R}$ passant par K et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1\,;-3\,;1)$ et $\vec{u}'(1\,;1\,;-3)$.

Déterminons un vecteur normal à $\mathscr{R}$: $\vec{n}(a'\,;b'\,;c')$.

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{u}'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a'-3b'+c'=0 \\ a'+b'-3c'=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a'=2c' \\ b'=c' \end{cases}$

d'où $\vec{n}(2\,;1\,;1)$ est un vecteur normal à $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}$ admet une équation de la forme $2x+y+z+d=0$. $K\in\mathscr{R}$ donc

$$2\left(\frac{7}{4}a-\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{9}{4}a+\frac{13}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}a-\frac{5}{2}\right)+d=0$$

soit $d=-2a+1$.

D'où une équation du plan $\mathscr{R}$: $2x+y+z-2a+1=0$.

Accompagnement personnalisé

1 Déterminer une équation …

1. $3\times 0+2\times 0+16\times 0=0$

$3\times 4+2\times 2+16\times(-1)=12+4-16=0$

$3\times(-2)+2\times 3+16\times 0=-6+6=0$

donc les coordonnées de O, Q et R vérifient l'équation proposée. On en déduit qu'une équation de (OQR) est $3x+2y+16z=0$.

2. a. $\overrightarrow{AB}(-3:-4:1)$ et $\overrightarrow{AC}(-5\,;2\,;-7)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés (et forment un plan).

b. Soit $\vec{n}(1\,;-1\,;-1)$.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-3+4-1=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-5-2+7=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est normal à (ABC).

c. $M(x\,;y\,;z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow 1(x-1)-1(y+2)-1(z-4)=0\Leftrightarrow x-y-z+1=0$.

3. $\vec{u}(-1\,;1\,;-1)$ est un vecteur directeur de d. Comme $\mathscr{P}$ est orthogonal à d, $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ qui admet donc une équation cartésienne de la forme $-x+y-z+d=0$. On sait de plus que $O(0\,;0\,;0)$ appartient à $\mathscr{P}$ donc $d=0$. On conclut que $-x+y-z=0$ est une équation de $\mathscr{P}$.

4. (ABC) a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.

$A(1\,;0\,;0)\in(ABC)$ donc $a+d=0$ soit $a=-d$

$B(0\,;2\,;0)\in(ABC)$ donc $2b+d=0$ soit $b=-\frac{d}{2}$.

$C(0\,;0\,;3)\in(ABC)$ donc $3c+d=0$ soit $c=-\frac{d}{3}$.

En prenant $d=-6$, on obtient $a=6$, $b=3$ et $c=2$ et donc $6x+3y+2z-6=0$ est une équation de (ABC).

5. $\mathscr{P}$ contient d donc $\vec{u}(3\,;2\,;-2)$ vecteur directeur de d est un vecteur de $\mathscr{P}$.

$\mathscr{P}$ contient (AB) donc $\overrightarrow{AB}(2\,;3\,;2)$ est un vecteur de $\mathscr{P}$.

$\vec{n}\cdot\vec{u}=6-4-2=0$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4-6+2=0$ et $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$M(x\,;y\,;z)\in\mathscr{P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow 2(x-8)-2y+(z-8)=0$

$\Leftrightarrow 2x-2y+z-24=0$.

2 Déterminer la distance …

1. Le projeté orthogonal H de A sur D est le point de D tel que $\overrightarrow{AH}(x_H-1\,;y_H-1\,;z_H)$ est orthogonal à $\vec{u}(1\,;0\,;1)$ vecteur directeur de D.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=0\Leftrightarrow x_H-1+z_H=0$.

H est donc le point de D de paramètre t tel que $-2+t-1+t=0$ soit $t=\frac{3}{2}$. D'où $H\left(-\frac{1}{2}\,;3\,;\frac{3}{2}\right)$.

Autre méthode : H est le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ orthogonal à D et passant par A.

$\vec{u}(1\,;0\,;1)$ est normal à $\mathscr{P}$ donc $\mathscr{P}$ admet une équation de la forme $x+z+c=0$.

$A(1\,;1\,;0)\in\mathscr{P}$ donc $1+c=0$ soit $c=-1$ et $\mathscr{P}$ a pour équation : $x+z-1=0$. Comme H appartient à $\mathscr{P}$ et à D, on retrouve comme précédemment les coordonnées de H.

Et $AH=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{2}}$.

2. Soit $M(-2+t\,;3\,;t)$ point de D de paramètre t.

$AM^2=(t-3)^2+2^2+t^2=2t^2-6t+13$.

Pour $t\in\mathbb{R}$, soit $f(t)=AM=\sqrt{2t^2-6t+13}$;

$f(t)=\sqrt{g(t)}$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=2t^2-6t+13$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $g'(t)=4t-6$, d'où g est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

Comme g est positive sur $\mathbb{R}$(somme de carrés), $f=\sqrt{g}$ est aussi strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$. f admet donc un minimum pour $x=\frac{3}{2}$ et ce minimum est $f\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\frac{17}{2}}$.

Conclusion : Avec les deux méthodes, on trouve que la distance de A à D est $\sqrt{\frac{17}{2}}$.

3 Étudier l'intersection de 3 plans

A. 1. Figure 1 : l'intersection des trois plans est vide.

Figure 2 : l'intersection des trois plans est un point.

Figure 3 : l'intersection des trois plans est une droite.

2. Voir site en ligne. L'intersection des trois plans est :

a. vide (figure 1) ;

Remarque : Sur le logiciel Xcasfr, en ligne 3, la commande inter(d,P3) fournit comme réponse group[].

Cela signifie que l'intersection de d et de P3 est soit vide, soit contient une infinité de points solutions.

La résolution par le logiciel du système formé par les équations des trois plans donne l'ensemble vide comme ensemble de solutions.

b. {A} où A(1 ; 1 ; 1) (figure 2) ;

c. la droite Δ passant par $B\left(\frac{13}{14};\frac{5}{14};\frac{3}{14}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{14};\frac{75}{14};\frac{45}{14}\right)$ puisque le logiciel indique que la droite d'intersection de R1 et R2 et la droite d'intersection de R1 et R3 passent toutes les deux par ces deux points : elles sont donc confondues.

En demandant au logiciel, la résolution du système formé par les équations des trois plans, on obtient une représentation paramétrique de la droite Δ :

$\begin{cases} x = t \\ y = -5t+5, t \in R \text{ (figure 3).} \\ z = -3t+3 \end{cases}$

Pour aller plus loin :

a. $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2x+y-3z=1 \\ 3x-z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=0 \\ 3x-z=1 \\ 3x-z=5 \end{cases}$

Ce système n'a pas de solution donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$.

b. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -2x+3y-4z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x=3 \\ 5x+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \\ z=1 \end{cases}$

d'où $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \cap \mathcal{Q}_3 = \{A\}$ où A(1 ; 1 ; 1).

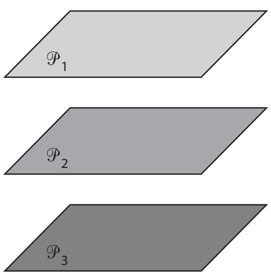
c. $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 4x-y+3z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 3x+z=3 \\ 3x+z=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+2z-1 \\ z=3-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5x+5 \\ z=-3x+3 \end{cases}$

D'où $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 = \Delta$ droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=t \\ y=-5t+5 \ , t \in \mathbb{R}. \\ z=-3t+3 \end{cases}$

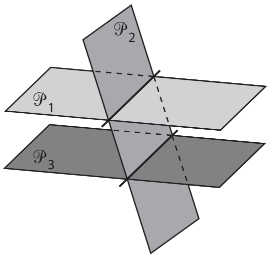
3. Autres cas (intersection vide) :

Figure 4



$\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2 // \mathcal{P}_3$

Figure 5



$\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_3$
et $\mathcal{P}_2$ sécant à $\mathcal{P}_1$
et $\mathcal{P}_3$ selon deux droites parallèles.

B. 1. Faux, voir figure 5.

2. Faux, voir figure 1 ou 5.

3. Vrai car $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$ signifie que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont strictement parallèles et $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \varnothing$ signifie que les plans distincts $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants ; or si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre, d'où $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \varnothing$.

4. Vrai car $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$ signifie que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont strictement parallèles et $\mathcal{P}_1 \cap D \neq \varnothing$ signifie que le plan $\mathcal{P}_1$ et la droite D sont sécants ; or si deux plans sont parallèles, toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre, d'où $\mathcal{P}_2 \cap D \neq \varnothing$.

4

1. a. A(3 ; 0 ; 0), C(0 ; 3 ; 0), E(3 ; 0 ; 3).

b. $\overrightarrow{CE}(3\,;-3\,;3)\,;\,\overrightarrow{CL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 1 \\ y_L - 3 = -1 \\ z_L = 1 \end{cases}$

d'où L(1 ; 2 ; 1).

c. $\overrightarrow{AE}(0\,;0\,;3), \overrightarrow{DL}(1\,;2\,;1)$.

2. $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 3 = 0 \\ y_M = 0 \\ z_M = 3a \end{cases}$ d'où $M(3\,;0\,;3a)$.

$\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$ d'où $N(b\,;2b\,;b)$ (car D origine du repère).

D'où $\overrightarrow{MN}(b-3\,;2b\,;b-3a)$.

$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DL} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AE} = 0$ et $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DL} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(b-3a)=0 \\ b-3+4b+b-3a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=0 \\ -a+2b=1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3a-b=0 \\ -a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ -a+6a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{5} \\ a=\frac{1}{5} \end{cases}$

Le système précédent admet un seul couple solution donc il existe un seul point M_0 de la droite (AE) et un seul point N_0 de la droite (DL) tels que (M_0N_0) soit orthogonale aux droites (AE) et (DL) : $\overrightarrow{AM_0} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DN_0} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DL}$.

c. $M_0\left(3\,;0\,;\frac{3}{5}\right)$ et $N_0\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5};\frac{3}{5}\right)$;

$M_0N_0 = \sqrt{\left(\frac{3}{5}-3\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2+0^2} = \sqrt{\frac{144}{25}+\frac{36}{25}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$

CHAPITRE 12

Conditionnement et Indépendance

Pour reprendre contact

1 Avec un changement d'univers

1. Loi équirépartie sur $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 15\}$

a. $P(n°\,12) = \dfrac{1}{15}$ **b.** $P(n° > 10) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$ **c.** $P(n° \text{ impair}) = \dfrac{8}{15}$ **d.** $P(\text{multiple de } 5) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

2. $\Omega' = \{11\ ;\ 12\ ;\ 13\ ;\ 14\ ;\ 15\}$

a. $P(n°\,12) = \dfrac{1}{5}$ **b.** $P(n° \text{ impair}) = \dfrac{3}{5}$ **c.** $P(\text{multiple de } 5) = \dfrac{2}{5}$

3. $\Omega'' = \{1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 15\}$

a. $P(n°\,12) = 0$ **b.** $P(n° > 10) = \dfrac{3}{8}$ **c.** $P(\text{multiple de } 5) = \dfrac{1}{8}$

2 Avec les opérations sur événements

1. a. $C \cup S$ **b.** $\overline{C} \cap \overline{S}$ **c.** $\overline{C} \cap S$ **d.** $(\overline{C} \cap S) \cup (C \cap \overline{S})$

2. $P(C \cup S) = P(C) + P(S) - P(C \cap S) = 0{,}33 + 0{,}59 - 0{,}22 = 0{,}7$

$P(\overline{C} \cap \overline{S}) = 1 - P(C \cup S) = 0{,}3$ et $P(\overline{C} \cap S) = P(S) - P(C \cap S) = 0{,}37$

$P((\overline{C} \cap S) \cup (C \cap \overline{S})) = P(\overline{C} \cap S) + P(C \cap \overline{S}) = 0{,}37 + (0{,}33 - 0{,}22) = 0{,}48$

3 Avec un arbre pondéré

2. • P(E) est la probabilité du seul chemin $\xrightarrow{1/9} 1 \xrightarrow{1/3} 2 \xrightarrow{5/9} 3$ $P(E) = \dfrac{5}{243}$

• P(F) est la somme des probabilités des 6 chemins suivants : 1–2–3 ; 1–3–2 ; 2–1–3 ; 2–3–1 ; 3–1–2 ; 3–2–1.

Ces chemins ayant le même probabilité, celle de l'événement E, on a : $P(F) = 6\,P(E) = \dfrac{30}{243} = \dfrac{10}{81}$

• P(G) est la somme des probabilités des 3 chemins suivants : 1–1–1 ; 2–2–2 ; 3–3–3. $P(G) = \left(\dfrac{1}{9}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{5}{9}\right)^3 = \dfrac{17}{81}$

3. Voir manuel page 374.

Activité 1

1. a. Le lancer des deux dés se modélise par la loi équirépartie sur l'ensemble Ω des 24 couples possibles.

b. • En coloriant les 18 cases du tableau correspondant à A, on a : $P(A) = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$.

• $P(B) = P(\{(2\ ;\ 6), (3\ ;\ 5), (4\ ;\ 4)\}) = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8}$ • $P(A \cap B) = P(\{(2\ ;\ 6), (3\ ;\ 5)\}) = \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$

2. a. $\Omega' = B = \{(2\ ;\ 6), (3\ ;\ 5), (4\ ;\ 4)\}$

A se réalise avec les couples $(2\ ;\ 6)$ et $(3\ ;\ 5)$. Avec la loi équirépartie sur Ω', on obtient $P_B(A) = \dfrac{2}{3}$.

b. $\Omega'' = A$. Ω'' comprend 18 couples. Sur ces 18 couples équiprobables, seuls $(2\ ;\ 6)$ et $(3\ ;\ 5)$ réalisent B.

D'où $P_A(B) = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9}$.

3. $P(A \cap B) = \dfrac{1}{12} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{8} = P(B) \times P_B(A)$ $\quad P(A \cap B) = \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{9} = P(A) \times P_A(B)$

4. a. • $\Omega'' = A$. Sur les 18 couples équiprobables de Ω'', seuls $(1\ ;\ 4)$, $(2\ ;\ 3)$ et $(3\ ;\ 2)$ réalisent C. D'où $P_A(C) = \dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6}$.

• $\Omega''' = C$. Sur les 4 couples réalisant C, soit $(1\ ;\ 4)$, $(2\ ;\ 3)$, $(3\ ;\ 2)$ et $(4\ ;\ 1)$, seuls les trois premiers réalisent A.

D'où $P_C(A) = \dfrac{3}{4}$.

b. $P_A(C) = \dfrac{1}{6}$ $\qquad P(C) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$ $\qquad P_C(A) = \dfrac{3}{4}$ $\qquad P(A) = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$

c. $P(A \cap C) = P(\{(1\ ;\ 4), (2\ ;\ 3), (3\ ;\ 2)\}) = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8}$

On remarque : $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$.

Activité 2

A. a. • `=SI(ENT(ALEA()+0,1)=1;"A";"nonA")`

`ALEA()+0,1` renvoie un nombre au hasard dans [0,1 ; 1,1].

`ENT(ALEA()+0,1)` donne la partie entière de ce nombre, c'est-à-dire 0 avec la probabilité 0,9, 1 avec la probabilité 0,1.

L'instruction conditionnelle `=SI…` fait donc afficher « A » avec la probabilité 0,9 et « nonA » avec la probabilité 0,1.

• `=SI(B3="A";ENT(ALEA()+0,7);ENT(ALEA()+0,02))`

Si « A » a été obtenu lors de l'instruction précédente, `ENT(ALEA()+0,7)` renvoie 0 avec la probabilité 0,3 et 1 avec la probabilité 0,7.

Si « nonA » a été obtenu, `ENT(ALEA()+0,02)` renvoie 0 avec la probabilité 0,98 et 1 avec la probabilité 0,02.

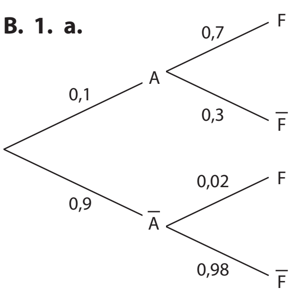
• `=CONCATENER(B3;"&";C3)` affiche le résultat couplant les critères Allergie (« A » ou « nonA ») et Antécédent (0 ou 1).

b. En F2 : `=NB.SI(D:D;"A&1")/10000`

En G3 : `=NB.SI(D:D;"nonA&0")/10000` à adapter pour F3 et G2.

c. En I2 : `=F2/H2`

B. 1. a.



b. Les probabilités cherchées sont $P(F)$ et $P_F(A)$. On ne peut pas les lire directement sur l'arbre.

c. $P(A \cap F) = 0{,}1 \times 0{,}7 = 0{,}07$

$P(\overline{A} \cap F) = 0{,}9 \times 0{,}02 = 0{,}018$. D'où $P(F) = 0{,}07 + 0{,}018 = 0{,}088$.

Oui ces probabilités sont voisines des fréquences affichées.

2. a. $P(A \cap F) = P(F) \times P_F(A)$

b. $P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}07}{0{,}088} \approx 0{,}795$. $f_F(A)$ approche $P_F(A)$ à moins de 2×10^{-3}.

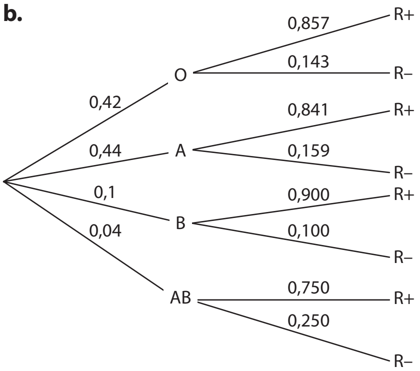
3. a. $P(\overline{A} \cap \overline{F}) = P(\overline{A})P_{\overline{A}}(\overline{F}) = 0{,}9 \times 0{,}98 = 0{,}882$; $P(\overline{A} \cap \overline{F}) = P(\overline{F})P_{\overline{F}}(\overline{A})$ d'où $P_{\overline{F}}(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0{,}882}{1 - 0{,}088} \approx 0{,}967$

b. $\dfrac{P_F(A)}{P_{\bar{F}}(A)} \approx \dfrac{0{,}795}{1-0{,}967} \approx 24$

TP1. Groupes sanguins et facteur Rhésus

1. a. $p_1 = P(O)$; $p_2 = P_O(R^+)$; $p_1 = \dfrac{42}{100} = 0{,}42$; $p_2 = \dfrac{36}{42} = 0{,}857$

b.

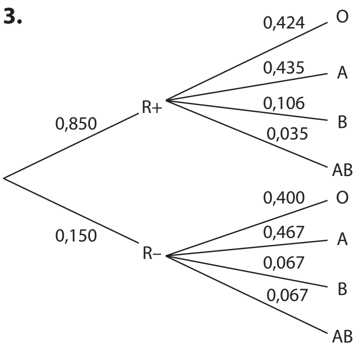


2. a. $P(O \cap R^+) = 0{,}42 \times 0{,}857 \approx 0{,}360$. En revenant au tableau : $P(O \cap R^+) = \dfrac{36}{100} = 0{,}36$.

b. $P(R^-) = 0{,}42 \times 0{,}143 + 0{,}44 \times 0{,}159 + 0{,}1 \times 0{,}100 + 0{,}04 \times 0{,}250 = 0{,}15$

Avec les données du tableau : $P(R^-) = \dfrac{15}{100} = 0{,}15$.

3.



4. • $P(R^- \cap O) = 0{,}060$; $P(R^-)P(O) = 0{,}15 \times 0{,}42 = 0{,}063$

R^- et O ne sont pas indépendants car $P(R^- \cap O) \neq P(R^-) \times P(O)$

• $P_{R^-}(O) = 0{,}400$; $P(O) = 0{,}420$. $P_{R^-}(O) \neq P(O)$; même conclusion.

• $P_O(R^-) \approx 0{,}143$; $P(R^-) = 0{,}15$. $P_O(R^-) \neq P(R^-)$; même conclusion.

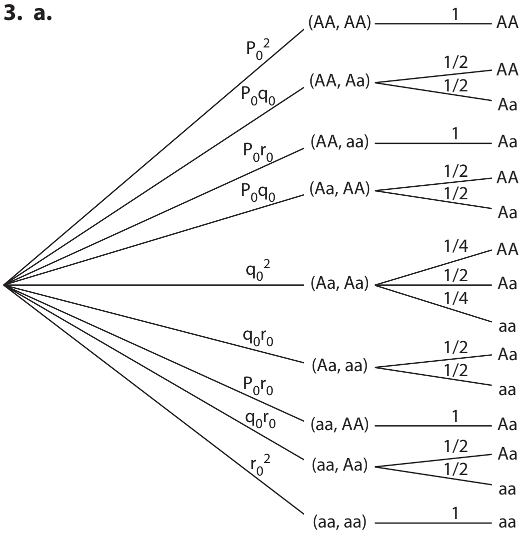
TP2. Appariement aléatoire en génétique

A. 1. a. $P(\{(AA,\ AA)\}) = p_0^2$ **b.** $P(\{(Aa,\ Aa)\}) = q_0^2$ **c.** $P(\{(AA,\ Aa);(Aa, AA)\}) = 2p_0q_0$

Les produits effectués se justifient par l'« appariement aléatoire » qui assure l'indépendance des génotypes des parents.

2. a. $P_{(AA,\ AA)}(AA) = 1$ **b.** $P_{(Aa,Aa)}(AA) = \dfrac{1}{4}$ **c.** $P_{(AA,\ Aa)}(AA) = \dfrac{1}{2}$

3. a.



b. $p_1 = p_0^2 + \frac{1}{2}p_0q_0 + \frac{1}{2}p_0q_0 + \frac{1}{4}q_0^2\,;\, p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$

c. $r_1 = \frac{1}{4}q_0^2 + \frac{1}{2}q_0r_0 + \frac{1}{2}q_0r_0 + r_0^2\,;\, r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2\,;\, q_1 = 1 - p_1 - r_1\,;\, q_1 = 1 - \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2 - \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$

B. 1. $p_2 = \left(p_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2\,;\, r_2 = \left(r_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2\,;\, q_2 = 1 - \left(p_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2 - \left(r_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2$

2. a. $p_2 - r_2 = (p_1 + q_1 + r_1)(p_1 - r_1) = 1 \times (p_1 - r_1) = p_1 - r_1$. De même, $p_1 - r_1 = p_0 - r_0$.

b. $p_0 - r_0 = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2 = \left(\frac{2p_0 + q_0}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + p_0 - r_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{2p_0 + q_0}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \text{d'où l'égalité.}$$

car $1 = p_0 + q_0 + r_0$

Comme $p_1 - r_1 = p_0 - r_0 = \alpha$ et comme les expressions de p_2, q_2 et r_2 en fonction de p_1, q_1 et r_1 coïncident avec celles de p_1, q_1 et r_1 en fonction de p_0, q_0 et r_0, on a de même : $p_2 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$.

De $p_2 = p_1$ et $p_2 - r_2 = p_1 - r_1 = \alpha$, on déduit $r_2 = r_1$.

Enfin, $p_2 = p_1$ et $r_2 = r_1$ donnent $1 - p_2 - r_2 = 1 - p_1 - r_1$ soit $q_2 = q_1$.

Conclusion : les probabilités des génotypes restent inchangées d'une génération à l'autre.

TP 3. Marche aléatoire d'une puce

A. 1.

```
Affecter 2 à a
Si pos = 0 Alors Affecter Nbalétoire à tirage
          Si tirage < 1/3 Alors Affecter 1 à a
          Sinon Affecter 2 à a
          FinSi
Si pos = 1 Alors Affecter Nbaléatoire à tirage
          Si tirage < 0.5 Alors Affecter 0 à a
          Sinon Affecter  2 à a
          FinSi
FinSi
Affecter a à pos
```

Remarque : on pourra faire remarquer que l'on peut modifier l'algorithme de la manière suivante

```
Affecter 2 à a
Affecter Nbaléatoire à tirage
Si pos = 0 Alors
          Si tirage < 1/3     Alors Affecter 1 à a
                              Sinon Affecter 2 à a
          FinSi
Si pos = 1 Alors
          Si tirage < 0.5     Alors Affecter 0 à a
                              Sinon Affecter  2 à a
          FinSi
FinSi
Affecter a à pos
```

2.

```
Saisir n
a = 0
pos = 0
Pour k de 1 à n Faire
Affecter Nbaléatoire à tirage
Si pos = 0 Alors
        Si tirage < 1/3     Alors Affecter 1 à a
                            Sinon Affecter 2 à a
        FinSi
Si pos = 1 Alors
        Si tirage < 0.5     Alors Affecter 0 à a
                            Sinon Affecter  2 à a
        FinSi
FinSi
Affecter a à pos
FinPour
Afficher pos
```

3.

```
nbA = 0 ; nbB = 0 ; nbC = 0  //comptent le nombre
d'arrivées  en A, B et C.
a = 0
pos = 0
Pour k de 1 à 1 000 Faire
Affecter Nbaléatoire à tirage
Si pos = 0 Alors
        Si tirage < 1/3     Alors Affecter 1 à a
                            Sinon Affecter 2 à a
        FinSi
Si pos = 1 Alors
        Si tirage < 0.5     Alors Affecter 0 à a
                            Sinon Affecter  2 à a
        FinSi
FinSi
Affecter a à pos
Si pos = 0 Alors Affecter  nbA + 1 à nbA ;FinSi
Si pos = 1 Alors Affecter nbB + 1 à nbB ; FinSi
Si pos = 2 Alors Affecter nbC +1 à nbC ; FinSi
FinPour
Afficher nbA/1000 , nbB/1000, nbC/1000
```

4. Voir les programmes sur le site.

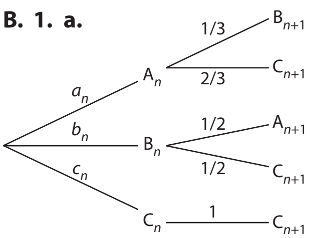
On obtient comme fréquence par exemple :

```
fréquence de A : 0

fréquence de B : 0.001

fréquence de C : 0.999
```

B. 1. a.



b. $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2}b_0 = 0 \\ b_1 = \dfrac{1}{3}a_0 = \dfrac{1}{3} \\ c_1 = \dfrac{2}{3}a_0 + \dfrac{1}{2}b_0 + c_0 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2}b_1 = \dfrac{1}{6} \\ b_2 = \dfrac{1}{3}a_1 = 0 \\ c_2 = \dfrac{2}{3}a_1 + \dfrac{1}{2}b_1 + c_1 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$ $\begin{cases} a_3 = \dfrac{1}{2}b_2 = 0 \\ b_3 = \dfrac{1}{3}a_2 = \dfrac{1}{18} \\ c_3 = \dfrac{2}{3}a_2 + \dfrac{1}{2}b_2 + c_2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{17}{18} \end{cases}$

2. a. L'arbre donne :

- $a_n + b_n + c_n = 1$
- $a_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}) = \dfrac{1}{2}b_n$
- $b_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}a_n$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}a_n\right) = \dfrac{1}{6}a_n$

c. Montrons par récurrence, pour $p \in \mathbb{N}$: $a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p$; $a_{2p+1} = b_{2p} = 0$; $b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p$

- *Initialisation*. Pour $p = 0$, $a_0 = 1$; $a_1 = b_0 = 0$; $b_1 = \dfrac{1}{3}$. Ces égalités sont vraies.
- *Hérédité*. Supposons les 4 égalités vraies à un rang p quelconque fixé, c'est-à-dire :

$a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p$; $a_{2p+1} = b_{2p} = 0$; $b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p$.

On en déduit, à l'aide des égalités établies en 2.a. et 2.b. :

– $a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \dfrac{1}{6}a_{2p} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{p+1}$

– $a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = \dfrac{1}{6}a_{2p+1} = \dfrac{1}{6} \times 0 = 0$

– $b_{2(p+1)} = b_{2p+2} = \dfrac{1}{3}a_{2p+1} = \dfrac{1}{3} \times 0 = 0$

– $b_{2(p+1)+1} = b_{2p+3} = \dfrac{1}{3}a_{2p+2} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{p+1}$

Les 4 égalités sont alors vraies au rang $p + 1$.

• *Conclusion*. Les égalités sont vraies pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{cases} a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p \\ a_{2p+1} = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_{2p} = 0 \\ b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p \end{cases}$.

Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} a_{2p} = \lim\limits_{p \to +\infty} a_{2p+1} = 0$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} b_{2p} = \lim\limits_{p \to +\infty} b_{2p+1} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

Comme $a_n + b_n + c_n = 1$, soit $c_n = 1 - a_n - b_n$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1$.

Interprétation : après un très grand nombre de sauts, la puce, partie de A, se retrouvera en C, avec une probabilité voisine de 1.

Exercices

SANS CRAYON, SANS CALCULATRICE

1 **1.** $P(G) = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$ **2.** $P(V) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$

3. $P_V(G) = \dfrac{19}{20}$ $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{21}{30} = \dfrac{7}{10}$

4. $P_G(V) = \dfrac{19}{40}$ $P_{\overline{G}}(\overline{V}) = \dfrac{9}{10}$

2 **1.** $P(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$; $P_A(B) = 1 - P_A(\overline{B}) = 0{,}2$

2. $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$

3. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1$

4. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$

3 **1.** $P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = 0{,}4$

2. $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}9$

3. $P(\overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{B}) \times P(\overline{C})$

car (B et C indépendants $\Rightarrow$ $\overline{B}$ et $\overline{C}$ indépendants)

$P(\overline{B} \cap \overline{C}) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$

Autre démarche : $\overline{B} \cap \overline{C} = \overline{B \cup C}$ d'où

$P(\overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - P(B \cup C) = 0{,}1$.

4 **1.** $P(A) = 0{,}5$; $P_A(R) = 0{,}8$;

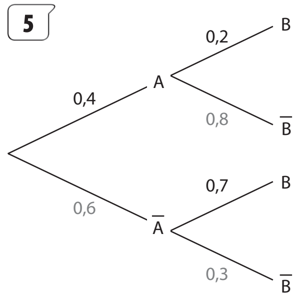
$P(A \cap R) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4$

2. $P(R) = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$

3. A et R sont indépendants car $P_A(R) = P(R)$ ou $P(A \cap R) = P(A) \times P(R)$

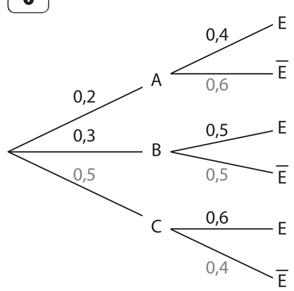
ENTRAÎNEMENT

5



$P(B) = 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}5$

6



$P(E) = 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}53$

7 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}1$

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}6} = \dfrac{1}{6}$

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

8 $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{1}{6}$

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ donne $\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{P(B)}$ d'où $P(B) = \frac{1}{2}$

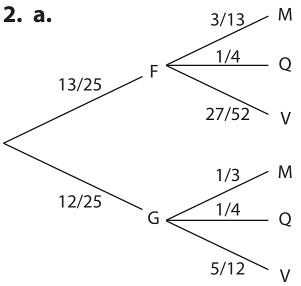
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

9 **1. a.** $P(F) = 0,52 = \frac{13}{25}$; $P(M) = 0,28 = \frac{7}{25}$;

$P(F \cap M) = 0,12 = \frac{3}{25}$; $P_F(M) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

b. On peut vérifier $P_F(M) = \frac{P(F \cap M)}{P(F)}$

2. a.



b. $P(M) = \frac{13}{25} \times \frac{3}{13} + \frac{12}{25} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25} = \frac{7}{25}$

3. $P_G(Q) = \frac{1}{4}$

$P(Q) = \frac{13}{25} \times \frac{1}{4} + \frac{12}{25} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

D'où G et Q sont indépendants relativement à P.

10 **1.** $P(G) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$;

$P(L_k) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, pour chaque valeur de k ;

$P_{L_1}(G) = \frac{3}{4}$; $P_{L_2}(G) = 0$; $P_{L_3}(G) = \frac{1}{2}$; $P_{L_4}(G) = \frac{1}{4}$;

$P(G \cap L_1) = \frac{3}{16}$; $P(G \cap L_2) = 0$; $P(G \cap L_3) = \frac{1}{8}$;

$P(G \cap L_4) = \frac{1}{16}$; $P_G(L_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P_G(L_2) = 0$;

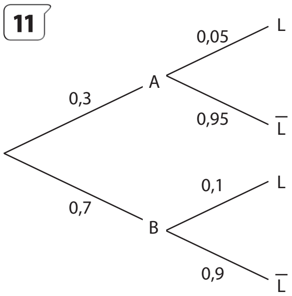
$P_G(L_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P_G(L_4) = \frac{1}{6}$.

2. On peut vérifier, par exemple :

$P(G \cap L_1) = P(G)P_G(L_1)$; $P(G \cap L_1) = P(L_1)P_{L_1}(G)$

$P(G) = P(G \cap L_1) + P(G \cap L_2) + P(G \cap L_3) + P(G \cap L_4)$

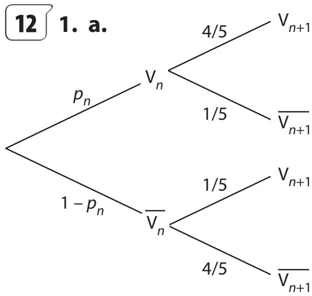
11



L étant l'événement « être en retard à l'école ».

$P(L) = 0,3 \times 0,05 + 0,7 \times 0,1 = 0,022$

12 **1. a.**



b. La probabilité que la 1re personne transmette fidèlement l'information initiale vraie est $p_1 = P(V_1) = \frac{4}{5}$.
D'après l'arbre de probabilités :

$p_{n+1} = P(V_{n+1}) = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n)$

$p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5}$

2. a. $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{5}p_n - \frac{3}{10} = \frac{3}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}u_n$

(u_n) est donc géométrique de premier terme

$u_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ et de raison $\frac{3}{5}$.

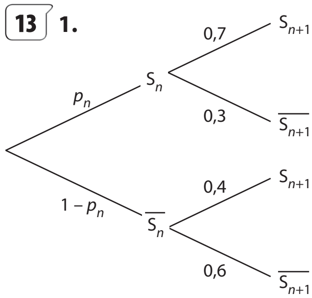
b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{3}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$p_n = \frac{3}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$

c. $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2}$

La probabilité que l'information soit vraie est très voisine de $\frac{1}{2}$ au bout d'un grand nombre de transmissions.

13 **1.**



2. a. $p_1 = P(S_1) = 1$.

b. $p_{n+1} = P(S_{n+1}) = 0,7p_n + 0,4(1 - p_n) = 0,3p_n + 0,4$

3. a. $q_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{7} = \frac{3}{10}p_n - \frac{6}{35}$

$q_{n+1} = \frac{3}{10}\left(p_n - \frac{4}{7}\right) = \frac{3}{10}q_n$

(q_n) est géométrique de premier terme $q_1 = \frac{3}{7}$ et de raison $\frac{3}{10}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ et donc

$$p_n = \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$$

4. a. La suite géométrique (q_n) est décroissante car $q_1 > 0$ et sa raison est comprise entre 0 et 1. Comme $p_n = q_n + \frac{4}{7}$, (p_n) est décroissante aussi et cette affirmation est fausse.

Remarque : on peut aussi calculer $p_1 = 1$ et $p_2 = 0{,}7$. Comme $p_1 > p_2$, la suite (p_n) n'est pas croissante et l'affirmation est fausse (preuve par contre-exemple).

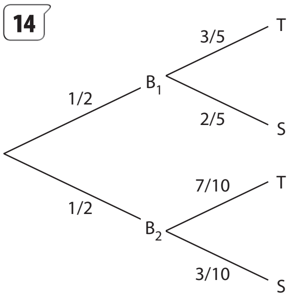
b. Comme $\frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} > 0$, on a : $p_n > \frac{4}{7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\frac{4}{7} > 0{,}5$, l'affirmation est vraie.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{4}{7}$ car $0 < \frac{3}{10} < 1$. L'affirmation est vraie.

d. La tabulation de p_n, sur une calculatrice ou un tableur, montre que les valeurs arrondies de p_n à 10^{-6} près se stabilisent sur la valeur 0,571429 à partir de $n = 12$. L'affirmation est donc vraie.

14



1. a. $P_{B_1}(S) = \frac{2}{5}$; $P(S \cap B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

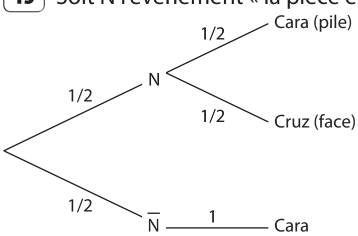
$P_{B_2}(S) = \frac{3}{10}$; $P(S \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$

b. $P(S) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{7}{20}$

$P(T) = 1 - P(S) = \frac{13}{20}$

2. $P_T(B_1) = \frac{P(T \cap B_1)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{13}{20}} = \frac{6}{13}$

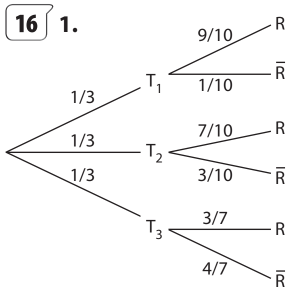
15 Soit N l'événement « la pièce est normale ».



$P_{cara}(N) = \frac{P(\text{cara et N})}{P(\text{cara})}$ or $P(\text{cara et N}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(\text{cara}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4}$ d'où $P_{cara}(N) = \frac{1}{3}$

16 **1.**



2. a. Les probabilités figurant sur les branches de l'arbre sont : $P(T_1)$, $P(T_2)$, $P(T_3)$, $P_{T_1}(R)$, $P_{T_2}(R)$ et $P_{T_3}(R)$.

b. $P(R \cap T_1) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$;

$P(R \cap T_2) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{30} \approx 0{,}23$;

$P(R \cap T_3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14$

$P(R) = \frac{3}{10} + \frac{7}{30} + \frac{1}{7} = \frac{142}{210} = \frac{71}{105} \approx 0{,}68$;

$P_R(T_1) = \frac{P(R \cap T_1)}{P(R)} = \frac{315}{710} \approx 0{,}44$;

$P_R(T_2) = \frac{P(R \cap T_2)}{P(R)} = \frac{245}{710} \approx 0{,}35$;

$P_R(T_3) = \frac{P(R \cap T_3)}{P(R)} = \frac{15}{71} \approx 0{,}21$.

17 Notons A, B, C les événements « la graine est de type A (resp. B, C) » et G l'événement « la graine germe correctement ».

1) $P(A) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$

2) $P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{1}{4} \times 0{,}5 = \frac{1}{8}$

3) $P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G)$

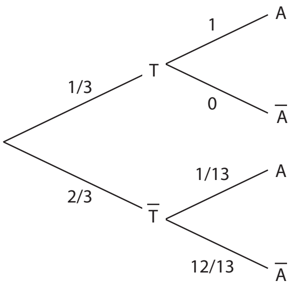
$= P(A) \times P_A(G) + P(B) \times P_B(G) + P(C) \times P_C(G)$

$= \frac{1}{4} \times 0{,}5 + \frac{9}{20} \times 0{,}8 + \frac{3}{10} \times 0{,}6 = \frac{133}{200} = 0{,}665$

4) $P(C \cap \overline{G}) = P(C) \times P_C(\overline{G}) = \frac{3}{10} \times 0{,}4 = 0{,}12$

5) $P_{\overline{G}}(C) = \frac{P(C \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{0{,}12}{1 - 0{,}665} = \frac{0{,}12}{0{,}335} \approx 0{,}358$

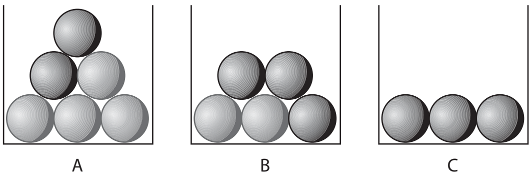
18 Soit les événements T « le joueur est un tricheur » et A « l'as sort ». Pour un joueur honnête la probabilité d'obtenir un as est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.



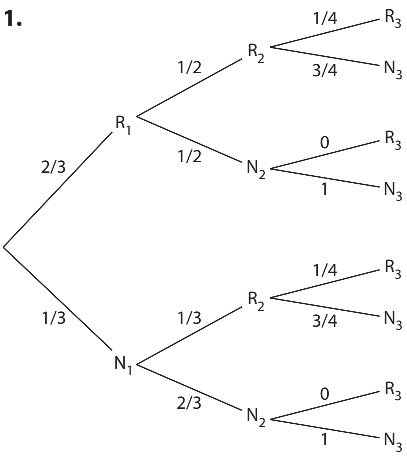
1. $P(A) = \dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{13} = \dfrac{5}{13}$

2. $P_A(T) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{13}} = \dfrac{13}{15} \approx 0,87$

19



1.



2. D'après l'arbre, $P(R_1) = \dfrac{2}{3}$; $P(R_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$;

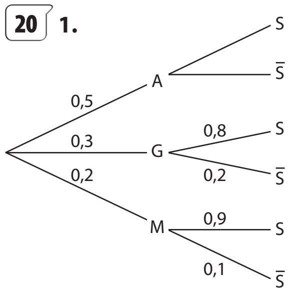
$P(R_3) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{9}$.

3. $P_{R_3}(R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap R_3)}{P(R_3)}$ mais R_1 et R_3 se réalisent tous les deux uniquement dans le cas où les trois boules tirées sont rouges.

D'où $P(R_1 \cap R_3) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

et $P_{R_3}(R_1) = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{3}{4}$.

20 **1.**



2. a. $G \cap S$: « le client a choisi la destination G et est satisfait »

$M \cap S$: « le client a choisi la destination M et est satisfait »

$P(G \cap S) = P(G) \times P_G(S) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$

$P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$

b. $P(S) = 0,72$ d'après l'énoncé.

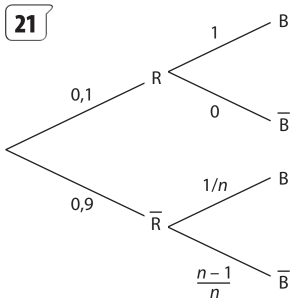
Or $P(S) = P(A \cap S) + P(G \cap S) + P(M \cap S)$

soit $0,72 = P(A \cap S) + 0,24 + 0,18$. D'où $P(A \cap S) = 0,3$.

c. $P_A(S) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(A)} = \dfrac{0,3}{0,5} = 0,6$

3. $P_S(G) = \dfrac{P(G \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,24}{0,72} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$

21

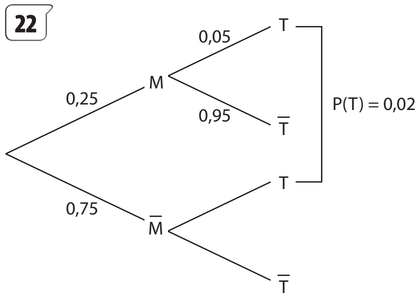


1. $P(B) = 0,1 \times 1 + 0,9 \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{0,9}{n} + 0,1$

2. $P_n = P_B(R) = \dfrac{P(B \cap R)}{P(B)} = \dfrac{0,1n}{0,9 + 0,1n} = \dfrac{n}{n+9}$

3. $P_n = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{n}{n+9} = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow n = 6$

22

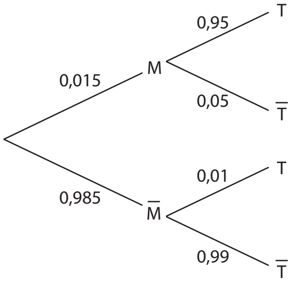


1. $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0,25 \times 0,05}{0,02} = 0,625$

2. $P_{\overline{M}}(T) = \dfrac{P(\overline{M} \cap T)}{P(\overline{M})} = \dfrac{P(T) - P(M \cap T)}{P(\overline{M})}$

$P_{\overline{M}}(T) = \dfrac{0,02 - 0,0125}{0,75} = 0,01$

23 Soit M et T les événements « être malade d'hyperthyroïdie » et « avoir un test positif ».



1. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}015 \times 0{,}95}{0{,}015 \times 0{,}95 + 0{,}985 \times 0{,}01}$

$\approx 0{,}591$

2. $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{M} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0{,}985 \times 0{,}99}{0{,}015 \times 0{,}05 + 0{,}985 \times 0{,}99}$

$\approx 0{,}999$

24 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{12}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{2}$

25 $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$

$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}7 = 0{,}9$

D'où $P(A) = 0{,}9 - P(B) = 0{,}4$

Comme $P_B(A) = P(A)$, A et B sont indépendants.

26 $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= 1 - [0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}4 \times 0{,}7] = 0{,}18$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$ car (A et B sont indépendants $\Rightarrow \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants)

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1 - 0{,}4) \times (1 - 0{,}7) = 0{,}18$

On remarque que $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Ceci est vrai, même si A et B ne sont pas indépendants.

27 **1.** $P(T) = \dfrac{32}{48} = \dfrac{2}{3}$; $P(F) = \dfrac{24}{48} = \dfrac{1}{2}$

$P(T \cap F) = -P(T \cup F) + P(T) \times P(F) = -1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

2. $P(T) \times P(F) = \dfrac{1}{3} \neq P(T \cap F)$

T et F ne sont pas indépendants.

28 **1.** $P(A) = \dfrac{45 + 18 + 27}{150} = \dfrac{3}{5}$; $P(T) = \dfrac{78}{150} = \dfrac{13}{25}$;

$P(A \cap T) = \dfrac{45}{150} = \dfrac{9}{30}$; $P(A \cap T) \neq P(A) \times P(T)$ d'où A et T ne sont pas indépendants.

2. $P(D) = 1 - P(A) = \dfrac{2}{5}$; $P(V) = \dfrac{45}{150} = \dfrac{9}{30}$;

$P(D \cap V) = \dfrac{18}{150} = \dfrac{3}{25} = P(D) \times P(V)$

D et V sont indépendants.

3. • D et V sont indépendants donc $\overline{D}$ et V aussi, par propriété. Mais $\overline{D} = A$, d'où A et V sont indépendants.

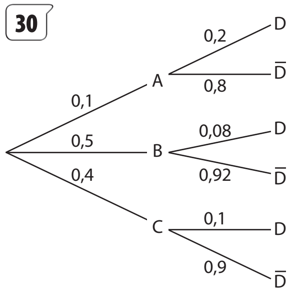
• A et T ne sont pas indépendants donc $\overline{A}$ et T ne sont pas indépendants (en effet, si $\overline{A}$ et T étaient indépendants, $\overline{\overline{A}}$ et T seraient aussi indépendants). Or ceci est faux, d'où on peut affirmer que $\overline{A}$ et T, c'est-à-dire D et T ne sont pas indépendants.

29 $P(V) = \dfrac{80}{500} = \dfrac{4}{25}$; $P(R) = \dfrac{300}{500} = \dfrac{3}{5}$;

$P(V \cap R) = \dfrac{48}{500} = \dfrac{12}{125}$

$P(V \cap R) = P(V) \times P(R)$ est vrai d'où V et R sont indépendants.

30



1. Calculons tout d'abord

$P(\overline{D}) = 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}5 \times 0{,}92 + 0{,}4 \times 0{,}9$

$= 0{,}08 + 0{,}46 + 0{,}36 = 0{,}9$

$P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}8}{0{,}9} = \dfrac{8}{9}$

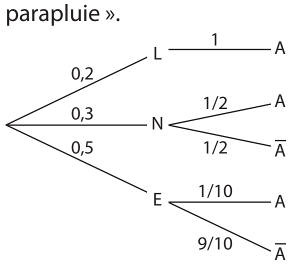
$P_{\overline{D}}(B) = \dfrac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0{,}5 \times 0{,}92}{0{,}9} = \dfrac{23}{45}$

$P_{\overline{D}}(C) = \dfrac{P(\overline{D} \cap C)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}9}{0{,}9} = \dfrac{2}{5}$

2. On remarque que $P_{\overline{D}}(C) = P(C) = 0{,}4$

D'où C et $\overline{D}$ sont indépendants d'où C et D sont indépendants.

31 Désignons par L, N, E et A les événements respectifs : « le temps est pluvieux », « le temps est nuageux », « le temps est ensoleillé », « Jules emporte son parapluie ».



1. $P(A) = 0{,}2 \times 1 + 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}4$

2. a. $P(N \cap A) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$

$P(N) \times P(A) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12 \neq 0{,}15$

N et A ne sont pas indépendants.

b. Avec l'aide d'un tableur ou après une mise en équation, en prenant pour inconnues $\alpha = P_N(A)$ et $\beta = P_N(A)$, on peut proposer, par exemple : $\alpha = 0,5$ et $\beta = 0,3$ ou encore $\alpha = 0,4$ et $b = 0,16$

32 **1.** On cherche $p = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$ car les événements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles. Même si l'énoncé ne le précise pas, il est raisonnable de penser que les sexes des enfants attendus dans les deux duchés sont indépendants. Ainsi A et B sont indépendants, de même que A et $\overline{B}$ et que $\overline{A}$ et B. D'où $p = P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2. • $P(A \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(C) = 1 - p = \frac{1}{2}$ d'où $P(A) \times P(C) = \frac{1}{4}$.

On a donc $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ et donc A et C sont indépendants.

• Il en est de même dans l'autre duché : B et C sont indépendants. En conclusion, A, B et C sont indépendants deux à deux.

3. $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4}$;

$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

L'égalité $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ est donc fausse, alors qu'on pourrait être tenté de prolonger à 3 la notion d'indépendance de 2 événements.

33 **a.** $P_A(\overline{A}) = 0$. Ce résultat découle d'un raisonnement logique : « sachant que A est réalisé, la probabilité que A ne se réalise pas est nulle ». On peut aussi écrire : $P_A(\overline{A}) = \frac{P(A \cap \overline{A})}{P(A)} = \frac{P(\varnothing)}{P(A)} = 0$.

b. Par l'une et l'autre des démarches suivies en a. On obtient $P_{A \cap B}(A) = 1$.

c. De même $P_B(A \cup B) = 1$ car la réalisation de B implique celle de $A \cup B$ (puisque $B \subset A \cup B$).

34 **a.** Si (1) est vraie, alors $A \cap B = \varnothing$ et donc $P(A \cap B) = 0$.

On ne peut donc avoir $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ puisque, par hypothèse, $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

(2) ne peut donc pas être vraie lorsque (1) est vraie.

b. Si (2) est vraie, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Comme $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a $P(A \cap B) \neq 0$. Il est donc impossible d'avoir $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire d'avoir (1) vraie.

35 • « La plupart des menteurs sont des oranges » signifie que la proportion d'orange chez les menteurs est supérieure à 50 %. Cela peut se traduire par : $P_M(O) > 0,5$.

• Par ailleurs, $P_O(M) = \frac{P(O \cap M)}{P(O)} = \frac{P(M)P_M(O)}{P(O)}$ d'où $\frac{P_M(O)}{P_O(M)} = \frac{P(O)}{P(M)} = \frac{0,9}{0,005} = 180$, ou encore

$P_M(O) = 180P_O(M)$.

•

$P_M(O)$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7
$P_O(M)$	0,0028	0,0031	0,0033	0,0036	0,0039
P(M)	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005

$P_M(O)$	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
$P_O(M)$	0,0042	0,0044	0,0047	0,0050	0,0053	0,0056
P(M)	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005

L'observation du tableau ci-dessus montre, sous l'hypothèse $P_M(O) > 0,5$ que l'on a $P_O(M) \leqslant P(M)$ tant que $P_M(O)$ ne dépasse pas 0,9.

En conclusion, l'affirmation « $P_M(O) > 0,5$ » de Monsieur Z ne peut pas permettre d'en déduire $P_O(M) > 0,5$, propos qui lui est pourtant prêté : « la plupart des oranges sont des menteurs ». On remarquera même que $P_O(M)$ peine à dépasser P(M).

Travail en autonomie

36 $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

37 $P_A(B) = \frac{0,05}{0,2} = \frac{1}{4}$; $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,1} = \frac{1}{2}$

38 $P(A \cap B) = P(A)P_B(A) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$

39 **1.** $P_A(B) \neq P(B)$: A et B ne sont pas indépendants.

2. « A et B indépendants » $\Leftrightarrow$ « $\overline{A}$ et B indépendants ».

Par négation, $\overline{A}$ et B ne sont donc pas indépendants.

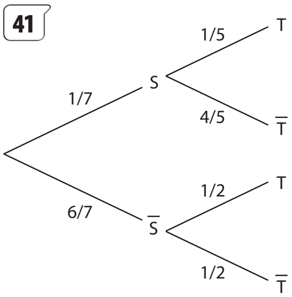
40 **a.** $I \cup M = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$; $P(I \cup M) = \frac{4}{6}$; **Faux**

b. $P_M(I) = \frac{1}{2}$; $P_I(M) = \frac{1}{3}$; **Vrai**

c. $I \cap M = \{3\}$; **Faux**

d. $P(I \cap M) = \frac{1}{6}$; $P(I) = \frac{1}{2}$; $P(M) = \frac{1}{3}$; **Vrai**

41



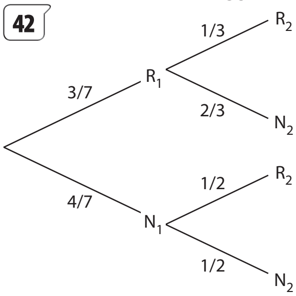
a. $P(S \cap T) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$; **Vrai**

b. Faux

c. $P_T(S) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{35}}{\frac{1}{35} + \frac{3}{7}} = \frac{1}{16}$; **Vrai**

d. $P_{\overline{T}}(S) = \frac{P(\overline{T} \cap S)}{P(\overline{T})} = \frac{\frac{4}{35}}{\frac{19}{35}} = \frac{4}{19}$; **Vrai**

42



$P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2}$; **Réponse c.**

43 $P_{N_1 \cup N_2}(N_2) = \frac{P(N_2 \cap (N_1 \cup N_2))}{P(N_1 \cup N_2)} = \frac{P(N_2)}{P(N_1 \cup N_2)}$

Or $P(N_2) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{7}$

$P(N_1 \cup N_2) = P(N_1) + P(N_2) - P(N_1 \cap N_2)$

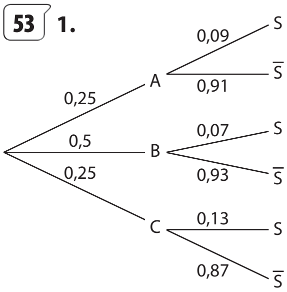
$= \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{7}$ d'où $P_{N_1 \cup N_2}(N_2) = \frac{2}{3}$; **Réponse d.**

44 **Faux** **45** **Faux** **46** **Faux** **47** **Vrai**

48 **Vrai** **49** **Faux** **50** **Vrai** **51** **Faux**

52 **Vrai**

53 **1.**



2. a. $P(A \cap S) = 0{,}25 \times 0{,}09 = 0{,}0225$

$P(B \cap S) = 0{,}5 \times 0{,}07 = 0{,}0350$

$P(C \cap S) = 0{,}25 \times 0{,}13 = 0{,}0325$

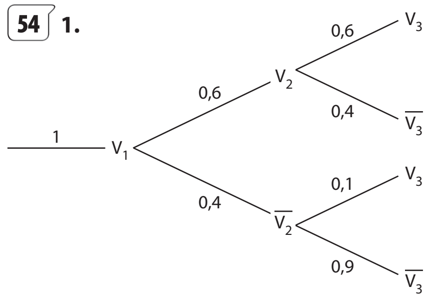
b. $P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = 0{,}09$

3. A et S sont indépendants car $P_A(S) = P(S)$

B et S ne sont pas indépendants. C et S non plus.

4. $P_{\overline{S}}(A) = \frac{P(\overline{S} \cap A)}{1 - P(S)} = 0{,}0625$

54 **1.**

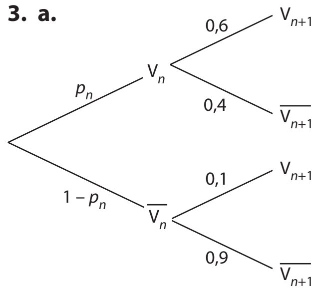


a. $P(A) = P(V_2 \cap V_3) = 0{,}6^2 = 0{,}36$

b. $P(B) = P(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}36$

2. $p_3 = P(V_3) = 0{,}6 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}4$

3. a.



b. $p_{n+1} = P(V_{n+1}) = 0{,}6p_n + 0{,}1(1 - p_n) = 0{,}5p_n + 0{,}1$

4. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}2 = 0{,}5p_n - 0{,}1$

$= 0{,}5(p_n - 0{,}2) = 0{,}5u_n$

(u_n) est donc géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = 0{,}8$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0{,}8 \times 0{,}5^{n-1}$;

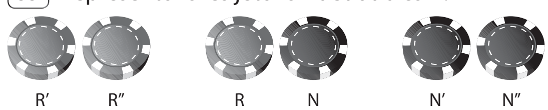
$p_n = 0{,}8 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}2$

c. $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}2$ car $0 < 0{,}5 < 1$

Au bout d'un nombre suffisamment grand de sondages, la probabilité de réaliser un sondage positif est très voisine de 0,2.

APPROFONDISSEMENT

55 Représentons les jetons « dédoublés » :



1. • P(jeton noir/1re face noire)

= P(2^e face noire/ 1re face noire)

$= \dfrac{P(1^{re} \text{ face noire et } 2^e \text{ face noire})}{P(1^{re} \text{ face noire})}$

$= \dfrac{P(\text{obtenir le jeton noir})}{P(\text{obtenir une } 1^{re} \text{ face noire})} = \dfrac{1/3}{3/6} = \dfrac{2}{3}$

• P(jeton bicolore/1re face noire)

= P(2^e face rouge/1re face noire)

$= \dfrac{P(1^{re} \text{ face noire et } 2^e \text{ face rouge})}{P(1^{re} \text{ face noire})}$

$= \dfrac{P(\text{tirer la face noire du jeton bicolore})}{P(1^{re} \text{ face noire})} = \dfrac{1/6}{3/6} = \dfrac{1}{3}$

• P(jeton rouge/1re face noire) = 0

Remarque 1 : le premier calcul donnant 2/3 était suffisant, car

$P_{1^{re} \text{ face noire}}(\text{jeton bicolore}) = 1 - P_{1^{re} \text{ face noire}}(\text{jeton noir})$

$= \dfrac{1}{3}$

Remarque 2 : sans utiliser la formule du conditionnement, on peut aussi restreindre l'univers des possibles aux trois faces noires (car la 1re face tirée est noire) et chercher le nombre de « secondes faces » favorables, c'est-à-dire noires. Or, il y en a deux : N′ et N″. La face N n'est pas favorable car la face associée est rouge. D'où la probabilité cherchée : 2/3

2. Algorithme

```
VARIABLES : d, n, tirage, k*
INITIALISATION : d = 0 ; n = 0
TRAITEMENT :
  Pour k de 1 à 2 500 Faire
  tirage = nombre aléatoire de [0 ; 1[
    Si tirage < 1/3 Alors d = d+1 ; n = n+1**
      Sinon    Si tirage < 2/3 Alors***
                  Si nombrealéatoire < ½ Alors
                  n = n+1****
                  FinSi
               FinSi
    FinSi
  FinPour
SORTIE : Afficher d/n
```

* // d : nombre d'issues (N, N) et n nombre d'issues commençant par N

** //tirage du jeton noir

*** //tirage du jeton bicolore

**** // tirage de la face noire en premier

```
▼ VARIABLES
  ├d EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├n EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├tirage EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├k EST_DU_TYPE NOMBRE
  └freq EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├d PREND_LA_VALEUR 0
  ├n PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ POUR k ALLANT_DE 1 A 2500
    ├DEBUT_POUR
    ├tirage PREND_LA_VALEUR random()
    ▼ SI (tirage<1/3) ALORS
      ├DEBUT_SI
      ├d PREND_LA_VALEUR d+1
      ├n PREND_LA_VALEUR n+1
      ├FIN_SI
      ▼ SINON
        ├DEBUT_SINON
        ▼ SI (tirage<2/3) ALORS
          ├DEBUT_SI
          ▼ SI (random()<1/2) ALORS
            ├DEBUT_SI
            ├n PREND_LA_VALEUR n+1
            └FIN_SI
          └FIN_SI
        └FIN_SINON
    └FIN_POUR
  ├freq PREND_LA_VALEUR d/n
  └AFFICHER freq
└FIN_ALGORITHME
```

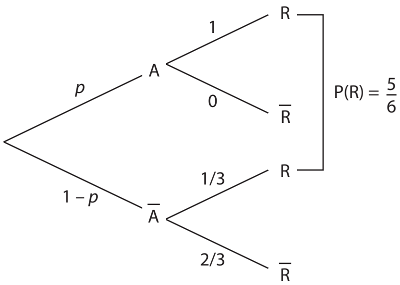
Quelques résultats obtenus :

```
***Algorithme lancé***
0.66481775
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
0.65942591
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
0.65743671
***Algorithme terminé***
```

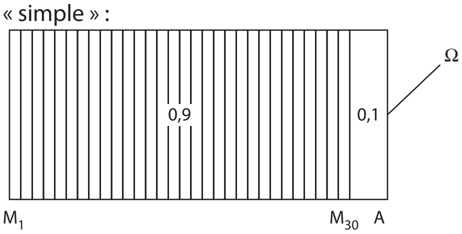
56 Soit A : « Zoé est absente de chez elle » et R : « On tombe sur le répondeur ». On pose P(A) = *p*.



1. $P(R) = \dfrac{5}{6}$ équivaut à $p + \dfrac{1}{3}(1 - p) = \dfrac{5}{6}$ d'où $p = \dfrac{3}{4}$.

2. $P_R(\overline{A}) = \dfrac{P(R \cap \overline{A})}{P(R)} = \dfrac{1/4 \times 1/3}{5/6} = \dfrac{1}{10}$

57 Un schéma peut aider à trouver une solution « simple » :



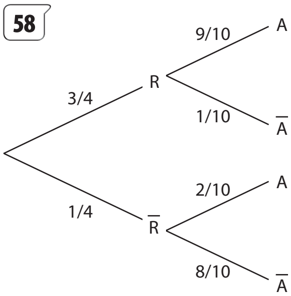
L'univers des possibles Ω est la réunion des événements M_1, M_2, … , M_{30} et A où M_k désigne « le malfaiteur est dans la maison k » et A désigne « le malfaiteur est ailleurs ».

Mais comme on sait que le malfaiteur ne se trouve pas dans les 29 premières maisons fouillées, notre univers se restreint à $\Omega' = M_{30} \cup A$. La probabilité cherchée est donc $p = \dfrac{P(M_{30})}{P(M_{30} \cup A)}$ or, si le malfaiteur s'est réfugié dans l'une des maisons, c'est au hasard qu'il l'a fait.

D'où $P(M_k) = \dfrac{0,9}{30} = 0,03$. De plus, $P(A) = 1 - 0,9 = 0,1$.

D'où $p = \dfrac{0,03}{0,03 + 0,1} = \dfrac{3}{13}$.

58



1. a. $P(R \cap A) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{27}{40}$

b. $P(\overline{R} \cap A) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{20}$

c. $P(\overline{R} \cap \overline{A}) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{8}{10} = \dfrac{1}{5}$

d. $P(A) = P(R \cap A) + P(\overline{R} \cap A) = \dfrac{27}{40} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{29}{40}$

e. $P_{\overline{A}}(R) = \dfrac{P(\overline{R} \cap A)}{P(\overline{A})} = \dfrac{3/4 \times 1/10}{1 - 29/40} = \dfrac{3/40}{11/40} = \dfrac{3}{11}$

2. a. $P(M) = P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap \overline{R}) = \dfrac{27}{40} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{8}$

b. $P_A(M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap R)}{P(A)} = \dfrac{27/40}{29/40} = \dfrac{27}{29}$

c. $P_M(A) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)} = \dfrac{27/40}{7/8} = \dfrac{27}{35}$

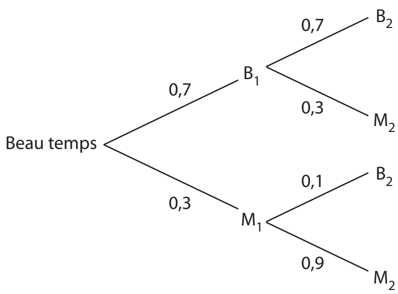
d. $P_{\overline{M}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{P(A \cap \overline{R})}{P(\overline{M})} = \dfrac{1/20}{1/8} = \dfrac{2}{5}$

Comparons $P_M(A) = \dfrac{27}{35} \approx 0,771$ et $P(A) = \dfrac{29}{40} = 0,725$.

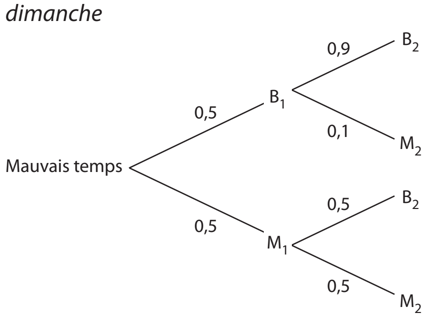
Ayant $P_M(A) > P(A)$, on peut dire que la probabilité d'être admis est supérieure quand on prélève au hasard un candidat menteur, que lorsqu'on prélève un candidat quelconque (c'est-à-dire dont on ne sait rien). La formule proposée en est un raccourci, acceptable ou non, selon le sens qu'on lui donne.

59 Notons B et M les événements « il fait beau temps » et « il fait mauvais temps ».

Évolution du temps à Saint-Malo entre vendredi et dimanche



Évolution du temps à Saint-Tropez entre vendredi et dimanche



1. À Saint-Malo : $P(B_1 \cap B_2) = 0,7 \times 0,7 = 0,49$

À Saint-Tropez : $P(B_1 \cap B_2) = 0,5 \times 0,9 = 0,45$

2. À Saint-Malo : $P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(M_1 \cap M_2)$
$= 0,7 \times 0,7 + 0,3 \times 0,1 = 0,52$

À Saint-Tropez : $P(B_2) = 0,5 \times 0,9 + 0,5 \times 0,5 = 0,70$

3. À Saint-Malo : $P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2)$
$= 0,7 + 0,52 - 0,49 = 0,73$

À Saint-Tropez : une autre démarche que la précédente est possible.

$P(B_1 \cup B_2) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$

Globalement, Paul et Léa peuvent être tentés de choisir la destination Saint-Tropez, à moins que l'objectif de connaître deux jours de beau temps soit le seul critère retenu.

60 **1. a.** Chaque parent de A doit avoir pour génotype Lv pour concilier :

– le fait d'avoir des ailes longues (vv exclu)

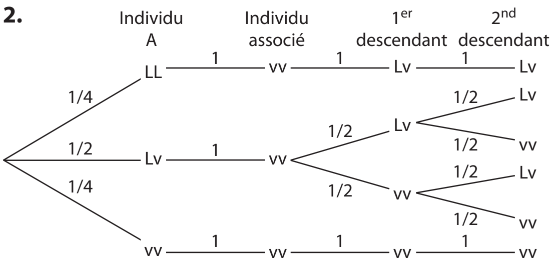
– le fait d'avoir des descendants, ailes vestigiales (LL exclu).

b. $P(\text{A a des ailes longues}) = P(\{(L, L) ; (L, v) ; (v, L)\})$

$$= 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Note : (L, v) signifie « le mâle a transmis l'allèle L, la femelle a transmis l'allèle v ».

2.



a. $P(1^{er} \text{ descendant vv}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b. $P(2^{nd} \text{ descendant vv sachant } 1^{er} \text{ descendant Lv})$

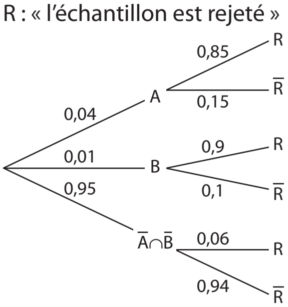
$$= \frac{P(1^{er} \text{ descendant Lv et } 2^{nd} \text{ descendant vv})}{P(1^{er} \text{ descendant Lv})}$$

$$= \frac{1/2 \times 1/2 \times 1/2}{1 - 1/2} = \frac{1}{4}$$

61 Notons A : « le virus de l'hépatite A est présent »

B : « le virus de l'hépatite B est présent »

R : « l'échantillon est rejeté »



1. $P(\overline{R}) = 0{,}04 \times 0{,}15 + 0{,}01 \times 0{,}1 + 0{,}95 \times 0{,}94 = 0{,}9$

2. $P_{\overline{R}}(A \cup B) = P_{\overline{R}}(A) + P_{\overline{R}}(B)$ car A et B sont des événements incompatibles.

$$P_{\overline{R}}(A \cup B) = \frac{P(\overline{R} \cap A)}{P(\overline{R})} + \frac{P(\overline{R} \cap B)}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}006}{0{,}9} + \frac{0{,}001}{0{,}9}$$

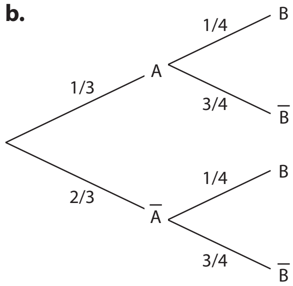
$$= \frac{7}{900} \approx 0{,}0078$$

3. $P_R(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{P(R \cap \overline{A} \cap \overline{B})}{P(R)} = \frac{0{,}95 \times 0{,}06}{0{,}1} = 0{,}57$

62 **1.** Non, car $P_{\overline{A}}(B)$ ne peut pas être calculée avec les indications fournies.

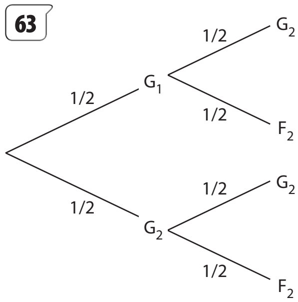
2. a. $P_A(B) = \frac{1}{4}$ et $P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\alpha$. A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ c'est-à-dire $\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\alpha = \frac{1}{4}$, soit $\alpha = \frac{1}{4}$.

b.



3. On lance un dé cubique et un dé tétraédrique, tous deux supposés bien équilibrés. On s'intéresse aux événements : A « le décubique amène 5 ou 6 » et B « le dé tétraédrique amène le 1 ».

63



A. 1. a. $P_{G_1}(G_1 \cap G_2) = \frac{P(G_1 \cap (G_1 \cap G_2))}{P_{G_1}}$

$$= \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P_{G_1}} = \frac{1/2 \times 1/2}{1/2} = \frac{1}{2}$$

b. $P_{G_1 \cup G_2}(G_1 \cap G_2) = \frac{P((G_1 \cup G_2)(G_1 \cap G_2))}{P(G_1 \cup G_2)}$

$$= \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1 \cup G_2)}$$

Or, $P(G_1 \cap G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et

$P(G_1 \cup G_2) = P(G_1) + P(G_2) - P(G_1 \cap G_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}$. D'où $P_{G_1 \cup G_2}(G_1 \cap G_2) = \frac{1}{3}$.

2. a. $P(M) = P(G_1 \cap F_2) + P(G_2 \cap F_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(F) = 1 - P(F_1 \cap F_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(M \cap F) = P(M) = \dfrac{1}{2}$

b. $P(M \cap F) \neq P(M) \times P(F)$ d'où M et F ne sont pas indépendants.

B. 1. $P(M) = 1 - P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) - P(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$

$= 1 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4}$

$P(F) = P(0 \text{ fille}) + P(1 \text{ fille}) = \dfrac{1}{8} + 3 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$

$P(M \cap F) = P(1 \text{ fille et } 2 \text{ garçons}) = \dfrac{3}{8}$

On a $P(M \cap F) = P(M) \times P(F)$ d'où M et F sont indépendants.

2. L'indépendance de deux événements n'est pas une notion intrinsèque de ces événements. Cette notion dépend de la loi de probabilité utilisée. Il faut donc toujours préciser : « événements indépendants ou non indépendants relativement à la probabilité P ».

64 $P_n(A) = P_n(0 \text{ face}) + P_n(1 \text{ face}) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$= \dfrac{n+1}{2^n}$

$P_n(B) = P_n(\text{on obtient ni « } n \textit{ pile} \text{ » ni « } n \text{ face »})$

$= 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{2^n - 2}{2^n}$

$P_n(A \cap B) = P(1 \text{ face et } (n-1) \text{pile}) = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n}{2^n}$

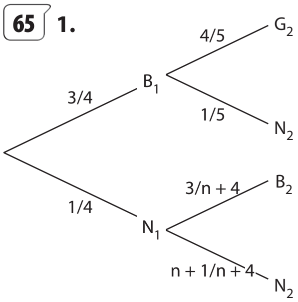
On a : $P_n(A \cap B) = P_n(A) \times P_n(B)$ lorsque $\dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n+1}{2^n} \times \dfrac{2^n - 2}{2^n}$ soit $n \times 2^n = (n+1) \times (2^n - 2)$ soit $2^n = 2n + 2$ ou encore $2^{n-1} = n + 1$.

• Pour $n \geqslant 2$, on remarque que l'égalité $2^{n-1} = n + 1$ n'est pas vérifiée lorsque $n = 2$, mais elle l'est lorsque $n = 3$.

• Pour $n \geqslant 4$, on peut prouver par une démonstration par récurrence que $2^{n-1} > n + 1$.

En conclusion, l'égalité n'est donc vérifiée que pour $n = 3$.

65 **1.**



2. a. $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{4}{5}$; $P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{5}$

b. $P(B_2) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{4(n+4)} = \dfrac{12n + 63}{20(n+4)}$

c. B_1 et B_2 sont indépendants si $P_{B_1}(B_2) = P(B_2)$, c'est-à-dire si $\dfrac{4}{5} = \dfrac{12n + 63}{20(n+4)}$ soit $4n = -1$.

Il n'existe aucune valeur de n telle que B_1 et B_2 soient indépendants.

3. a. $P_{B_1}(D) = P_{B_1}(N_2) = \dfrac{1}{5}$

b. $P(D) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{20} + \dfrac{3}{4(n+4)}$

$= \dfrac{3n + 27}{20(n+4)}$

c. On cherche n tel que $P_{B_1}(D) = P(D)$ soit $n = 11$. B_1 et D sont indépendants lorsque $n = 11$.

PROBLÈMES

66 **A.** • L'instruction conditionnelle correspondant à la cellule C3 amène l'affichage de A lorsque le nombre aléatoire « ALEA() » est inférieur à 0,5, l'affichage de B lorsque « ALEA() » est compris entre 0,5 et 0,75, l'affichage de C lorsque « ALEA() » est supérieur à 0,75. Le nombre « ALEA() » étant distribué uniformément dans [0 ,1[, on obtient donc A, B et C avec les probabilités 0,5 ; 0,25 et 0,25.

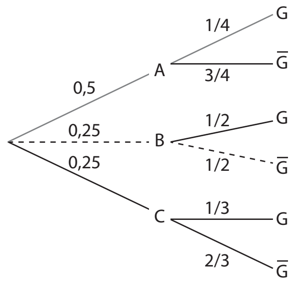
• L'instruction conditionnelle correspondant à la cellule D3 fait afficher 1 : avec la probabilité 1/4 lorsque A figure à sa gauche, avec la probabilité 1/2 lorsque B figure à sa gauche, avec la probabilité 1/3 lorsque C figure à sa gauche. Sinon, c'est 0 qui s'affiche.

• La formule de la cellule G2 donne la fréquence de A1 (le joueur gagne contre A) relative aux parties jouées contre A.

B. 1. a. $u = P(A) = 0,5$; $v = P(B) = 0,25$;

$w = P_A(G) = \dfrac{1}{4}$; $x = P_B(G) = \dfrac{1}{2}$; $y = P_C(G) = \dfrac{1}{3}$.

b. Le second arbre peut être complété à l'aide des données.



2. a. L'événement $A \cap G$ est représenté par le chemin gris. L'événement $B \cap \overline{G}$ est représenté par le chemin pointillé.

$$P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

$$P(B \cap \overline{G}) = P(B) \times P_B(\overline{G}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

b. $P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G)$

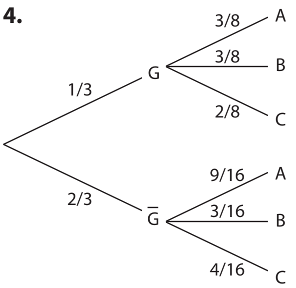
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

La fréquence de G calculée sur un échantillon de taille 10 000, en partie A est 0,335. Cette fréquence est très proche de la probabilité calculée : $\frac{1}{3}$

3. $P_A(G) \neq P(G)$; $P_B(G) \neq P(G)$; $P_C(G) \neq P(G)$

C et G sont indépendants relativement à P ; ce n'est pas le cas de A et G, ni de B et G.

4.



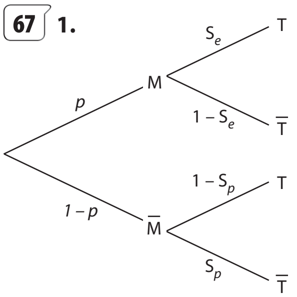
$$P_G(A) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{1/8}{1/3} = \frac{3}{8};$$

$$P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{1/8}{1/3} = \frac{3}{8}$$

$$P_{\overline{G}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{1/2 \times 3/4}{1 - 1/3} = \frac{9}{16};$$

$$P_{\overline{G}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{1/4 \times 1/2}{1 - 1/3} = \frac{3}{16}$$

67 **1.**



2. a. $P(M \cap T) = pSe$; $P(M \cap \overline{T}) = p(1 - Se)$;

$P(\overline{M} \cap T) = (1 - p)(1 - Sp)$; $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = (1 - p)Sp$

b. $P(\text{juste conclusion}) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap \overline{T})$

$$= pSe + (1 - p)Sp = p(Se - Sp) + Sp$$

3. a. $P(T) = pSe + (1 - p)(1 - Sp)$

b. $VPP = P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{pSe}{pSe + (1 - p)(1 - Sp)}$

$$VPN = P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{M})}{P(\overline{T})} = \frac{(1 - p)Se}{p(1 - Se) + (1 - p)Sp}$$

c. $VPP > p$ équivaut à $Se > pSe + (1 - p)(1 - Sp)$

soit $Se > 1 - Sp$ ou $Se + Sp > 1$

4. a. $VPP(\text{Afrique}) = \dfrac{0{,}9 \times 0{,}95}{0{,}9 \times 0{,}95 + 0{,}1 \times 0{,}15} \approx 0{,}983$

$$VPP(\text{France}) = \frac{0{,}001 \times 0{,}95}{0{,}001 \times 0{,}95 + 0{,}999 \times 0{,}15} \approx 0{,}006$$

$$VPN(\text{Afrique}) = \frac{0{,}1 \times 0{,}85}{0{,}9 \times 0{,}05 + 0{,}1 \times 0{,}85} \approx 0{,}654$$

$$VPN(\text{France}) = \frac{0{,}999 \times 0{,}85}{0{,}001 \times 0{,}05 + 0{,}999 \times 0{,}85} \approx 1$$

b. • À un patient africain

– dont le test est positif :

« vous avez 98 % de « chances » d'être malade »

– dont le test est négatif :

« vous avez 65 % de « chances » de ne pas être malade »

• À un patient français

– dont le test est positif :

« vous avez 0,6 % de « chances » d'être malade »

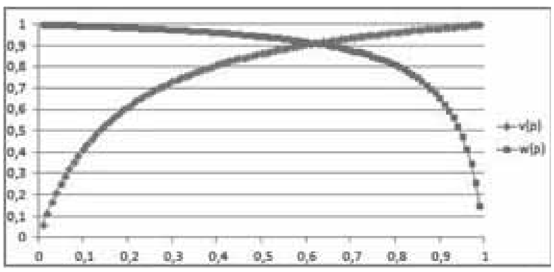
– dont le test est négatif :

« vous avez la quasi-certitude de ne pas être malade »

5. a. $v(p) = \dfrac{0{,}95p}{0{,}95p + 0{,}15(1 - p)} = \dfrac{19p}{16p + 3}$

$$w(p) = \frac{0{,}85(1 - p)}{0{,}05p + 0{,}85(1 - p)} = \frac{17(1 - p)}{17 - 16p}$$

b.



6. a. Se et Sp ne dépendent pas de p. VPP augmente et VPN diminue lorsque p augmente.

b. Lorsque p n'est pas trop faible, $P_T(M)$ est nettement supérieur à $P(M) = p$. Un test positif rend donc beaucoup plus probable la présence de la maladie.

c. $RV = \dfrac{P_M(T)}{P_{\overline{M}}(T)}$ indique combien de fois le patient a plus de chance d'avoir le test positif s'il est atteint par la maladie que dans le cas contraire. Ce rapport ne dépend pas de p. Pour le test étudié, il vaut environ 6,3.

d. Pour une maladie rare, un test de dépistage systématique de toute une population a l'inconvénient de fournir beaucoup de faux positifs (personnes non malades ayant un test positif) et donc de susciter beaucoup d'inquiétude.

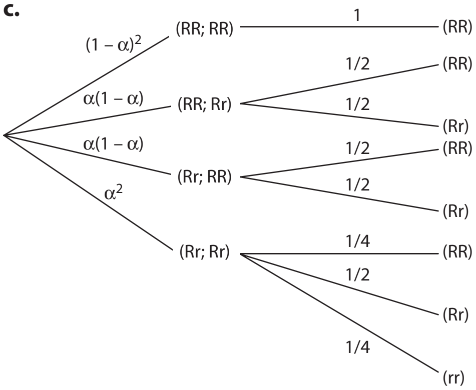
68 **1. a.**

Couple de parents	Probabilité
(RR ; RR)	$(1-\alpha)^2$
(RR ; Rr)	$\alpha(1-\alpha)$
(Rr ; RR)	$\alpha(1-\alpha)$
(Rr ; Rr)	α^2

b.

	Probabilité que l'enfant soit		
Sachant que le couple de parents est	**RR**	**Rr**	**rr**
(RR ; RR)	1	0	0
(RR ; Rr)	1/2	1/2	0
(Rr ; RR)	1/2	1/2	0
(Rr ; Rr)	1/4	1/2	1/4

c.



$$P(RR) = 1(1-\alpha)^2 + \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha) + \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha) + \frac{1}{4}\alpha^2$$

$$= (1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha) + \frac{1}{4}\alpha^2 = \left(1-\alpha+\frac{1}{2}\alpha\right)^2 = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$P(Rr) = \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha) + \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha) + \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha(1-\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$P(rr) = \frac{1}{4}\alpha^2$$

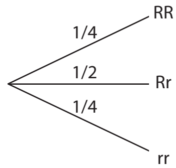
Vérification : $P(RR) + P(Rr) + P(rr) = 1$

d. $\beta = P_{\overline{rr}}(\text{Rr ou rr}) = \dfrac{P(Rr)}{1-P(rr)} = \dfrac{\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{4}}$

$$= \frac{\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Comme $\alpha > 0$ et $1+\dfrac{\alpha}{2} > 1$, $\beta < \alpha$. La probabilité qu'un adulte soit porteur du gène r diminue d'une génération à la suivante.

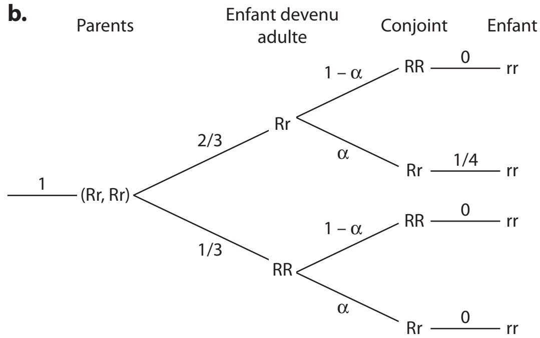
2. a. Chaque parent de cet adulte avait nécessairement le génotype Rr. Or, pour un couple (Rr, Rr), les génotypes des enfants se distribuent ainsi :



Les enfants rr n'étant pas viables, l'adulte ne peut avoir le génotype rr. On calcule donc

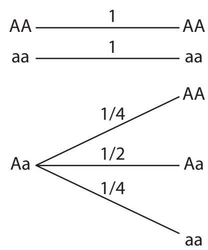
$$P_{\overline{rr}}(Rr) = \frac{P(Rr)}{1-P(rr)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

b.

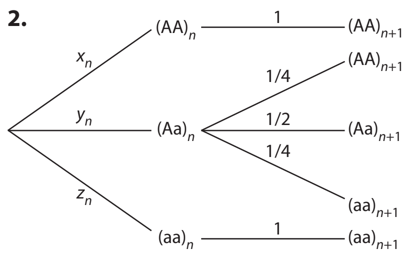


$$P(\text{enfant rr}) = 1 \times \frac{2}{3} \times \alpha \times \frac{1}{4} = \frac{\alpha}{6}$$

69 **1.**



2.



a. $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $z_0 = 0$

b. $x_1 = \dfrac{1}{4}$; $y_1 = \dfrac{1}{2}$; $z_1 = \dfrac{1}{4}$

c. D'après l'arbre : $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{4}y_n$; $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}y_n$

d. $z_{n+1} = \dfrac{1}{4}y_n + z_n$

3. a. La suite (y_n) est géométrique de 1[er] terme $y_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. D'après (1) : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{4}y_k$.

D'où : pour $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1} y_k$.

c. D'où : pour $n \geqslant 1$, $x_n - x_0 = \frac{1}{4}\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$x_n = x_0 + \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

d. Les suites (x_n) et (z_n) ont le même premier terme $x_0 = z_0 = 0$ et sont définies par la même relation de récurrence : $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n$; $z_{n+1} = z_n + \frac{1}{4}y_n$. On en déduit $x_n = z_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. a. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 + 0{,}5 = 0{,}5$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0 + 0{,}5 = 0{,}5$

b. Par autogamie, à la $n^{\text{ième}}$ génération avec n très grand, la répartition des génotypes sera très proche de celle-ci :

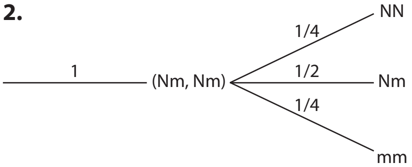
AA	Aa	aa
0,5	0	0,5

70 **1. a.** Les deux personnes affectées ont chacune le génotype mm.

b. Pour permettre à la fois une descendance de génotype mm et de génotype non mm, les quatre parents ont chacun le génotype Nm.

c. Les génotypes possibles de l'homme et de la femme de ce couple sont NN et Nm.

2.



a. $P(\text{Nm}) = \frac{1}{4}$

b. $P_{\overline{\text{mm}}}(\text{Nm}) = \dfrac{P(\text{Nm})}{1 - P(\text{mm})} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

3. P(père Nm sachant $\overline{\text{mm}}$ **et** mère Nm sachant $\overline{\text{mm}}$ **et** enfant mm) $= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{9}$.

71 **A. 1.**

Algorithme :

Tirer au hasard x entre 1 et 2 //tirage de la position de départ

Affecter 0 à n //n comptera le nombre de sauts

Tant que ($x \neq 0$ et $x \neq 4$) Faire

```
    Tirer un nombre aléatoire entre 0 et 1.
        Si il est inférieur à 2/3 affecter x + 1 à x
        Sinon affecter x – 1 à x
        FinSi
    Affecter n+1 à n
FinTant que
```

Afficher « Arrivée en : », x

Afficher « en », n, « sauts »

```
Tirer au hasard x entre 1 et 2   //tirage de la position de départ
Affecter 0 à n                   //n comptera le nombre de sauts
Tant que (x ≠ 0 et x ≠ 4) Faire
        Tirer un nombre aléatoire entre 0 et 1.
            Si il est inférieur à 2/3 affecter x + 1 à x
            Sinon affecter x – 1 à x
            FinSi
        Affecter n+1 à n
FinTant que
Afficher « Arrivée en : », x
Afficher « en », n, « sauts »
```

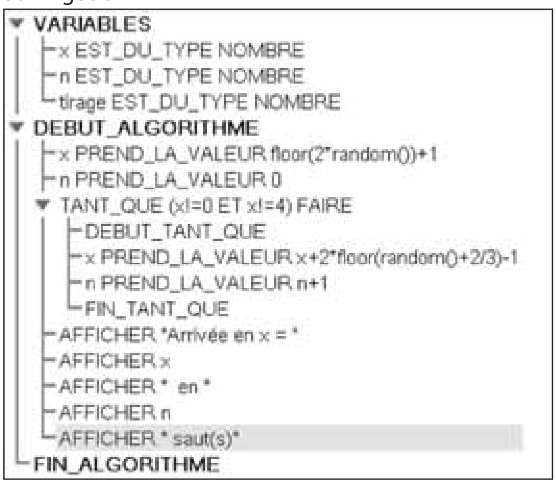
Remarque : à l'aide de la question 2. a. on peut remplacer les instructions figurant dans la partie encadrée par la seule instruction ci-dessous :

Affecter à x la valeur x + 2*ent(alea()+2/3)–1

puisque x + 2*ent(alea()+2/3)–1 est égal à x + 1 avec la probabilité 2/3 et à x – 1 avec la probabilité 1/3.

2. a. Voir les fichiers sur le site didiermathx.com

Sur AlgoBox


```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  tirage EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x PREND_LA_VALEUR floor(2*random())+1
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (x!=0 ET x!=4) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    x PREND_LA_VALEUR x+2*floor(random()+2/3)-1
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Arrivée en x = "
  AFFICHER x
  AFFICHER " en "
  AFFICHER n
  AFFICHER " saut(s)"
FIN_ALGORITHME
```

b. On obtient par exemple sur 10 simulations :
Arrivée en x = 4 en 2 sauts
Arrivée en x = 0 en 7 sauts
Arrivée en x = 4 en 4 sauts
Arrivée en x = 4 en 16 sauts
Arrivée en x = 4 en 2 sauts
Arrivée en x = 0 en 4 sauts
Arrivée en x = 4 en 4 sauts
Arrivée en x = 4 en 4 sauts
Arrivée en x = 4 en 2 sauts
Arrivée en x = 4 en 3 sauts

B. I. 1. a. $U_0 = 1 ; U_4 = 0$

b. Pour $0 < N < 4$: P(le mobile part de N et s'arrête en 0) = P(le mobile va en $N - 1$ **et** partant de $N - 1$ s'arrête en 0) + P(le mobile va en $N + 1$ **et** partant de $N + 1$ s'arrête en 0).

Cela se traduit par : $U_N = \frac{1}{3}U_{N-1} + \frac{2}{3}U_{N+1}$

2. a. On cherche q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$q^n = \frac{2}{3}q^{n+1} + \frac{1}{3}q^{n-1}$ soit $q^{n-1}\left(\frac{2}{3}q^2 - q + \frac{1}{3}\right) = 0$

soit $2q^2 - 3q + 1 = 0$ car $q \neq 0$ soit $q = 1$ ou soit $q = \frac{1}{2}$

Il existe donc deux suites de la forme (q^n) satisfaisant (1) ; ce sont (1) et $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. On admet que $U_N = \frac{k}{2^N} + k'$; k et k' réels.

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + k' = 1 \\ \frac{k}{16} + k' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{16}{15} \\ k' = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

D'où $U_N = \frac{16}{15} \times \frac{1}{2^N} - \frac{1}{15}$, pour $0 \leqslant N \leqslant 4$.

II. De même que dans la question I :

$V_0 = 0 ; V_4 = 1 ; V_N = \frac{1}{3}V_{N-1} + \frac{2}{3}V_{N+1}$

$V_N = \frac{l}{2^N} + l'$; l et l' réels.

$V_0 = 0$ et $V_4 = 1$ donnent $l = -\frac{16}{15}$ et $l' = \frac{16}{15}$

$V_N = -\frac{16}{15} \times \frac{1}{2^N} + \frac{16}{15}$

III. $U_N + V_N = 1$. La probabilité que le processus soit sans fin est donc nulle. Bel exemple d'un événement non impossible de probabilité nulle.

72 On prélève au hasard une personne dans la population concernée, en début d'année. On considère les événements :

J : « la personne est un jeune de 18 à 24 ans »

T : « la personne est tuée sur la route dans l'année »

Posons $P(T) = p$. En traduisant les données, on a :

$P(J) = 0,09 ; P_T(J) = 0,22$.

D'où $P(J \cap T) = P(T)P_T(J) = 0,22p$.

Mais $P(J \cap T) = P(J)P_J(T) = 0,09P_J(T)$

d'où $P_J(T) = \frac{0,22p}{0,09} = \frac{22}{9}p$

Par ailleurs, $P(T) = P(T \cap J) + P(T \cap \bar{J})$

et donc $P(T \cap \bar{J}) = p - 0,22p = 0,78p$

D'où $P_{\bar{J}}(T) = \frac{P(T \cap \bar{J})}{P(\bar{J})} = \frac{0,78p}{1 - 0,09} = \frac{78}{91}p$

Le quotient $\frac{P_J(T)}{P_{\bar{J}}(T)} = \frac{\frac{22}{9}p}{\frac{78}{91}p} = \frac{22}{9} \times \frac{91}{78} \approx 2,85.$

La probabilité d'être tué sur la route est donc 2,85 fois plus grande pour un jeune que pour un non-jeune de cette tranche d'âge.

73 Soit les événements : A « le tableau est VRAI », E « le 1re expert dit VRAI et le second dit COPIE ».

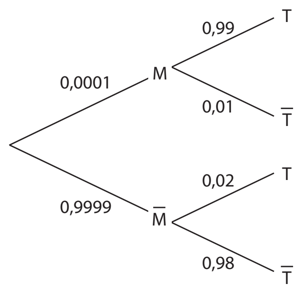
On a : $P(A) = 0,8 = \frac{4}{5}$; $P_A(E) = \frac{10}{11} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{33}$;

$P_{\bar{A}}(E) = \frac{1}{11} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{66}$

On cherche : $P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P_A(E)P(A)}{P_A(E)P(A) + P_{\bar{A}}(E)P(\bar{A})}$

d'où $P_E(A) = \frac{8}{9}$.

74 Soit M et T les événements : « la personne prélevée au hasard est malade » et « son test est positif ».



On connaît :

– la prévalence de la maladie : 10^{-4}
– la sensibilité du test : $Se = 0,99$
– la spécificité du test : $Sp = 0,98$

On peut calculer :

– le rapport de vraisemblance du test :

$RV = \frac{P_M(T)}{P_{\bar{M}}(T)} = 49,5$

– $P(T) \approx 0,0201$
– la valeur prédictive positive du test :

$VPP = P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \approx 0,0049$

– la valeur prédictive négative du test :

$VPN = P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} \approx 0,9999$

Si le directeur de cabinet tient compte de la valeur VPP $\approx 0{,}005$, il peut interdire la commercialisation du test : chez les personnes ayant un test positif, une personne sur 200 est malade ! Ce test crée beaucoup de « faux positifs ».

Si le directeur de cabinet observe en priorité RV $= 49{,}5$, il pourra retenir que le test a environ 50 fois plus de chance d'être positif pour un malade que pour un non-malade, ce qui est à prendre en compte dans le processus diagnostique.

75 **2.**

3. Soit les événements :

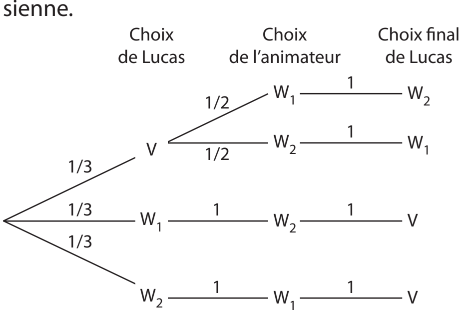
V : « derrière la porte choisie se trouve la voiture »

W_1 : « derrière la porte 1 ne se trouve rien »

W_2 : « derrière la porte 2 ne se trouve rien »

Stratégie 1 : Lucas choisit une porte au hasard et ne change pas de porte ensuite. $P(V) = \dfrac{1}{3}$

Stratégie 2 : Lucas choisit une porte au hasard puis change de porte après que l'animateur a ouvert la sienne.



$P(V) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Conclusion : Lucas a intérêt à changer de porte.

76 $P(A \cap B \cap C) = P(\{8\}) = \dfrac{1}{8}$;

$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$;

$P(A \cap B) = P(\{2\ ;\ 8\}) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$;

$P(B \cap C) = P(\{3\ ;8\}) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$;

$P(C \cap A) = P(\{8\}) = \dfrac{1}{8}$.

On a : $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$; $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ mais l'égalité $P(C \cap A) = P(C)P(A)$ n'est pas vérifiée.

Conclusion : A et B sont indépendants. B et C sont indépendants. C et A ne sont pas indépendants. A, B et C ne sont pas « mutuellement indépendants ».

77 **1. a.**

	B	$\overline{B}$
A	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

Les cases correspondant à $A \cup B$ étant grisées, on observe que $A \cup B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont complémentaires dans Ω. D'où : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b.

	B	$\overline{B}$
A	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

Les cases correspondant à $\overline{A} \cup \overline{B}$ sont grisées : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

c. $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$; $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$

2. a.

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B))$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

b. $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Mais on ne peut en déduire $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, qui est cependant vrai (établi en question 1).

Accompagnement personnalisé

1 Exploiter un énoncé

1. (1) $P(S) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$; (2) $P(E) = P(T)$;

(3) $P(E \cap \overline{C}) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$; (4) $P_T(C) = \dfrac{2}{3}$; $P_C(S) = \dfrac{1}{2}$.

2.

Série / Programme	E	T	S	Total
C	0,1	0,2	0,3	0,6
$\overline{C}$	0,2	0,1	0,1	0,4
Total	0,3	0,3	0,4	1

3. a. $P(C) = 0{,}6$ **b.** $P(S \cap C) = 0{,}3$

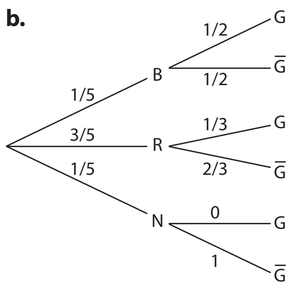
c. $P_E(C) = \dfrac{1}{3}$ **d.** $P_S(C) = \dfrac{3}{4}$

e. $P_C(T) = \dfrac{1}{3}$ **f.** $P_{\overline{S}}(C) = \dfrac{1}{2}$

2 Construire et utiliser un arbre de probabilité

1. a. $\alpha = P(B)$; $\beta = P(R)$; $\gamma = P(N)$; $p = P_B(G)$; $q = P_B(\overline{G})$; $r = P_R(G)$; $s = P_R(\overline{G})$; $t = P_N(G)$; $u = P_N(\overline{G})$.

b.



2. a. $P(R \cap G) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5}$

b. $P(B \cap G) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10}$; $P(N \cap G) = 0$;

$P(G) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{10}$; $P(\overline{G}) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$

3. $P_G(B) = \dfrac{P(B \cap G)}{P(G)} = \dfrac{1/10}{3/10} = \dfrac{1}{3}$

(3) Utiliser des formules de calcul sur les probabilités

1. $P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$;

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}4.$

2. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$;

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}2$;

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}8} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375.$

3. $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}8$;

$P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}5.$

4. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$;

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$;

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6.$

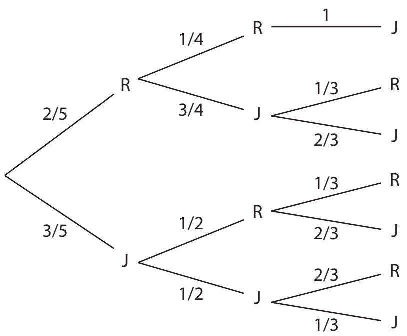
CHAPITRE 13

Lois à densité

Pour reprendre contact

1 Avec les variables aléatoires

A. 1. On peut illustrer la situation par un arbre de probabilité.



X prend les valeurs 0, 1 et 2. $P(X=0) = P(\text{3 boules jaunes}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$.

$P(X=1) = P(\text{1 rouge et 2 jaunes}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 1 + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$.

En résumé :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

2. $E(X) = 1{,}2$; $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1{,}8 - 1{,}44 = 0{,}36$; $\sigma(X) = 0{,}6$.

Comme on a : $Y = 4X$, on déduit : $E(Y) = 4E(X) = 4{,}8$; $V(Y) = 16V(X) = 5{,}76$; $\sigma(Y) = 4\sigma(X) = 2{,}4$.

B. 1. On répète ici 3 fois le tirage d'une boule dans l'urne, avec remise.

X, qui compte le nombre de « succès » (boule rouge), suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3\,;\frac{2}{5}\right)$.

2. $E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$; $V(X) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{25} = 0{,}72$; $\sigma(X) = \sqrt{0{,}72} \approx 0{,}85$.

Ayant à nouveau $Y = 4X$, on obtient : $E(Y) = 4{,}8$; $V(Y) = 11{,}52$; $\sigma(Y) \approx 3{,}39$.

② Avec les intégrales et les aires

1. a. $\mathscr{A}_1 = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx$.

Par symétrie par rapport à Δ, on a : $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}'_1$ avec $\mathscr{A}'_1 = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Par conséquent $\mathscr{A}_1 = \frac{1}{6}$ u.a.

b. $\mathscr{A}_2 = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ u.a. $\mathscr{A}_3$ = demi aire carré $- \mathscr{A}_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ u.a. $\mathscr{A}_4 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ u.a.

2. a. $\mathscr{A}(n) = \int_0^n e^{-0,5x}\, dx = \left[-2e^{-0,5x}\right]_0^n = 2 - 2e^{-0,5n}$.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathscr{A}(n) = 2$. L'aire du domaine « illimité » situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est égale à 2 unités d'aire.

③ Avec les diagrammes

1. $P(X = 24) \approx 0,18$; $P(X = 29) \approx 0,01$.

2. La réponse est clairement $p = 0,8$.

Activité 1. Loi uniforme et densité

A. 1. Non car il existe une infinité de valeurs prises par X dans [0 ; 10].

2. a. Les décimaux de E_n s'écrivent :
1×10^{-n} ; 2×10^{-n} ; … ; $N \times 10^{-n}$ avec N tel que $N \times 10^{-n} = 10$, soit $N = 10^{n+1}$. $P(E_{n+1}) = 10^{n+1}\,\alpha$.

b. Si $\alpha > 0$, $P(E_{n+1})$ dépasse 1 dès que $10^{n+1} > \frac{1}{\alpha}$. L'hypothèse $\alpha > 0$ doit donc être rejetée. D'où $P(X = x) = 0$, pour tout $x \in [0 ; 10]$.

B. a. Les fréquences sont très voisines (égales à 10^{-2} près).

b. Les deux intervalles ont la même longueur.

C. 1. $P(X \in [k ; k+1]) = 0,1$.

2. $f(x) = 0,1$.

3. a. $P(X \in [0 ; 10]) = 1$; $\int_0^{10} f(x)\, dx = 1$. On a donc $P(X \in [0 ; 10]) = \int_0^{10} f(x)\, dx$.

b. La proportionnalité de $P(X \in [a ; b])$ à la longueur $b - a$ de l'intervalle s'écrit : $P(X \in [a ; b]) = k(b - a)$.
En particulier, $P(X \in [0 ; 10]) = 1$ donne $k \times 10 = 1$, soit $k = 0,1$.
On peut donc proposer : $P(X \in [a ; b]) = 0,1(b - a)$ qui coïncide avec $\int_a^b f(x)\, dx$ où $f(x) = 0,1$, pour tout $x \in [0 ; 10]$.

c. $P(X \in [\sqrt{2} ; \pi]) = 0,1\,(\pi - \sqrt{2})$ ou $P(X \in [\sqrt{2} ; \pi]) = \int_{\sqrt{2}}^{\pi} 0,1\, dx$.

On obtient $P(X \in [\sqrt{2} ; \pi]) \approx 0,173$ qui est approchée à 10^{-3} près par la fréquence obtenue en partie B.

Activité 2. Loi exponentielle

1. a. La fréquence de la classe modale est environ $0,057 \times 5 = 0,285$.

b. $fr(T \leqslant 15) \approx (0,057 + 0,043 + 0,03) \times 5 \approx 0,65$; $fr(5 \leqslant T \leqslant 15) \approx (0,043 + 0,03) \times 5 \approx 0,365$.

c. $fr(T \leqslant 10) \approx (0,057 + 0,043) \times 5 \approx 0,5$. Une estimation de t_0 tel que $P(T \leqslant t_0) = 0,5$ est donc $t_0 \approx 10$.

2. a. $F(t) = \int_0^t 0,07e^{-0,07x}\, dx = \left[-e^{-0,07x}\right]_0^t = 1 - e^{-0,07t}$.

b. $F(15) = 1 - e^{-1,05} \approx 0,650$. Cette valeur qui coïncide avec l'estimation faite correspondant à l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle [5 ; 15].

c. Si on estime $P(5 \leqslant T \leqslant 15)$ par $fr(5 \leqslant T \leqslant 15) \approx 0,365$, on peut la comparer avec $\int_5^{15} f(x)\, dx = F(15) - F(5)$.

On obtient $F(15) - F(5) \approx 0,355$ qui est à comparer avec l'estimation faite à la question 1. b. qui s'en écarte de 10^{-2}.

d. $F(t) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,07t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,07t} = 0,5 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 0,5}{0,07}$ d'où $t \approx 9,9$.

e. $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$. L'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ est égale à 1.

Activité 3. Standardiser une variable aléatoire

1. a. Poids centré associé à x : $800 - 750 = 50$.

b. Poids centré réduit associé à x : $z = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$.

2. $\dfrac{x - 750}{100} = -1$ d'où $x = 650$.

3. a. $Z = \dfrac{X - 750}{100}$. Lorsque $X = 800$, $Z = 0{,}5$. Lorsque $X = 650$, $Z = -1$.

b. $E(Z) = \dfrac{1}{100}E(X - 750) = \dfrac{1}{100}(E(X) - 750) = 0$;

$\sigma(Z) = \dfrac{1}{100}\sigma(X - 750) = \dfrac{1}{100}\sigma(X) = 1$.

Une variable centrée réduite a pour moyenne 0 et pour écart-type 1.

4. a. $Z_1 = \dfrac{X_1 - 680}{120}$.

b. $P(X_1 \geqslant 750) = P\left(Z_1 \geqslant \dfrac{70}{120}\right)$; $P(X \geqslant 800) = P(Z \geqslant 0{,}5)$.

Comme $\dfrac{70}{120} \approx 0{,}58 > 0{,}5$ et que Z et Z_1 suivent la même loi, on a : $P(Z \geqslant 0{,}5) > P\left(Z_1 \geqslant \dfrac{7}{12}\right)$.

Les foies pèsent respectivement 750 g (2011) et 800 g (2012) ont pour poids centrés réduits 0,58 et 0,5.
Comparativement à la production annuelle dont ils sont issus, le classement serait : foie 2012 < foie 2011.

Activité 4. Vers la courbe de Gauss

A. 1. a. La variable aléatoire X_n compte le nombre de « succès » (gène A actif) observés sur un échantillon de n personnes dont le prélèvement s'effectue avec remise. X_n suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;0{,}4)$.

b. $E(X_n) = 0{,}4n$; $\sigma(X_n) = \sqrt{0{,}4 \times 0{,}6 \times n} \approx 0{,}49\sqrt{n}$.

c. $m - \sigma \leqslant X_n \leqslant m + 2\sigma$ donne, pour $n = 5$: $0{,}91 \leqslant X_5 \leqslant 4{,}19$ soit encore $1 \leqslant X_5 \leqslant 4$ puisque X_5 prend des valeurs entières.

2. a. $m - \sigma \leqslant X_n \leqslant m + 2\sigma$ s'écrit aussi $-1 \leqslant \dfrac{X_n - m}{\sigma} \leqslant 2$ soit $-1 \leqslant Z_n \leqslant 2$.

b. $z_k = \dfrac{k - m}{\sigma}$ avec k entier $0 \leqslant k \leqslant n$.

$z_{k+1} - z_k = \dfrac{1}{\sigma}$.

c. La largeur commune des rectangles R_k est $\dfrac{1}{\sigma}$.

La hauteur de R_k est donc $\sigma \cdot P(Z_n = z_k) = \sigma \cdot P(X_n = k)$.
La somme des aires des rectangles R_k est égale à 1.

d. Quand n augmente, l'histogramme « se lisse » et prend l'allure d'une forme en cloche.

e. $P(E_n) = P(m - \sigma \leqslant X_n \leqslant m + 2\sigma) = P(\mathrm{Ent}(m - \sigma) + 1) \leqslant X_n \leqslant \mathrm{Ent}(m + 2\sigma))$

$= P(X_n \leqslant \mathrm{Ent}(m + 2\sigma)) - P(X_n \leqslant \mathrm{Ent}(m - \sigma))$.

En langage GeoGebra, on obtient :

```
Pn = Binomiale[n, 0.4, floor(m + 2σ), true] – Binomiale[n, 0.4, floor(m – σ), true]
```
.

Pour $n = 5$, $P(E_5) = 0{,}912$.

B. 1. On constate que lorsque n augmente, l'histogramme se lisse et tend à se confondre avec $\mathscr{C}$: $y = f(x)$.

3. I est l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.
Lorsque n augmente, $P(E_n)$ est très voisin de I.

TP1. Deux lois uniformes pour une rencontre possible

A. 1. a. et **b.** Voir les fichiers sur le site Math'x.

2. a. Lorsqu'on choisit au hasard un réel x dans un intervalle $[a\,;b]$, la probabilité que x appartienne à $[\alpha\,;\beta] \subset [a\,;\,b]$, est égale, selon la loi uniforme, à $\dfrac{\beta-\alpha}{b-a} = \dfrac{\text{longueur}[\alpha\,;\beta]}{\text{longueur}[a\,;b]}$.

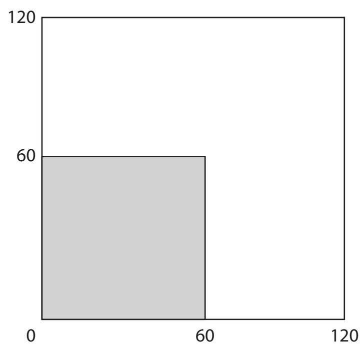
De même, lorsqu'on choisit au hasard un point M dans le carré OIKJ, la probabilité que M appartienne au trapèze OABK est égale à : $\dfrac{\text{aire OABK}}{\text{aire OIKJ}} = \text{aire OABK}$ puisque aire OIKJ = 1.

La fréquence des points rouges parmi les 10 000 points pris au hasard dans le carré donne donc une estimation de la probabilité de « M appartient à OABK » qui est égale à l'aire de OABK.

b. $\text{aire OABK} = \text{aire OIKJ} - \text{aire OIK} - \text{aire JAB} = 1 - 0{,}5 - \dfrac{0{,}8 \times 0{,}8}{2} = 0{,}18.$

La probabilité que M appartienne à OABK est donc égale à $\dfrac{\text{aire OABK}}{\text{aire OIKJ}} = \text{aire OABK} = 0{,}18.$

B. 1. a.



b. • E est réalisé lorsque $x \in [0\,;\,60]$ et $y \in [0\,;\,60]$ (voir partie hachurée)

• $b = 3\,600$ (en unités d'aire).

c. $P(E) = \dfrac{b}{120 \times 120} = 0{,}25.$

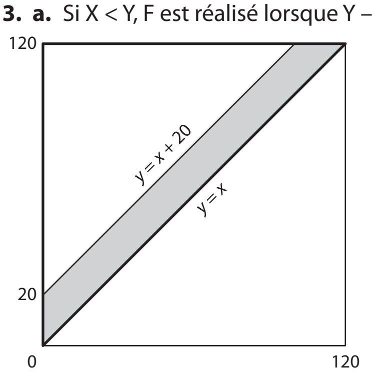
2. a. Si Roméo arrive à 17 h 15, il rencontrera Juliette si celle-ci arrive entre 17 h 05 et 17 h 35.

La probabilité de rencontre est donc : $P(5 \leqslant Y \leqslant 35) = \dfrac{30}{120} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25.$

b. Si Juliette arrive à 17 h 15, elle rencontrera Roméo si celui-ci arrive entre 17 h et 17 h 25.

La probabilité de rencontre est donc $P(0 \leqslant X \leqslant 25) = \dfrac{25}{120} = \dfrac{5}{24} \approx 0{,}21.$

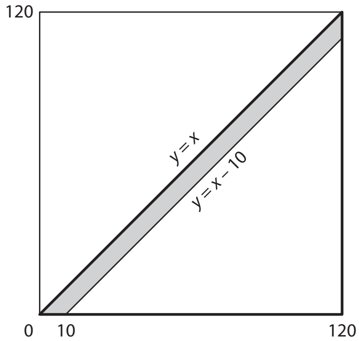
3. a. Si $X < Y$, F est réalisé lorsque $Y - X \leqslant 20$.



Aire du domaine hachuré : $\dfrac{120 \times 120}{2} - \dfrac{100 \times 100}{2} = 2\,200$ (unités d'aire) soit 22 cm^2.

$P_{(X<Y)}(F) = \dfrac{22}{72} = \dfrac{11}{36} \approx 0{,}31.$

b. Si Y < X, F est réalisé lorsque $X - Y \leqslant 10$.



Aire du domaine hachuré : $\dfrac{120 \times 120}{2} - \dfrac{110 \times 110}{2} = 1150$ (unités d'aire) soit 11,5 cm^2.

$P_{(X<Y)}(F) = \dfrac{11{,}5}{72} \approx 0{,}16.$

c. $P(F) = P(X < Y)P_{(X<Y)}(F) + P(Y < X)P_{(Y<X)}(F) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{11}{36} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{11{,}5}{72} \approx 0{,}23.$

TP2. Désintégration radioactive

A. 1. a. Nombre de noyaux se désintégrant entre les instants t et $t + s$: $N(t) - N(t + s)$.

D'où leur proportion : $\dfrac{N(t) - N(t+s)}{N(t)}$ soit, par unité de temps : $h(t) = \dfrac{N(t) - N(t+s)}{N(t)} \times \dfrac{1}{s}$.

b. $\lim\limits_{s \to 0} h(t) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{N(t+s) - N(t)}{s} \times \dfrac{-1}{N(t)} = N'(t) \times \dfrac{-1}{N(t)} = -\dfrac{N'(t)}{N(t)}$.

Comme $h(t) = \lambda$, pour tout $t \geqslant 0$, on en déduit $\lim\limits_{s \to 0} h(t) = \lambda$ et donc $\dfrac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$, pour tout $t \geqslant 0$.

c. De l'égalité précédente, avec $N(t) > 0$, résulte : $\ln(N(t)) = -\lambda t + k$, avec k réel.

d. $N(t) = e^{-\lambda t + k}$. Mais $N(0) = N_0$ donne $e^k = N_0$. D'où $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

2. a. $P(X > t) = \dfrac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t}$; $P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

b. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[0 ; +\infty[$ et pour tous a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$,

$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X < a) = (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

X suit donc la loi exponentielle de paramètre λ.

B. 1. T est la médiane de la variable aléatoire X.

2. $P(X < t) = 0{,}5$ équivaut successivement à : $1 - e^{-\lambda T} = 0{,}5$; $e^{-\lambda T} = 0{,}5$; $-\lambda T = -\ln 2$; $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

C. 1. a. $\dfrac{\ln 2}{\lambda} = 14{,}3$; $\lambda = \dfrac{\ln 2}{14{,}3} \approx 0{,}0485$.

b. $P(X \leqslant 7) = 1 - e^{-7\lambda} \approx 0{,}288$; $P(X > 30) = e^{-30\lambda} \approx 0{,}234$.

2. $\lambda = 1{,}54 \times 10^{-10}$

a. $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx 4\,501$ millions d'années $\approx 4{,}5$ milliards d'années.

b. $P(X > 4{,}5 \times 10^9) = e^{-4{,}5 \times 10^9 \lambda} \approx 0{,}5$.

Remarque : il suffit en fait d'appliquer : $P(X > t) = 0{,}5$.

c. On cherche t tel que $P(X \leqslant t) = 0{,}99$, soit : $1 - e^{-\lambda t} = 0{,}99$; $e^{-\lambda t} = 0{,}01$; $-\lambda t = \ln 0{,}01$;

$t = -\dfrac{\ln 0{,}01}{\lambda} \approx 44{,}9$ milliards d'années.

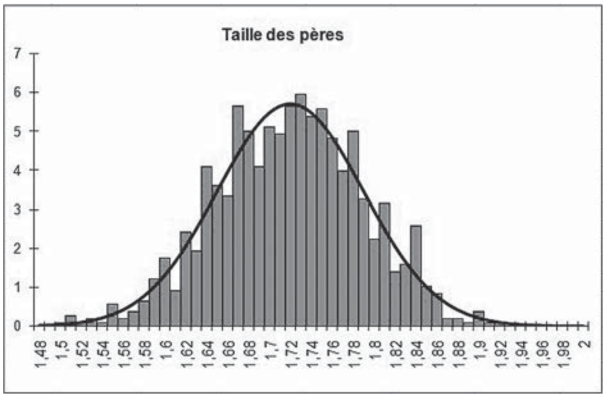
TP3. Des lois à densité dans la nature

A. 1. Regroupement en classes et histogramme normalisé :

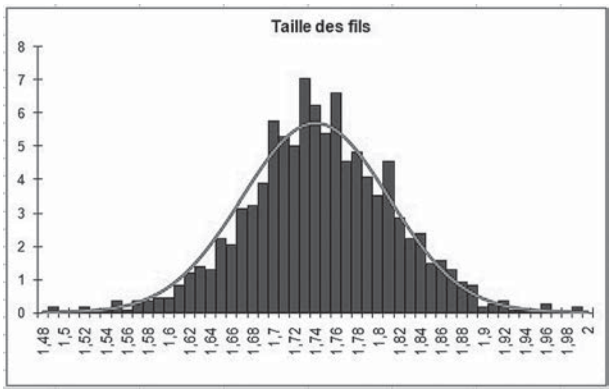
Sur le tableur, les instructions `=NB.SI("plage des tailles Père";taille t)/1078` où t varie de 1,48 à 2 avec un pas de 0,01, donnent la série statistique (tailles Pères ; fréquences) de moyenne 1,72 m et d'écart-type 0,07 m.

L'histogramme normalisé s'obtient en prenant pour hauteurs des rectangles les fréquences divisées par 0,01 pour que la somme des aires de ces rectangles soit égales à 1.

La forme de l'histogramme évoque une courbe « en cloche ». L'ajustement par la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(1{,}72\,;0{,}07^2)$ paraît satisfaisant (voir son tracé).

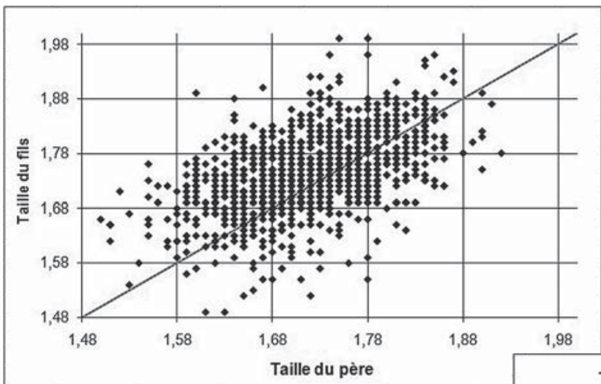


2. En procédant de même avec la distribution des tailles Fils dont la moyenne est 1,74 m et l'écart-type 0,07 m, on obtient l'histogramme normalisé ci-contre. Cette fois encore, l'ajustement par la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(1{,}74\,;0{,}07^2)$ paraît satisfaisant.



3. L'instruction `=1_LOI.NORMALE(1,77;1,74;0,07;VRAI)` affiche la valeur approchée 0,33.

4. a.



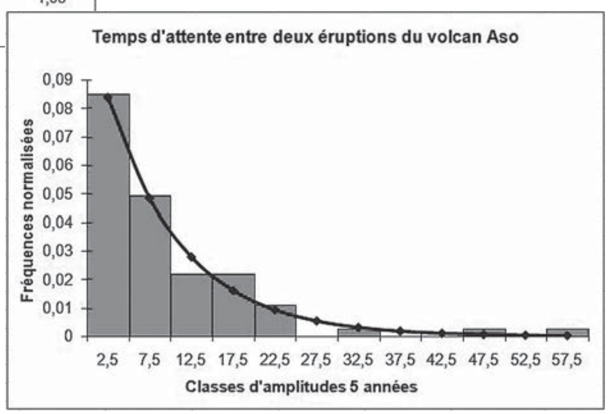
Il y a davantage de points situés au-dessus de D. Les fils ont globablement tendance à être plus grands que leurs pères.

b. Les fils des « petits » (pères de taille inférieure à 1,58 m) sont tous plus grands que leur père. Les fils des « grands » (pères de taille supérieure à 1,88 m) sont tous plus petits que leur père. C'est une observation du phénomène dit de « régression » vers la moyenne.

B. 1. En procédant comme dans le A., on obtient l'histogramme normalisé suivant :

Remarque : les rectangles ont pour hauteurs les fréquences normalisées, c'est-à-dire $\frac{f_k}{5}$.

Le profil de l'histogramme suggère une loi exponentielle. La moyenne étant 9,28, on peut prendre comme paramètre de la loi exponentielle $\lambda \approx \frac{1}{9{,}28}$ soit $\lambda \approx 0{,}11$ à 10^{-2} près.

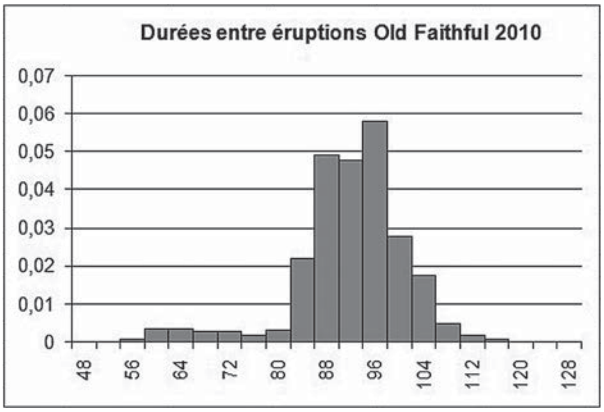


2. On a $P(T \geqslant 56) = 1 - P(T < 56) = 1 - \int_0^{56} 0{,}11e^{-0{,}11t}\, dt \approx 0{,}002$.

On peut aussi utiliser l'instruction `=1–LOI.EXPONENTIELLE(56;0,11;VRAI)`

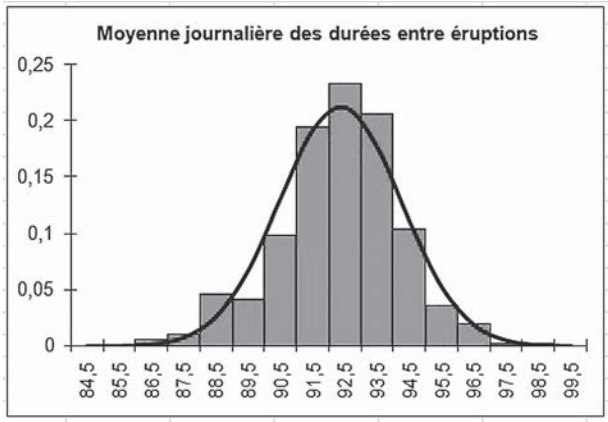
Une telle période de repos est donc, dans ce modèle, assez exceptionnelle.

C.



1. La distribution des durées entre éruptions ne peut se modéliser par l'une des fonctions de densité figurant au programme de terminale (loi exponentielle ou uniforme exclue, et loi normale aussi en raison de la présence, non négligeable, de durées autour de 65 minutes, loin de la moyenne.

2. Ici, par contre, la distribution des moyennes journalières des durées entre éruptions évoque une courbe en cloche. L'ajustement par la fonction densité de la loi normale $\mathcal{N}(92,35\,;1,88^2)$ paraît satisfaisant.



TP4. Distribution « normale » d'un taux de cholestérol

A. 1. a. On sait, par propriété, que $P(T \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}95$.

Plus précisément, $z = \dfrac{T-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $P(T \in [\mu - 2\sigma\,;\, \mu + 2\sigma]) = P(z \in [-2\,;\,2]) = 2P(z \leqslant 2) - 1 \approx 0{,}954$.

b. Le système $\begin{cases} \mu - 2\sigma = 1{,}3 \\ \mu + 2\sigma = 2{,}3 \end{cases}$ donne $\mu = 1{,}8$ et $\sigma = 0{,}25$.

T suit donc la loi $\mathcal{N}(1{,}8\,;0{,}25^2)$.

2. a. $P(T < 1{,}6) \approx 0{,}212$;

b. $P(1{,}7 < T < 2{,}3) \approx 0{,}633$;

c. $P(T \geqslant 2{,}5) \approx 0{,}003$.

3. Sur un tableur, `=LOI.NORMALE.INVERSE(0,85;1,8;0,25)` donne $t_0 \approx 2{,}06$.

B. 1. • $P(T' < 1{,}4) = 0{,}11$ équivaut à $P\left(\dfrac{T'-\mu'}{\sigma'} < \dfrac{1{,}4-\mu'}{\sigma'}\right) = 0{,}11$ où $\dfrac{T'-\mu'}{\sigma'}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Sur un tableur, `=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(0,11)` donne $\dfrac{1{,}4-\mu'}{\sigma'} \approx -1{,}2265$.

• De même, $P(T' > 2{,}4) = 0{,}09$ équivaut à $P(T' \leqslant 2{,}4) = 0{,}91$ ou encore à $P\left(\dfrac{T'-\mu'}{\sigma'} \leqslant \dfrac{2{,}4-\mu'}{\sigma'}\right) = 0{,}91$.

Le tableur donne : $\dfrac{2,4-\mu'}{\sigma'} \approx 1,3408$. La résolution du système $\begin{cases} \dfrac{1,4-\mu'}{\sigma'} = -1,2265 \\ \dfrac{2,4-\mu'}{\sigma'} = 1,3408 \end{cases}$ donne $\begin{cases} \mu' \approx 1,88 \\ \sigma' \approx 0,39 \end{cases}$

2. a. $P(a < T' < b) = 0,9$ s'écrit encore $P\left(\dfrac{a-1,88}{0,39} < \dfrac{T'-1,88}{0,39} < \dfrac{b-1,88}{0,39}\right) = 0,9$ où $z' = \dfrac{T'-1,88}{0,39}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or il existe une infinité de couples $(\alpha;\beta)$ tels que $P(\alpha < z' < \beta) = 0,9$, car cela revient à chercher 2 réels α et β tels que l'aire sous la courbe de Gauss, entre α et β, soit égale à 0,9. Il existe donc une infinité de couples $(a\,;b)$ tels que $P(a < T' < b) = 0,9$, ce qui rend impossible leur détermination.

b. Les réels a et b symétriques par rapport à $\mu' = 1,88$ sont de la forme $a = 1,88 - h$ et $b = 1,88 + h$, avec $h > 0$.

Recherchons $h > 0$ tel que : $P(1,88 - h < T' < 1,88 + h) = 0,9$ soit encore $P\left(\dfrac{-h}{0,39} < z' < \dfrac{h}{0,39}\right) = 0,9$

avec $z' = \dfrac{T'-1,88}{0,39}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Cela revient à rechercher $h > 0$ tel que $P\left(z' < \dfrac{h}{0,39}\right) = 0,95$.

Sur un tableur, `=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(0,95)` donne $\dfrac{h}{0,39} \approx 1,645$ d'où $h \approx 0,64$ et donc $\begin{cases} a = 1,88 - h \approx 1,24 \\ b = 1,88 + h \approx 2,52 \end{cases}$

3. $P(T' > 2,45) \approx 0,07$.

La probabilité qu'une personne prise au hasard dans cette population ait un traitement anticholestérol est donc égale à 0,07.

Exercices

1 **1.** $P(X\{4\,;5\,;6\,;7\,;8\}) = 0$

2. $P(2,5 < X \leqslant 4,5) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

3. $P(X > 7,2) = \dfrac{0,8}{4} = 0,2$.

4. $P_{(X<7)}(X > 5) = \dfrac{2}{3}$.

5. On obtiendrait en moyenne $\dfrac{4+8}{2} = 6$.

2 **1.** T suit la loi uniforme sur [0 ; 120] si l'on exprime la durée en minutes.

2. $P(T < 12) = \dfrac{12}{120} = 0,1$.

3. $P(T > 105) = \dfrac{15}{120} = \dfrac{1}{8} = 0,125$.

3 **1.** $\lambda = \dfrac{1}{6}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{6}e^{-\frac{1}{6}x}$.

3. $P_{V>4}(V > 6) = P(V > 2)$ car la loi exponentielle est la loi « sans vieillisement », ou « sans mémoire ».

4 **1.** Aire rouge.

2. Aire bleue $= \displaystyle\int_{-0,5}^{1} f(x)\,dx$.

Aire verte $= \displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{1,5}^{a} f(x)\,dx$.

3. Dans l'ordre « Rouge, Bleu, Vert » : $P(X \leqslant -2)$, $P(-0,5 \leqslant X \leqslant 1)$, $P(X \geqslant 1,5)$.

5 **a.** $P(0 < X \leqslant 3) = \dfrac{3}{6} = 0,5$.

b. $P(-0,5 \leqslant X \leqslant 1,5) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

6 Soit T le temps d'attente, en minutes.

1. $P(T \geqslant 4) = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

2. $E(T) = \dfrac{1+6}{2} = 3,5$.

7 **1.** `=ALEA()` affiche un réel au hasard dans [0 ; 1[. D'où `=9*ALEA()-2` renvoie un nombre au hasard dans [– 2 ; 7[. X suit la loi uniforme sur [– 2 ; 7[.

2. a. $P(X < 0) = \dfrac{2}{9}$.

b. $P(X \geqslant 2) = \dfrac{5}{9}$.

c. $P(-3 < X \leqslant 3) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

d. $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

$x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

$P(-1 < X < 3) = \dfrac{4}{9}$.

8 **1.** T suit la loi uniforme sur [1 ; 5[.

2. a. « t a une partie entière égale à 3 » équivaut à « $t \in [3\,;4[$ ».

$P(3 < T < 4) = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

b. « t a un arrondi à 10^{-1} égal à 3 » équivaut à « $2,95 \leqslant t < 3,05$ ».

$P(2{,}95 \leqslant T < 3{,}05) = \dfrac{0{,}1}{4} = 0{,}025.$

c. « 3 est une valeur approchée de t à 10^{-1} » équivaut à « $2{,}9 \leqslant t \leqslant 3{,}1$ ».

$P(2{,}9 \leqslant T \leqslant 3{,}1) = \dfrac{0{,}2}{4} = 0{,}05.$

9 **1.** $P(X = 270) = 0.$

2. $P(135 < X < 157{,}5) = \dfrac{22{,}5}{360} = \dfrac{1}{16}.$

3. $P_{(225<X<360)}(247{,}5 < X < 292{,}5) = \dfrac{45}{135} = \dfrac{1}{3}.$

10 **1.** On peut modéliser l'heure d'arrivée de Paolo par la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[7\,;7{,}75]$.

2. a. $P(X > 7{,}5) = \dfrac{0{,}25}{0{,}75} = \dfrac{1}{3}.$

b. $P\left(X < 7 + \dfrac{10}{60}\right) = \dfrac{\frac{10}{60}}{0{,}75} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{9}.$

c. $P\left(7 + \dfrac{20}{60} < X < 7 + \dfrac{22}{60}\right) = \dfrac{\frac{2}{60}}{0{,}75} = \dfrac{1}{30} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{40}.$

d. $P(X = 7) = 0.$

Remarque : En repérant l'heure d'arrivée par le temps T en minutes écoulé depuis 7 heures, on disposait d'une loi uniforme sur $[0\,;45]$ plus simple à utiliser.

11 **a.** $P(105 \leqslant T \leqslant 150 \text{ ou } 255 \leqslant T \leqslant 300)$

$= \dfrac{45}{300} + \dfrac{45}{300} = 0{,}3.$

b. $P(90 \leqslant T \leqslant 150 \text{ ou } 240 \leqslant T \leqslant 300).$

$= \dfrac{60}{300} + \dfrac{60}{300} = 0{,}4.$

c. $P(0 \leqslant T \leqslant 75 \text{ ou } 150 \leqslant T \leqslant 225)$

$= \dfrac{75}{300} + \dfrac{75}{300} = 0{,}5.$

12 **1. a.** $P(T = 20) = 0.$

b. $P(T < 45) = \dfrac{45}{150} = 0{,}3.$

c. $P(45 \leqslant T \leqslant 60) = \dfrac{15}{150} = 0{,}1.$

d. $P(T > 90) = \dfrac{60}{150} = 0{,}4.$

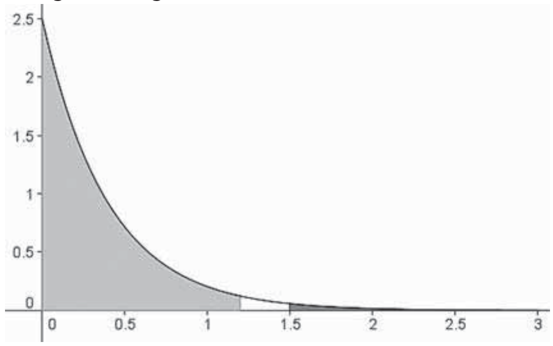
2. En utilisant la formule des probabilités conditionnelles : $P_{T>50}(T \leqslant 60) = \dfrac{P(50 < T \leqslant 60)}{P(T > 50)} = \dfrac{\frac{10}{150}}{\frac{100}{150}} = 0{,}1.$

En restreignant l'univers (loi uniforme sur $[50\,;150]$) :

$P_{T>50}(T \leqslant 60) = \dfrac{10}{100} = 0{,}1.$

13 **1.** $f(x) = 2{,}5\mathrm{e}^{-2{,}5x}.$

Le logiciel Geogebra donne :



2. Calculs

$P(X \leqslant 1{,}2) = \displaystyle\int_0^{1{,}2} 2{,}5\mathrm{e}^{-2{,}5x}\,dx$

$= 1 - \mathrm{e}^{-1{,}2\times 2{,}5} = 1 - \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}95.$

$P(1{,}5 \leqslant X \leqslant 3) = \displaystyle\int_{1{,}5}^{3} 2{,}5\mathrm{e}^{-2{,}5x}\,dx$

$= \mathrm{e}^{-3{,}75} - \mathrm{e}^{-7{,}5} \approx 0{,}02.$

14 **1.** $P(Y > t) = 0{,}95 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2t} = 0{,}95$

$\Leftrightarrow t = -0{,}5\ln(0{,}95).$

D'où $t \approx 0{,}026.$

2. t' est tel que $P(Y \leqslant t') = P(T \geqslant t') = 0{,}5.$

Or $P(Y \geqslant t') = 0{,}5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2t'} = 0{,}5 \Leftrightarrow t' = -0{,}5\ln(0{,}5)$

D'où $t' \approx 0{,}347.$

Le nombre t' est la médiane de la variable aléatoire Y.

15 **1.** $P(Z \leqslant 50) = 0{,}05$ équivaut à :

$1 - \mathrm{e}^{-50\lambda} = 0{,}05$, c'est-à-dire à

$\mathrm{e}^{-50\lambda} = 0{,}05$ d'où $\lambda = -\dfrac{1}{50}\ln 0{,}95$

et finalement à $\lambda = 0{,}001.$

2. $P(Z > 25) = \mathrm{e}^{-25\lambda} \approx \mathrm{e}^{-0{,}025} \approx 0{,}975.$

16 **1.** $P(D \leqslant T) = 0{,}5$ équivaut à :

$1 - \mathrm{e}^{-\lambda T} = 0{,}5$, c'est-à-dire à

$\mathrm{e}^{-\lambda T} = 0{,}5$ d'où $-\lambda T = \ln 0{,}5$

et finalement à $T = -\dfrac{1}{\lambda}\ln 0{,}5 = \dfrac{\ln 2}{\lambda}.$

2. $T = 30$ donne $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30} \approx 0{,}023.$

$P(D > 50) = \mathrm{e}^{-50\lambda} = \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}\ln 2} \approx 0{,}315.$

17 **1.** Comme $E(X) = 240$, on a $\lambda = \dfrac{1}{240}.$

2. a. $P(X > 480) = \mathrm{e}^{-480\lambda} = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135.$

b. $P(X < 120) = 1 - \mathrm{e}^{-120\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}393.$

c. En utilisant la propriété de « non vieillissement »

$P_{X\geqslant 240}(X < 360) = 1 - P_{X\geqslant 240}(X \geqslant 360) = 1 - P(X \geqslant 120)$

$= P(X < 120) \approx 0{,}393.$

En utilisant la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{X\geqslant 240}(X<360)=\frac{P(240\leqslant X<360)}{P(X\geqslant 240)}$$

$$=\frac{e^{-240\lambda}-e^{-360\lambda}}{e^{-240\lambda}}=\frac{e^{-1}-e^{-1,5}}{e^{-1}}$$

$$=1-e^{-0,5}\approx 0,393.$$

Remarque : La première démarche est préférable car elle tire profit d'une particularité de cette loi.

18 Soit X la durée de fonctionnement sans panne, en heures, du moteur. X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{2\,000}=0,0005$.

$P(X\leqslant 10)=1-e^{-10\lambda}=1-e^{-0,005}\approx 0,005$.

Remarque : Le temps de fonctionnement du moteur avant ce vol n'intervient pas puisque sa durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, réputée « sans mémoire ».

19 **1.** $\lambda=\frac{1}{10}=0,1$.

2. a. $P(T\geqslant 10)=e^{-10\lambda}=e^{-1}\approx 0,368$.

b. $P(T<20)=1-e^{-20\lambda}=1-e^{-2}\approx 0,865$.

c. $P(5<T<10)=e^{-5\lambda}-e^{-10\lambda}=e^{-0,5}-e^{-1}\approx 0,239$.

3. $P_{(T\geqslant 15)}(T\leqslant 25)=1-P_{(T\geqslant 15)}(T>25)$
$=1-P(T\geqslant 10)$
$=1-e^{-10\lambda}=1-e^{-1}\approx 0,632$.

4. m est tel que $P(T\geqslant m)=0,5$, soit $e^{-m\lambda}=0,5$

$e^{-0,1m}=0,5$

$m=-10\ln(0,5)\approx 6,93$.

La durée de vie médiane du monstre est d'environ 7 minutes.

20 **1. Méthode 1**

T suit une loi exponentielle. Son paramètre λ est tel que $P(T>800)=0,45$ ou encore $e^{-800\lambda}=0,45$.

D'où $\lambda=-\frac{1}{800}\ln(0,45)\approx 0,001$.

On calcule alors $P(T\geqslant 2\,000)=e^{-2000\lambda}=e^{-2}\approx 0,135$.

Méthode 2

La propriété des « durée de vie sans vieillissement » permet d'écrire : $P_{(T\geqslant 1200)}(T\geqslant 2\,000)=P(T\geqslant 800)$ ou encore : $\frac{P(T\geqslant 1200 \text{ et } T\geqslant 2\,000)}{P(T\geqslant 1200)}=P(T\geqslant 800)$,

soit $P(T\geqslant 2\,000)=P(T\geqslant 800)\times P(T\geqslant 1\,200)$.

Il en résulte ici : $P(T\geqslant 2\,000)=0,45\times 0,30=0,135$.

21 **1.** $P(X>10)=0,286$ équivaut à $e^{-10\lambda}=0,286$ d'où $\lambda=-\frac{1}{10}\ln(0,286)\approx 0,125$.

2. $P(X<0,5)=1-e^{-0,5\lambda}\approx 1-e^{-0,0625}\approx 0,061$.

3. $P_{(X>8)}(X>10)=P(X>2)=e^{-2\lambda}\approx e^{-0,25}\approx 0,779$.

22 **1. a.** Pour $t\geqslant 0$,
$F(t)=\int_0^t 710e^{-710x}\,dx=\left[-e^{-710x}\right]_0^t=1-e^{-710t}$.

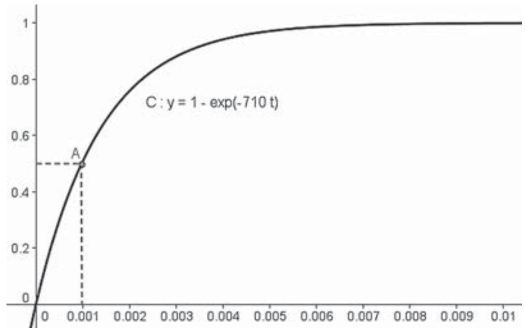
b. Par théorème, F est la primitive de $f: x\mapsto 710e^{-710x}$ sur $[0,+\infty[$, s'annulant pour $t=0$.

D'où $F'=f$ et comme $f>0$, F est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

c. $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=1$.

Il s'agit, en unités d'aire, de l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe de densité de la loi exponentielle.

d.



2. a. $F(t)=0,5\Leftrightarrow 1-e^{-710t}=0,5$
$\Leftrightarrow e^{-710t}=0,5\Leftrightarrow t=-\frac{1}{710}\ln 0,5\Leftrightarrow t=\frac{\ln 2}{710}$.

À 10^{-5} près, $t\approx 0,00098$.

On retrouve par lecture graphique une valeur de t très légèrement inférieure à 0,001, donc en accord avec ce calcul.

3. $I(t)=710\int_0^t xe^{-710x}\,dx$.

a. Si on pose $g(x)=xe^{-710x}$ on a
$g'(x)=e^{-710x}-710xe^{-710x}$ d'où
$710xe^{-710x}=e^{-710x}-g'(x)$.

Il en résulte que $x\mapsto 710xe^{-710x}$ a pour primitive
$x\mapsto -\frac{1}{710}e^{-710x}-g(x)$ soit encore
$x\mapsto -\left(x+\frac{1}{710}\right)e^{-710x}$.

$$\text{D'où } I(t)=\left[-\left(x+\frac{1}{710}\right)e^{-710x}\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{710}-\left(t+\frac{1}{710}\right)e^{-710t}.$$

On a alors $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=\frac{1}{710}$.

b. $\lim\limits_{t\to+\infty}710\int_0^t xe^{-710x}\,dx=\frac{1}{\lambda}$.

Ce nombre est l'espérance de la variable T.

23 **1. a.** Pour $x\geqslant 0$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=-xf(x)$.

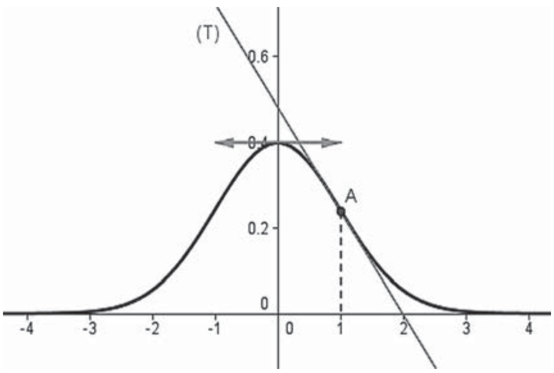
En dérivant à nouveau, on obtient pour $x\geqslant 0$,
$f''(x)=-f(x)-xf'(x)=(x^2-1)f(x)$.

b. f étant paire, sa courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; il suffit donc d'étudier f sur $[0\,;+\infty[$. Or, f' s'annule en 0 et est négative pour $x > 0$.
La fonction f est donc décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
La tangente à $\mathscr{C}$ est horizontale au point $B\left(0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

2. a. La droite (T) d'équation : $y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
b. Pour $x \geqslant 0$, $d'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - f'(1)$ et
$d''(x) = f''(x) = (x^2 - 1)\,f(x)$.
c. Il en résulte le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$d''(x)$		$-$	0	$+$	
$d'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$d'(x)$		$+$	0	$+$	
$d(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$d(x)$		$-$	0	$+$	

d. Le signe de $d(x)$ indique que la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en A, est en dessous de $\mathscr{C}$ sur $[0\,;1[$ et au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $]1\,;+\infty[$. Le point A est donc un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



24 **1.** $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}}(-t)e^{-\frac{t^2}{2}}$

est de la forme $-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}u'e^u$ avec $u(t) = -\dfrac{t^2}{2}$.
D'où g admet une primitive de la forme $-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^u$,
c'est-à-dire $G(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

2. • $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1\right)$.

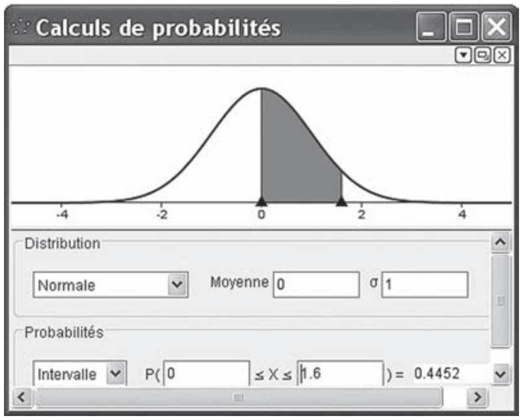
• $\displaystyle\int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - e^{-\frac{y^2}{2}}\right)$.

3. $\displaystyle E(X) = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 tf(t)\,dt + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y tf(t)\,dt$

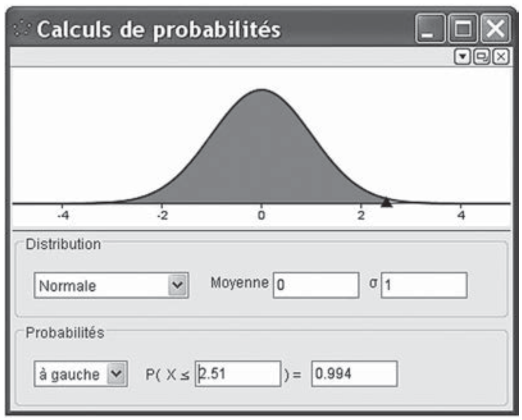
$\displaystyle\quad = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.$

25 **1.** Avec une calculatrice ou un logiciel, on obtient :
$P(X \leqslant 1{,}35) \approx 0{,}9115$
$P(X > -0{,}35) \approx 0{,}6368$
$P(-1 < X < 1) \approx 0{,}6827$
2. u tel que $P(X \leqslant u) = 0{,}334$ s'obtient, par exemple sur un tableur, par : =LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(0,334)
qui affiche $u = -0{,}4288945$.

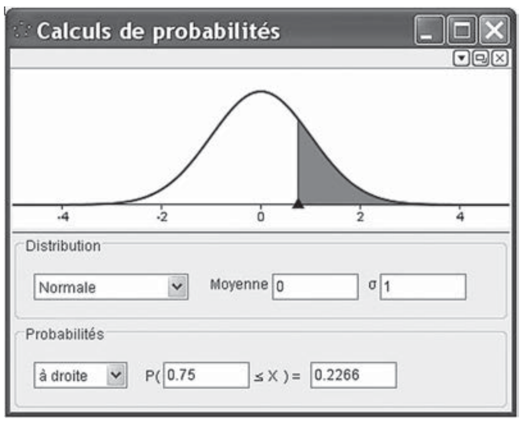
26 Par exemple, avec Geogebra :
a.



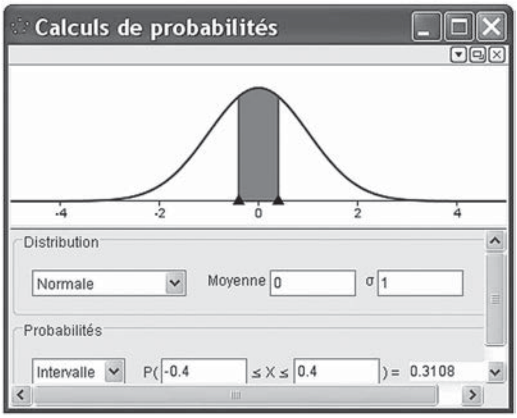
b.



c.

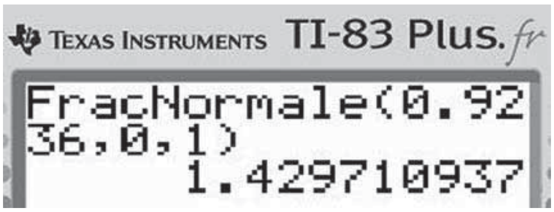


d.



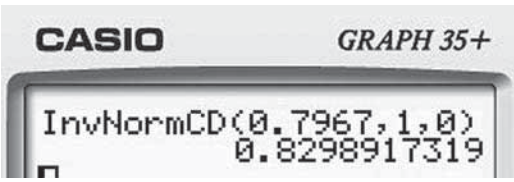
27 Par exemple avec une calculatrice :

a. $P(0 \leqslant X \leqslant x) = 0{,}4236$ équivaut à
$P(X \leqslant x) - P(X < 0) = 0{,}4236$, soit
$P(X \leqslant x) = 0{,}4236 + 0{,}5 = 0{,}9236$.



d'où $x \approx 1{,}43$.

b.



d'où $x \approx 0{,}83$.

c. $P(X \geqslant x) = 0{,}0655$ équivaut à $P(X < x) = 0{,}9345$
on obtient $x \approx 1{,}51$.

d. $P(x \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}1$ équivaut à
$P(X \leqslant 2) - P(X < x) = 0{,}1$, soit $P(X < x) = P(X \leqslant 2) - 0{,}1$.
Or $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}9772$ d'où
$P(X < x) = 0{,}8772$ qui donne $x \approx 1{,}16$.

28 **a.** $P(S < s_1) = 0{,}05$ donne $s_1 \approx -1{,}64$.
Par symétrie de la courbe de Gauss, $P(S > s_5) = 0{,}05$ donne $s_5 \approx 1{,}64$.

b. $P(S < s_2) = 0{,}20$ donne $s_2 \approx -0{,}84$ et donc $s_4 \approx 0{,}84$.

c. Bien sûr, $s_3 = 0$.

29 **1. a.** $Z_1 = \dfrac{X_1 - 9}{1{,}5}$ $Z_2 = X_2 - 7{,}5$.

b. Par propriété, $E(Z_1) = E(Z_2) = 0$ $\sigma(Z_1) = \sigma(Z_2) = 1$.

2. a. • $P(X_1 \geqslant 10{,}5) = P\left(Z_1 \geqslant \dfrac{10{,}5 - 9}{1{,}5}\right) = P(Z_1 \geqslant 1)$.

• $P(X_2 \geqslant 9) = P(Z_2 \geqslant 9 - 7{,}5) = P(Z_2 \geqslant 1{,}5)$.

Avec une calculatrice ou un logiciel, on obtient :
$P(X_1 \geqslant 10{,}5) \approx 0{,}159$ $P(X_2 \geqslant 9) \approx 0{,}067$

Pour un étudiant pris au hasard ayant composé au partiel blanc puis au partiel, il est plus de 2 fois plus probable qu'il obtienne au moins 10,5 au partiel blanc, qu'au moins 9 au partiel.

b. Relativement à ses camarades, on peut considérer que Max est mieux placé au partiel qu'au partiel blanc ; en effet, avec 10,5, il fait partie des 7 % des élèves ayant le mieux réussi, alors qu'avec 9 au partiel, il fait partie des 16 % des élèves ayant le mieux réussi.
Max peut donc considérer avoir progressé.

30 **1.** $M^* = \dfrac{M - 750}{15}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

2. a. $P(M > 765) = P(M^* > 1) \approx 0{,}159$.

b. $P(M < 720) = P(M^* < -2) \approx 0{,}023$.

c. $P(730 \leqslant M \leqslant 775) = P\left(-\dfrac{4}{3} \leqslant M^* \leqslant \dfrac{5}{3}\right) \approx 0{,}861$.

3. On cherche μ' tel que :
$P(M > 765) \leqslant 0{,}02$, soit encore
$P\left(M^* > \dfrac{765 - \mu'}{15}\right) \leqslant 0{,}02$, soit
$P\left(M^* \leqslant \dfrac{765 - \mu'}{15}\right) \geqslant 0{,}98$.
À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, on obtient :
$P(M^* \leqslant t) \approx 0{,}98$ lorsque $t \approx 2{,}05$.
D'où $P(M^* \leqslant t) \geqslant 0{,}98$ lorsque $t \geqslant 2{,}05$, c'est-à-dire lorsque $\dfrac{765 - \mu'}{15} \geqslant 2{,}05$, ou encore lorsque $\mu' \leqslant 734$.

31 **1.** Avec une calculatrice ou un logiciel :

a. $P(X \leqslant 0) \approx 0{,}0013$.

b. $P(-1 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0{,}1586$.

c. $P(X \geqslant 6) \approx 0{,}013$.

d. $P(4 \leqslant X \leqslant 7) \approx 0{,}1586$.

2. On conjecture :
$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 6)$ et $P(-1 \leqslant X \leqslant 2) = P(4 \leqslant X \leqslant 7)$.
Preuve : X suivant une loi normale de moyenne $\mu = 3$, la courbe de la densité de la loi de X admet pour axe de symétrie la droite Δ d'équation $x = 3$.

Comme $\begin{cases} P(X \leqslant 0) = P(X \leqslant \mu - 3) \\ P(X \geqslant 6) = P(X \leqslant \mu + 3) \end{cases}$

on a bien $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 6)$.

Comme $\begin{cases} P(-1 \leqslant X \leqslant 2) = P(\mu - 4 \leqslant X \leqslant \mu - 1) \\ P(4 \leqslant X \leqslant 7) = P(\mu + 1 \leqslant X \leqslant \mu + 4) \end{cases}$ et que $[\mu - 4 ; \mu - 1]$ et $[\mu + 1 ; \mu + 4]$ sont symétriques par rapport à μ, l'égalité est établie.

32 On cherche à se ramener systématiquement à $P(X \leqslant a) = k$ avant d'obtenir a à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

a. $P(X \leqslant a) = 0{,}4013$ donne $a \approx 6{,}90$.

b. $P(6 \leqslant X \leqslant a) = 0{,}2475$ équivaut à

$P(X \leqslant a) - P(X < 6) = 0{,}2475$.

Or $P(X < 6) \approx 0{,}15866$ d'où $P(X \leqslant a) \approx 0{,}40616$ qui donne $a \approx 6{,}92$.

c. $P(X \geqslant a) = 0{,}9600$ équivaut à $P(X < a) = 0{,}04$, d'où $a \approx 5{,}10$.

d. $P(a \leqslant X \leqslant 5{,}5) = 0{,}0244$ équivaut à

$P(X \leqslant 5{,}5) - P(X < a) = 0{,}0244$.

Or $P(X \leqslant 5{,}5) \approx 0{,}0783$ d'où

$P(X < a) \approx 0{,}0783 - 0{,}0244$

$P(X < a) \approx 0{,}0539$ qui donne $a \approx 5{,}27$.

33 **1.** $P(165 \leqslant X \leqslant 180) \approx 0{,}64308$.

2. $P_{(x>165)}(X < 180) = \dfrac{P(165 < X < 180)}{P(X > 165)} \approx 0{,}73942$.

34 X suit la loi normale $\mathcal{N}(32{,}5\,;4{,}5^2)$

Y suit la loi normale $\mathcal{N}(38\,;2^2)$

1. S'il part à 7 h 15, l'étudiant dispose de 45 minutes pour se rendre à l'université.

$P(X \leqslant 45) \approx 0{,}9973$ et $P(Y \leqslant 45) \approx 0{,}9998$.

Quelque soit le trajet choisi, l'étudiant sera à l'heure avec une probabilité très voisine de 1.

Le trajet sur autoroute peut cependant être conseillé car $P(Y \leqslant 45) > P(X \leqslant 45)$.

2. S'il part à 7 h 30, l'étudiant dispose de 30 minutes pour se rendre à l'université.

$P(X \leqslant 30) \approx 0{,}28926$ et $P(Y \leqslant 30) \approx 3{,}17 \times 10^{-5}$.

Quelque soit le trajet, l'étudiant a « peu de chances » d'être à l'heure.

Comme $P(X \leqslant 30) > P(Y \leqslant 30)$, c'est le trajet sur route qui doit être ici conseillé.

35 Soit X la variable aléatoire modélisant l'âge « des premiers mots » chez un enfant pris au hasard dans la population. X suit la loi normale $\mathcal{N}(11{,}5\,;3{,}2^2)$.

1. a. $P(X < 10) \approx 0{,}3196$.

b. $P(X > 18) \approx 0{,}0211$.

c. $P(11 < X \leqslant 12) \approx 0{,}1242$.

2. On cherche a tel que $P(X \geqslant a) < 0{,}25$ ou encore $P(X < a) > 0{,}75$.

Le nombre a tel que $P(X < a) = 0{,}75$ est $a \approx 13{,}66$.

D'où $P(X < a) > 0{,}75$ est satisfait lorsque $a > 13{,}66$.

À partir de 13 mois et 20 jours, environ, la probabilité qu'un enfant de cet âge n'ait pas encore prononcé ses premiers mots est inférieur à 0,25.

36 **1.** T suit la loi normale $\mathcal{N}(3\,;0{,}75^2)$.

a. $P(T < 2) \approx 0{,}0912$.

b. $P(T > 3{,}5) \approx 0{,}2525$.

c. $P(1{,}75 < T < 3{,}75) \approx 0{,}7936$.

2. • On peut remarquer que $P(T < 0) = 0$ à 10^{-4} près.

Dans ce modèle, l'événement « T prend des valeurs positives » est donc quasi-certain.

• Sur un tableur, par exemple, on obtient a_1 par l'instruction `=LOI.NORMALE.INVERSE(0,25;3;0,75)` qui affiche $a_1 \approx 2{,}5$.

• $P(a_1 < T < a_2) = 0{,}25$ équivaut à

$P(T < a_2) - P(T < a_1) = 0{,}25$ soit à $P(T < a_2) = 0{,}5$

d'où $a_2 = 3$.

• $P(T > a_3) = 0{,}25$ équivaut à $P(T \leqslant a_3) = 0{,}75$.

Le tableur donne $a_3 \approx 3{,}5$.

Ce résultat pouvait aussi être obtenu à partir de a_1, par symétrie par rapport à 3.

Interprétation : selon ce modèle, la probabilité qu'une personne prise au hasard regarde la télévision chaque jour en moyenne :

1) moins de 2,5 heures

2) entre 2,5 heures et 3 heures

3) entre 3 heures et 3,5 heures

4) plus de 3,5 heures

est la même et vaut 0,25.

37 **1.** X suit la loi $\mathcal{N}(19\,;3^2)$.

a. $P(X < 15) \approx 0{,}09$.

b. On cherche t tel que $P(X \leqslant t) \geqslant 0{,}9$.

Une calculatrice ou un logiciel donne $P(X \leqslant t) = 0{,}9$ pour $t \approx 22{,}84$ d'où $P(X \leqslant t) \geqslant 0{,}9$ est vérifié pour $t \geqslant 22{,}84$.

Si Lisa accepte une attente de 23 minutes, ce délai sera respecté avec une probabilité supérieure à 0,9.

2. Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;7^2)$.

a. On donne $P(Y > 8) = 0{,}97725$ qui équivaut à $P(Y \leqslant 8) = 0{,}02275$ ou encore

$P\left(\dfrac{Y-\mu}{7} \leqslant \dfrac{8-\mu}{7}\right) = 0{,}02275$ avec $Z = \dfrac{Y-\mu}{7}$ qui suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Or $P(Z \leqslant z) = 0{,}02275$ lorsque $z \approx -2$.

D'où $\dfrac{8-\mu}{7} = -2$ et donc $\mu = 22$.

3. Avec X suivant la loi $\mathcal{N}(19\,;3^2)$

$P(X \leqslant 10) \approx 0{,}001$.

Avec Y suivant la loi $\mathcal{N}(22\,;7^2)$

$P(Y \leqslant 10) \approx 0{,}043$.

Lisa devrait faire appel à la société Green-Taxi, car obtenir un taxi dans les 10 minutes est moins improbable avec cette société qu'avec Blue-Taxi.

On pourra toutefois remarquer que quelle que soit la société choisie, Lisa a bien peu de chances d'avoir son train !

38 **1.** En supposant que le prélèvement des 600 pieds observés se fait avec remise, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(600\,;0{,}4)$.

a. $E(X) = 600 \times 0{,}4 = 240$.

$\sigma(X) = \sqrt{600 \times 0{,}4 \times 0{,}6} = 12$.

b. $P(240 < X < 252) = P(X \leqslant 251) - P(X \leqslant 240) \approx 0{,}313$.

$P(X \geqslant 232) = 1 - P(X < 232) = 1 - P(X \leqslant 231) \approx 0{,}760$.

$P(X \leqslant 264) \approx 0{,}979$.

2. Y suit la loi normale $\mathcal{N}(240\,;12^2)$.

a. On obtient :

- $P(240 < Y < 252) \approx 0{,}341$

ou encore $P(241 \leqslant Y \leqslant 251) \approx 0{,}287$

- $P(X \geqslant 232) \approx 0{,}748$
- $P(X \leqslant 264) \approx 0{,}977$.

b. Les probabilités obtenues dans l'un et l'autre modèle sont assez voisines.

Remarque : L'approximation est encore meilleure si l'on calcule

$P(240{,}5 \leqslant Y \leqslant 251{,}5) \approx 0{,}314$

$P(X \geqslant 231{,}5) \approx 0{,}761$

$P(X \leqslant 264{,}5) \approx 0{,}979$.

39 **1.** $P(200 - 30t \leqslant X \leqslant 200 + 30t) = 0{,}4$ équivaut à

$P\left(-t \leqslant \dfrac{X - 200}{30} \leqslant t\right) = 0{,}4$ (*)

D'après le théorème 2 page 408, il existe un unique réel t tel que l'égalité (*) se produise.

2. Détermination de t :

$Z = \dfrac{X - 200}{30}$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$,

$P(-t \leqslant Z \leqslant t) = 0{,}4$ équivaut à $2P(Z \leqslant t) - 1 = 0{,}4$

d'après une conséquence de la Propriété 4 page 406.

On a alors $P(Z \leqslant t) = 0{,}7$ d'où $t \approx 0{,}5244$.

40 **1. a.** 0,68 **b.** 0,95 **c.** 0,997

Voir Conséquences du théorème 2 page 408.

2. • $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = P\left(-1 \leqslant \dfrac{X - \mu}{\sigma} \leqslant 1\right)$

$= P(-1 \leqslant Z \leqslant 1) = 2P(Z \leqslant 1) - 1 \approx 0{,}683$.

- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = P(-2 \leqslant Z \leqslant 2)$

$= 2P(Z \leqslant 2) - 1 \approx 0{,}954$

- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = P(-3 \leqslant Z \leqslant 3)$

$= 2P(Z \leqslant 3) - 1 \approx 0{,}9973$

41 Posons $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$. Z suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

1. a. $P\left(\mu < X < \mu + \dfrac{1}{2}\sigma\right) = P\left(0 < \dfrac{X - \mu}{\sigma} < \dfrac{1}{2}\right)$

$= P\left(Z < \dfrac{1}{2}\right) - P(Z < 0) \approx 0{,}691 - 0{,}5 \approx 0{,}191$.

b. $P(X > \mu + \sigma) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leqslant 1) \approx 0{,}159$.

2. a. $P\left(|X - \mu| \leqslant \dfrac{1}{2}\sigma\right) = P\left(-\dfrac{1}{2}\sigma < X - \mu < \dfrac{1}{2}\sigma\right)$

$P\left(-\dfrac{1}{2} < Z < \dfrac{1}{2}\right) = 2P\left(Z < \dfrac{1}{2}\right) - 1 \approx 0{,}383$.

b. $P(|X - \mu| > \sigma) = 1 - P(|X - \mu| \leqslant \sigma)$

$= 1 - P(-\sigma \leqslant X - \mu \leqslant \sigma) = 1 - P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

$= 2P(Z \geqslant 1) = 2P(Z \leqslant -1) \approx 0{,}317$.

Remarque : On pourra observer que les probabilités obtenues en question 2. sont les doubles de celles obtenues en question 1.

42 **1.** Soit X la variable aléatoire modélisant la taille d'une sentinelle prise au hasard dans la caserne.

X suit la loi normale $\mathcal{N}(175\,;7^2)$.

La question peut se traduire par la recherche du plus petite réel t tel que $P(X \leqslant t) = 0{,}99$.

2. Une calculatrice ou un logiciel donne $t \approx 191{,}28$.

En construisant une guérite de hauteur 191,3 cm on permettrait à environ 99 % des sentinelles de la caserne de s'y tenir debout.

43 **1. a.** $P(X > 53\,500) = 1 - P(X \leqslant 53\,500) \approx 0{,}191$.

b. $P(X < 42\,000) \approx 0{,}023$.

c. $P(50\,000 < X < 54\,000) \approx 0{,}341$.

2. On cherche le plus grand entier N tel que $P(X < N) \leqslant 0{,}02$.

Or $P(X < x) = 0{,}02$ donne $x \approx 41\,785{,}004$.

On aura donc $P(X < N) \leqslant 0{,}02$ pour $N \leqslant 41\,785$.

L'entreprise pourra proposer une garantie de 41 785 km.

44 **1.** X_1 suit la loi $\mathcal{N}(5\,;1^2)$.

X_2 suit la loi $\mathcal{N}(4\,;0{,}8^2)$.

a. $P(X_1 > 5) = 0{,}5$

$P(X_2 > 5) \approx 0{,}106$

b. $P(X_1 < 3{,}5) \approx 0{,}067$

$P(X_2 < 3{,}5) \approx 0{,}266$

2. a. $P(X_2 < 5) \geqslant 0{,}9$

b. $P(X_2 < 5) \approx 0{,}894$

L'objectif, ainsi traduit en terme de probabilité, n'a pas été (totalement) atteint.

45 **1.** Soit X la variable aléatoire modélisant le QI d'une personne adulte prise au hasard dans la population mondiale.

On cherche x tel que $P(X \geqslant x) = 0{,}01$ ou $P(X < x) = 0{,}99$.

On obtient $x \approx 134{,}9$.

C'est avec un QI au moins égal à 135 que l'on peut estimer faire partie des 1 % de la population ayant le plus grand QI.

2. On cherche un réel positif t tel que

$P(\mu - t < X < \mu + t) = 0{,}9$

ou encore $P\left(-\dfrac{t}{15} < \dfrac{X-100}{15} < \dfrac{t}{15}\right) = 0{,}9$

avec $Z = \dfrac{X-100}{15}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Or $P\left(-\dfrac{t}{15} < Z < \dfrac{t}{15}\right) = 2P\left(Z < \dfrac{t}{15}\right) - 1$ d'où la recherche de t tel que :

$2P\left(Z < \dfrac{t}{15}\right) - 1 = 0{,}9$

$P\left(Z < \dfrac{t}{15}\right) = 0{,}95.$

Une calculatrice ou un logiciel donne $\dfrac{t}{15} \approx 1{,}645$ d'où $t \approx 24{,}675$.

En prenant $t \approx 25$, un intervalle centré sur 100 comprenant environ 90 % des QI de la population mondiale en $I = [100 - 25\,;100 + 25]$, soit $I = [75\,;125]$.

46 La durée d'une grossesse chez une femme est modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi normale $\mathcal{N}(266\,;16^2)$.

1. $P(D < 242) \approx 0{,}067$.

2. a. On cherche t tel que $P(D \leqslant t) = 0{,}2$.

On obtient $t \approx 252{,}53$.

20 % environ des grossesses durent moins de 253 jours.

b. On cherche t' tel que $P(D \leqslant t') = 0{,}95$.

On obtient $t' \approx 292{,}31$.

95 % environ des grossesses durent moins de 292 jours.

47 **1. a.** $P(24 - t \leqslant X \leqslant 24 + t) = 0{,}9$

équivaut à $P\left(-\dfrac{t}{3} \leqslant \dfrac{X-24}{3} \leqslant \dfrac{t}{3}\right) = 0{,}9$

avec $Z = \dfrac{X-24}{3}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Or $P\left(-\dfrac{t}{3} \leqslant Z \leqslant \dfrac{t}{3}\right) = 0{,}9$ s'écrit encore

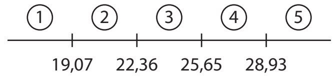
$2P\left(Z \leqslant \dfrac{t}{3}\right) - 1 = 0{,}9$ soit

$P\left(Z \leqslant \dfrac{t}{3}\right) = 0{,}95$ qui donne $\dfrac{t}{3} \approx 1{,}6448$, $t \approx 4{,}93$.

b. L'intervalle cherché est donc

$[24 - 4{,}93\,;24 + 4{,}93] = [19{,}07\,;28{,}93]$.

Le partage en trois de l'intervalle conduit à :



2. $P(X \leqslant 19{,}07) \approx 0{,}05$

$P(19{,}07 < X \leqslant 22{,}36) \approx 0{,}24$

$P(22{,}36 < X \leqslant 25{,}65) \approx 0{,}42$

$P(25{,}65 < X \leqslant 28{,}93) \approx 0{,}24$

$P(X > 28{,}93) \approx 0{,}05$.

Le fabricant pourra prévoir de répartir sa production ainsi :

taille	1	2	3	4	5
part de production	5 %	24 %	42 %	24 %	5 %

48 **a.** $T \geqslant 3$ **b.** $T \leqslant 0{,}25$ **c.** $2 < T \leqslant 2{,}5$

d. $2 - \dfrac{1}{12} < T \leqslant 2$, soit $\dfrac{23}{12} < T \leqslant 2$.

49 **a.** $P_{T\geqslant 25}(T \geqslant 32) = P(T \geqslant 7)$

b. $P_{T\leqslant 50}(T \geqslant 25) = 1 - P_{T\leqslant 50}(T < 25)$

$= 1 - \dfrac{P(T \leqslant 50 \text{ et } T < 25)}{P(T \leqslant 50)}$

$= 1 - \dfrac{P(T < 25)}{P(T \leqslant 50)}.$

c. $P_{T\geqslant 32}(T \leqslant 50) = 1 - P_{T\geqslant 32}(T > 50)$

$= 1 - P(T > 18)$

$= P(T \leqslant 18).$

d. $P_{T\leqslant 32}(T \leqslant 25) = \dfrac{P(T \leqslant 25)}{P(T \leqslant 32)}.$

50 **1.** E_{25} est l'événement : $|\Delta - \mu| \geqslant 25\sigma$,

c'est-à-dire : $\left|\dfrac{\Delta - \mu}{\sigma}\right| \geqslant 25$, où $Z = \dfrac{\Delta - \mu}{\sigma}$

suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

$P(|Z| \geqslant 25) = 1 - P(|Z| < 25) = 1 - P(-25 < Z < 25)$

$= 2P(Z > 25) = 2(1 - P(Z \leqslant 25)).$

Sur une calculatrice ou un tableur, on obtient une approximation égale à 0.

Sans être « impossible », l'événement E_{25} a une probabilité quasi nulle de se produire.

2. $P(E_5) = P(|Z| \geqslant 5) = 2P(Z > 5)$

$= 2 - 2P(Z \leqslant 5) \approx 5{,}7 \times 10^{-7}.$

$P(E_6) = P(|Z| \geqslant 6) \approx 2 \times 10^{-9}.$

L'énonce donne $P(E_5) \approx \dfrac{1}{13\,000 \times 365} \approx 2{,}1 \times 10^{-7}.$

$P(E_6) \approx \dfrac{1}{4 \times 10^6 \times 365} \approx 6{,}8 \times 10^{-10}.$

Si leur ordre de grandeur paraît convenable, les probabilités données dans l'énoncé ne coïncident pas avec celles calculées précédemment.

51 • Si X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, on obtient, par exemple sur une calculatrice :

$P(X \geqslant 6) \approx 9{,}86587645 \times 10^{-10}$

$P(X \geqslant 10) \approx 7{,}619853024 \times 10^{-24}$

• Si X′ suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1{,}1^2)$, on obtient :

$P(X' \geqslant 6) \approx 2{,}454913754 \times 10^{-8}$

$P(X' \geqslant 10) \approx 4{,}910718399 \times 10^{-20}$

Le calcul de $\dfrac{P(X' \geqslant 6) - P(X \geqslant 6)}{P(X \geqslant 6)} \approx 24$

et de $\dfrac{P(X' \geqslant 10) - P(X \geqslant 10)}{P(X \geqslant 10)} \approx 6444$

montre que l'augmentation de 10 % de l'écart-type a induit une différence de l'ordre de 2 400 % pour l'événement « six sigmas » et de 644 400 % pour l'événement « dix sigmas ».

L'affirmation est donc exacte, en tenant compte de l'arrondi effectué.

52 **1.** $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \dfrac{2}{8} = 0{,}25$

2. $E(X) = \dfrac{1+9}{2} = 5$

3. $P(X = 5) = 0$

53 **1.** $P(1 \leqslant Y \leqslant 3) = \int_1^3 0{,}2e^{-0{,}2x}\,dx = \left[-e^{-0{,}2x}\right]_1^3$

$= e^{-0{,}2} - e^{-0{,}6} \approx 0{,}27.$

2. $E(Y) = \dfrac{1}{0{,}2} = 5.$

3. $P(Y > 2) = e^{-0{,}2\times 2} = e^{-0{,}4} \approx 0{,}67.$

54 **1.** $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1) \approx 0{,}68.$

2. $P(Z > 1) = \dfrac{1 - P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)}{2} \approx 0{,}16.$

3. $P(-2 \leqslant Z \leqslant 2) \approx 0{,}95.$

55 **1. a.** $P(35 < T < 65)$

$= P(\mu - 3\sigma < T < \mu + 3\sigma)$

$\approx 0{,}9973.$

b. $P(T \geqslant 65) \approx 0{,}0013.$

2. $P(T \leqslant t) = 0{,}25.$

Sur un tableur, `=LOI.NORMALE.INVERSE(0,25;50;5)` donne $t \approx 46{,}628$.

56 Réponse b.

57 Réponse a.

58 **1.** Réponse c.

2. Réponses b. et c.

59 **1.** Réponse c.

2. Réponses a, d.

3. Réponses b, c, d.

60 Faux $P(T = 30) = 0.$

61 Vrai $P(T \leqslant 180) = \dfrac{180}{300} = 0{,}6.$

62 Faux $P(T > 100) = \dfrac{200}{300} = \dfrac{2}{3}.$

63 Faux $P(T \leqslant t) = \int_0^t e^{-x}\,dx.$

64 Vrai $P(X \geqslant 1) = 1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}.$

65 Faux $P(X \geqslant 2) = e^{-2}$

$P(X \geqslant 5) = e^{-5}$ et $P(X \geqslant 10) = e^{-10}$, or $e^{-2} \times e^{-5} \neq e^{-10}$.

66 Faux.

T suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

67 Vrai.

$P\left(T \geqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = P\left(\dfrac{X-10}{\sigma} \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right)$

$= P(X \leqslant 12) = 1 - P(X > 12)$

$= 1 - \dfrac{1 - P(8 \leqslant X \leqslant 12)}{2} = \dfrac{1 + 0{,}6}{2} = 0{,}8$

68 Vrai.

$P\left(T \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0{,}8$ donne $\dfrac{2}{\sigma} \approx 0{,}842$

d'où $\sigma \approx \dfrac{2}{0{,}842} \approx 2{,}375.$

Évaluer ses capacités

69 **1.** $P(T > 30) = \dfrac{1}{2}.$

2. $P(T < 10) = \dfrac{1}{6}.$

3. $P(T > 30 \text{ ou } T < 10) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}.$

70 **1.** $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 100.$

2. $P(X \leqslant k) = \int_0^k 0{,}01e^{-0{,}01x}\,dx = 1 - e^{-0{,}01k}.$

3. $P(X \geqslant 40) = e^{-0{,}4} \approx 0{,}670.$

$P(40 \leqslant X \leqslant 60) = \int_{40}^{60} 0{,}01e^{-0{,}01x}\,dx$

$= e^{-0{,}4} - e^{-0{,}6} \approx 0{,}122.$

4. a. $P_{X>40}(X \leqslant 60) = \dfrac{P(40 < X \leqslant 60)}{P(X > 40)} \approx \dfrac{0{,}122}{0{,}670} \approx 0{,}181.$

b. $P_{X>40}(X \leqslant 60) = 1 - P_{X>40}(X > 60) = 1 - P(X > 20)$

$= P(X \leqslant 20) \approx 0{,}181.$

71 **1. a.** • $P(X \leqslant 80) \approx 0{,}369$

• $P(Y \leqslant 65) \approx 0{,}867$

• $P(X \leqslant 80 \text{ et } Y \leqslant 65) =$

$P(X \leqslant 80) \times P(Y \leqslant 65) \approx 0{,}320$ car les événements « $X \leqslant 80$ » et « $Y \leqslant 65$ » sont indépendants.

b. $P(\text{non}(X \leqslant 80 \text{ et } Y \leqslant 65)) \approx 1 - 0{,}320 \approx 0{,}680.$

2. On cherche les plus petits entiers x et y tels que $P(X > x) \leqslant 0{,}05$ et $P(Y > y) \leqslant 0{,}05$.

• Comme $P(X > x) = 0{,}05$ ou encore $P(X \leqslant x) = 0{,}95$ est vérifié pour $x \approx 109{,}7$.

L'entreprise doit disposer d'un stock de 110 meubles M_1.

• Comme $P(Y > y) = 0{,}05$ ou encore $P(Y \leqslant y) = 0{,}95$ est vérifié pour $y \approx 69{,}8$.

L'entreprise doit disposer d'un stock de 70 meubles M_2.

72 **a.** Si X suit la loi uniforme sur $[0 ; a]$ avec $a > 5$, $P(X \leqslant 5) = 0{,}4$ équivaut à $\frac{5}{a} = 0{,}4$ d'où $a = \frac{5}{0{,}4} = 12{,}5$.

b. Si X suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ $P(X \leqslant 5) = 0{,}4$ équivaut à $1 - e^{-5\lambda} = 0{,}4$ soit $e^{-5\lambda} = 0{,}6$.

$\lambda = -\frac{1}{5}\ln(0{,}6)$ d'où $\lambda \approx 0{,}102$.

c. Si X suit une loi normale de moyenne $\mu = 6$, $P(X \leqslant 5) = 0{,}4$ équivaut à $P\left(\frac{X-6}{\sigma} \leqslant \frac{-1}{\sigma}\right) = 0{,}4$ avec $Z = \frac{X-6}{\sigma}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Or $P\left(Z \leqslant -\frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}4$ est vérifié pour $-\frac{1}{\sigma} = -0{,}253$ soit $\sigma \approx 3{,}95$.

d. Si X suit une loi normale d'écart-type $\sigma = 2$, $P(X \leqslant 5) = 0{,}4$ équivaut à $P\left(\frac{X-\mu}{2} \leqslant \frac{5-\mu}{2}\right) = 0{,}4$ avec $T = \frac{X-\mu}{2}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Or $P\left(T \leqslant \frac{5-\mu}{2}\right) = 0{,}4$ est vérifié pour

$\frac{5-\mu}{2} \approx -0{,}253$ d'où $\mu \approx 5{,}51$.

APPROFONDISSEMENT

73 **1. a.** • Comme $0 \leqslant U < 1$, on a $1 - U > 0$ et donc $\ln(1 - U)$ est bien définie.

• Quand U décrit $[0 ; 1[$, $1 - U$ décrit $]0 ; 1]$ et $\ln(1 - U)$ prend ses valeurs dans $]-\infty ; 0]$.

D'où $T = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ prend bien ses valeurs dans $[0 ; +\infty[$.

b. Pour $t \geqslant 0$,

$$P(T \leqslant t) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant t\right) = P(\ln(1-U) \geqslant -\lambda t)$$

$$= P(1 - U \geqslant e^{-\lambda t}) = P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda t}).$$

Comme U suit la loi uniforme sur $[0 ; 1[$,

$$P(T \leqslant t) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

c. Pour $t \geqslant 0$, $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx = P(T \leqslant t)$

D'où $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Comme F est la primitive de f s'annulant pour $t = 0$, on a, pour $t \geqslant 0$, $F'(t) = f(t)$ et donc $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

On en déduit que T suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0 ; +\infty[$.

2. • U = ALEA() suit la fonction uniforme sur $[0 ; 1[$.

• $T_1 = -0{,}125*\ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{0{,}125} = 8$.

T_1 simule donc le tirage au hasard d'un nombre dans $[0 ; +\infty[$ selon cette loi.

• $T_2 = -0{,}125*\ln(U)$ n'est pas définie lorsque U prend la valeur 0.

T_2 prend ses valeurs dans $]0 ; +\infty[$ et simule le tirage au hasard d'un nombre dans cet intervalle selon la loi uniforme de paramètre $\lambda = 8$.

Comme $P(T_1 = 0) = P(U = 0) = 0$, on peut considérer que T_1 et T_2 simulent de la même façon le tirage au hasard d'un réel selon la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 8$.

3. L'instruction `=–0,005*ln(1–ALEA())` ou `=–0,005*ln(ALEA())` d'un tableur simule la réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre

$\lambda = \frac{1}{0{,}005} = 200$.

Voici une série de 10 valeurs ainsi obtenues :

réalisation 1	0,01379291
réalisation 2	0,00442211
réalisation 3	0,00152492
réalisation 4	0,00160623
réalisation 5	0,00230765
réalisation 6	0,00107045
réalisation 7	0,00118653
réalisation 8	0,00363317
réalisation 9	0,00036348
réalisation 10	0,00017155

74 Soit T la variable aléatoire modélisant le temps écoulé, en heures, entre 13 h et l'instant où Théo quitte son domicile. T suit la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

L'heure à laquelle Théo parvient au lieu de rendez-vous est donné par la variable aléatoire $13 + T + T + 0{,}5 = 2T + 13{,}5$.

a. $P(2T + 13{,}5 \leqslant 15{,}25) = P(T \leqslant 0{,}875) = 0{,}875$.

b. $P(2T + 13{,}5 = 15) = P(T = 0{,}75) = 0$.

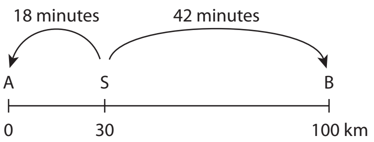
c. $P\left(2T + 13{,}5 > 15{,}25 + \frac{9}{60}\right) = P(T = 0{,}95) = 0{,}05$.

d. $P\left(14 + \frac{54}{60} < 2T + 13{,}5 < 15 + \frac{6}{60}\right)$

$= P(14{,}9 < 2T + 13{,}5 < 15{,}1)$

$= P(0{,}7 < T < 0{,}8) = 0{,}1$.

75



1. X suit la loi uniforme sur [0 ; 100].

• Si $0 \leqslant X \leqslant 30$, $T = \dfrac{30 - X}{100} \times 60 = 0{,}6(30 - X)$

(en minutes) et donc $0 \leqslant T \leqslant 18$ (en minutes)

• Si $30 \leqslant X \leqslant 100$, $T = \dfrac{X - 30}{100} \times 60 = 0{,}6(X - 30)$

(en minutes) et donc $0 \leqslant T \leqslant 42$.

T prend donc ses valeurs dans $I = [0 ; 42]$.

2. • $P(T > 30)$?

« $T > 30$ » se réalise lorsque l'accident se produit sur le segment [SB], pour X tel que $0{,}6(X - 30) > 30$, c'est-à-dire $X > 80$.

D'où $P(T > 30) = P(X > 80) = \dfrac{100 - 80}{100} = 0{,}2$.

• $P(T > 9)$?

« $T > 9$ » se réalise :

– soit lorsque l'accident se produit sur le segment [AS], avec dans ce cas X tel que $0{,}6(30 - X) > 9$, c'est-à-dire $X < 15$.

– soit lorsque l'accident se produit sur le segment [SB], avec dans ce cas X tel que $0{,}6(X - 30) > 9$, c'est-à-dire $X > 45$.

D'où $P(T > 9) = P(X < 15) + P(X > 45)$

$$= \frac{15}{100} + \frac{100 - 45}{100} = 0{,}7.$$

3. $P(T > t)$ pour $t \in [0 ; 42]$?

• Si $t > 18$, l'événement « $T > t$ » se réalise lorsque l'accident survient sur [SB] avec X tel que $0{,}6(X - 30) > t$, c'est-à-dire $X > \dfrac{t}{0{,}6} + 30$, ou encore $X > \dfrac{5}{3}t + 30$.

D'où si $t > 18$, $P(T > t) = P\left(X > \dfrac{5}{3}t + 30\right)$

$$= \frac{100 - \left(\frac{5}{3}t + 30\right)}{100} = \frac{210 - 5t}{300}.$$

Remarque : On peut vérifier que $P(T > 42) = 0$ et retrouver que $P(T > 30) = 0{,}2$.

• Si $t \leqslant 18$, l'événement « $T > t$ » se réalise :

– soit lorsque l'accident survient sur [SB] avec X tel que $0{,}6(X - 30) > t$, c'est-à-dire $X > \dfrac{5}{3}t + 30$.

– soit lorsque l'accident survient sur [AS] avec X tel que $0{,}6(30 - X) > t$, c'est-à-dire $X < 30 - \dfrac{5}{3}t$.

D'où si $t \leqslant 18$,

$$P(T > t) = P\left(X > \frac{5}{3}t + 30\right) + P\left(X < 30 - \frac{5}{3}t\right)$$

$$= \frac{100 - \left(\frac{5}{3}t + 30\right)}{100} + \frac{30 - \frac{5}{3}t}{100} = 1 - \frac{t}{30}.$$

Remarque : on peut retrouver que

$P(T > 9) = 1 - \dfrac{9}{30} = 0{,}7$.

4. T ne suit pas la loi uniforme sur [0 ; 42].

En effet, on devrait avoir :

$P(T > 9) = \dfrac{42 - 9}{42} = \dfrac{33}{42}$ et $P(T > 30) = \dfrac{42 - 30}{42} = \dfrac{2}{7}$

alors que l'on a : $P(T > 9) = 0{,}7$ et $P(T > 30) = 0{,}2$.

76 X suit la loi $\mathcal{N}(3{,}4 ; 0{,}25^2)$

Y suit la loi $\mathcal{N}(3{,}2 ; 0{,}25^2)$

1. On cherche x tel que

$P(-x \leqslant X - 3{,}4 \leqslant x) = 0{,}5$

ou $P\left(\dfrac{-x}{0{,}25} \leqslant \dfrac{X - 3{,}4}{0{,}25} \leqslant \dfrac{x}{0{,}25}\right) = 0{,}5$

avec $Z = \dfrac{X - 3{,}4}{0{,}25} = 4(X - 3{,}5)$ suivant la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Mais $P\left(-\dfrac{x}{0{,}25} \leqslant Z \leqslant \dfrac{x}{0{,}25}\right) = 0{,}5$

équivaut à $2\,P\left(Z \leqslant \dfrac{x}{0{,}25}\right) - 1 = 0{,}5$

soit $P(Z \leqslant 4x) = 0{,}75$.

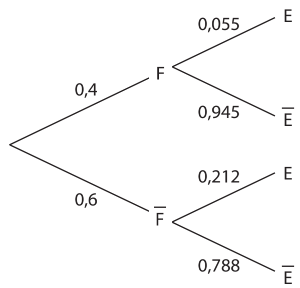
Une calculatrice ou un logiciel donne $4x \approx 0{,}674$ soit $x \approx 0{,}169$.

Interprétation : La probabilité que le poids d'un nouveau-né garçon ne s'écarte pas de sa moyenne 3,4 kg de plus de 170 grammes est égale à 0,5.

2. a. $P(X > 3{,}6) \approx 0{,}212$ et $P(Y > 3{,}6) \approx 0{,}055$.

Notons F l'événement « le nouveau-né est une fille » et E l'événement « le nouveau-né pèse plus de 3,6 kg ».

On peut alors illustrer la situation par l'arbre pondéré suivant :



$P(E) = P(F)P_F(E) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(E) = 0{,}4 \times 0{,}055 + 0{,}6 \times 0{,}212$

$\approx 0{,}149$.

b. On cherche $P_E(F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)} \approx \dfrac{0{,}4 \times 0{,}055}{0{,}149} \approx 0{,}148$.

77 **1. a.** $P(X > 190) \approx 0{,}159$

b. $P(Y > 180) \approx 0{,}748$

2. Notons E l'événement « l'adhérent a un score dépassant de 20 cm la moyenne de sa catégorie » et F l'événement « l'adhérent est une fille ».

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) = P(F) + P_F(E) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(E)$$
$$= 0{,}4P(X > 190) + 0{,}6P(Y > 180)$$
$$\approx 0{,}4 \times 0{,}159 + 0{,}6 \times 0{,}748$$
$$\approx 0{,}512.$$

78 X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}08$.

1. a. $P(1 < X < 5) = e^{-0{,}08} - e^{-0{,}4} \approx 0{,}253$.

b. $P(X > 2) = e^{-0{,}16} \approx 0{,}852$.

c. $P_{X>2}(X < 4) = \dfrac{P(2 < X < 4)}{P(X > 2)} = \dfrac{e^{-0{,}16} - e^{-0{,}32}}{e^{-0{,}16}} \approx 0{,}148$.

ou mieux : $P_{X>2}(X < 4) = 1 - P_{x>2}(X \geqslant 4) = 1 - P(X \geqslant 2)$
$= P(X < 2) = 1 - e^{-0{,}16} \approx 0{,}148$.

2. On cherche le plus grand nombre $t > 0$ tel que $P(X < t) < 0{,}01$, soit $1 - e^{-0{,}08t} < 0{,}01$

$e^{-0{,}08t} > 0{,}99 \Leftrightarrow t > \dfrac{-1}{0{,}08}\ln(0{,}99) \Leftrightarrow t > 0{,}126$.

La probabilité de manquer un signal reste inférieure à 0,01 tant que la lecture du journal n'excède pas 0,126 heures, soit 7,5 minutes environ.

79 **1.** $P(8{,}45 < X < 8{,}70) \approx 0{,}9759$

$P(5{,}07 < Y < 5{,}33) \approx 0{,}9907$

2. a. $P(8{,}45 < X < 8{,}70 \text{ et } 5{,}04 < Y < 5{,}33) \approx 0{,}9668$, en raison de l'indépendance des 2 substances.

La probabilité qu'une pilule soit « hors-normes » est donc environ 1 – 0,9668 = 0,0332.

Le pourcentage de telles pilules pourrait être de l'ordre de 3 %.

b. Le procédé de fabrication doit donc être remis en question.

80 Si X est la variable aléatoire modélisant le poids net de fleur de sel.

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}(201{,}6\,;0{,}9^2)$.

$P(X < 200) \approx 0{,}038$

2. On recherche μ tel que $P(X < 200) \leqslant 0{,}03$ qui s'écrit encore : $P\left(\dfrac{X-\mu}{0{,}9} < \dfrac{200-\mu}{0{,}9}\right) \leqslant 0{,}03$,

avec $Z = \dfrac{X-\mu}{0{,}9}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Or $P(Z < z) = 0{,}03$ est vérifié pour $z \approx -1{,}881$ d'où $P\left(Z < \dfrac{200-\mu}{0{,}9}\right) \leqslant 0{,}03$ pour $\dfrac{200-\mu}{0{,}9} \leqslant -1{,}881$, soit $\mu \geqslant 201{,}7$.

81 Soit X la variable aléatoire modélisant la glycémie d'un individu pris au hasard dans cette population. X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$.

On cherche μ et σ tels que : $P(X < 0{,}82) = 0{,}2$ et $P(X > 0{,}98) = 0{,}3$.

$\begin{cases} P(X < 0{,}82) = 0{,}2 \\ P(X > 0{,}98) = 0{,}3 \end{cases}$ équivaut à

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{0{,}82-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}2 \\ P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{0{,}98-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}3 \end{cases}$$

avec $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Or $\begin{cases} P(Z < t) = 0{,}2 \\ P(Z < t') = 0{,}3 \end{cases}$ donne $\begin{cases} t \approx -0{,}8416 \\ t' \approx -0{,}5244 \end{cases}$.

D'où le système $\begin{cases} \dfrac{0{,}82-\mu}{\sigma} = -0{,}8416 \quad (1) \\ \dfrac{0{,}98-\mu}{\sigma} = -0{,}5244 \quad (2) \end{cases}$

soit $\begin{cases} \dfrac{0{,}82-\mu}{\sigma} = -0{,}8416 \quad (1) \\ \dfrac{0{,}16}{\sigma} = 0{,}3172 \quad (2)-(1) \end{cases}$

soit $\begin{cases} \mu = 1{,}244 \\ \sigma = 0{,}504 \end{cases}$

PROBLÈMES

82 **A. a.** $P(X < 17{,}50) = \dfrac{17{,}50 - 10}{35 - 10} = \dfrac{7{,}5}{25} = 0{,}3$.

b. $P(19 \leqslant X \leqslant 27) = \dfrac{27-19}{25} = \dfrac{8}{25} = 0{,}32$.

B. 1. Y prend ses valeurs dans]0 ; 5].

Exemples

demandé	10	11,25	14,85	14,99	15
payé	15	15	15	15	20
pourboire	5	3,75	0,15	0,01	5

2. a. $P(Y \leqslant 1) = P(19 \leqslant X < 20 \text{ ou } 24 \leqslant X < 25)$
$= \dfrac{20-19}{27-19} + \dfrac{25-24}{27-19} = \dfrac{1}{4}$.

b. $P(Y \leqslant 2) = P(19 \leqslant X < 20 \text{ ou } 23 \leqslant X < 25) = \dfrac{3}{8}$.

c. $P(Y > 3) = P(20 \leqslant X < 22 \text{ ou } 25 \leqslant X < 27) = \dfrac{1}{2}$.

d. $P(Y > 4) = P(20 \leqslant X < 21 \text{ ou } 25 \leqslant X < 26) = \dfrac{1}{4}$.

3. a. $P(Y \leqslant 2) = P(13 \leqslant X < 15 \text{ ou } 18 \leqslant X < 20$
$\text{ou } 23 \leqslant X < 25 \text{ ou } 28 \leqslant X < 30$
$\text{ou } 33 \leqslant X < 35)$
$= 5 \times \dfrac{2}{25} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

b. • Pour $t \in]0\,;\,5]$, $P(Y \leqslant t) = P(15 - t \leqslant X < 15$ ou $20 - t \leqslant X < 20$ ou $25 - t \leqslant X < 25$ ou $30 - t \leqslant X < 30$ ou $35 - t \leqslant X < 35) = 5 \times \dfrac{t}{25} = \dfrac{t}{5}$.

- Pour $t = 0$, $P(Y \leqslant 0) = P(Y = 0) = 0$.

D'où, en réunissant les deux cas :

pour $t \in [0\,;5]$, $P(Y \leqslant t) = \dfrac{t}{5}$.

Si $[a\,;b] \subset [0\,;5]$, $P(Y \in [a\,;b]) = P(Y \leqslant b) - P(Y < a)$

$$= \frac{b}{5} - \frac{a}{5} = \frac{b-a}{5}.$$

Y suit donc bien une loi uniforme.

83 **1. a.** $P(T < 1) = \int_0^1 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t}\, dt$

$$= \left[-e^{-\frac{1}{3}t}\right]_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}283.$$

b. $P(T > 2) = 1 - P(T \leqslant 2) = e^{-\frac{2}{3}} \approx 0{,}513$.

2. a. $P(T < 2) = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0{,}487$ d'où $p \approx 0{,}487$.

b. Lorsqu'on répète 50 fois l'épreuve où la Diva quitte l'opéra Bastille, la variable aléatoire X qui compte les succès « Retour en métro » dont la probabilité est p, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;p)$.

$E(X) = 50p \approx 24{,}35$.

c. $Y = 1X + 10(50 - X)$

$Y = -9X + 500$.

X prenant pour valeurs : 0, 1, 2, …, 50.

Y prend pour valeurs : 500, 491, 482, …, 50.

C'est-à-dire $500 - 9k$, où k est entier, $0 \leqslant k \leqslant 50$.

La loi de probabilité de Y est donnée, pour k entier, $0 \leqslant k \leqslant 50$, par :

$P(Y = 500 - 9k) = P(X = k)$

$$= \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k}.$$

Comme $Y = -9X + 500$,

$E(Y) = -9E(X) + 500 \approx -9 \times 24{,}35 + 500 \approx 280{,}85$ euros.

84 **A. 1. a.** N prend pour valeurs tous les entiers non nuls.

b. $P(N = 1) = \dfrac{1}{10}$

$P(N = 2) = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{10}$

$P(N = k) = \left(\dfrac{9}{10}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{10}$

c. • $P(N \leqslant n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \times \frac{1}{10}$.

Cela revient à sommer les n premiers termes de la suite géométrique (u_n) avec $u_n = \left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{10}$.

D'où $P(N \leqslant n) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^n}{1 - \dfrac{9}{10}}$

soit $P(N \leqslant n) = 1 - (0{,}9)^n$.

- D'où $P(N > n) = (0{,}9)^n$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} P(N > n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$.

La probabilité que l'obtention de la boule rouge nécessite n tirages est aussi proche de 0 que l'on veut, pour n suffisamment grand.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, chaque rectangle R_k a pour base $[k - 1\,; k]_{k-1}$ et pour hauteur $P_k = P(N = k) = 0{,}9^{k-1} \times 0{,}1$.

3. a. L'aire de R_k est égale à $1 \times P_k = 0{,}9^{k-1} \times 0{,}1$.

b. $P(N \leqslant 5)$ correspond à la somme des aires des rectangles R_1 à R_5.

$$P(N \leqslant 5) = \sum_{k=1}^{5} 0{,}9^{k-1} \times 0{,}1 = 1 - 0{,}9^5 \approx 0{,}4095.$$

De même :

$$P(10 < N \leqslant 20) = \sum_{k=11}^{20} \text{Aire}(R_k)$$

$= P(N \leqslant 20) - P(N \leqslant 10)$

$= (1 - 0{,}9^{20}) - (1 - 0{,}9^{10})$

$= 0{,}9^{10} - 0{,}9^{20} \approx 0{,}2271$.

$$P(N > 25) = \sum_{k \geqslant 26} \text{Aire}(R_k)$$

$= 1 - P(N \leqslant 25)$

$= 0{,}9^{25} \approx 0{,}718$.

B. 1. La fonction de densité d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par :

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour $x \in [0\,; +\infty[$.

$f(0) = 0{,}1 \Leftrightarrow \lambda = 0{,}1$.

2. a. On observe que l'ajustement de l'histogramme par la courbe de f est satisfaisant.

c. Les valeurs de « Aire_tCourbe » et de « Aire_tHisto » sont assez proches, pour une même valeur de t.

3. a. $I(n) = \int_0^n 0{,}1e^{-0{,}1x}\, dx = \left[-e^{-0{,}1x}\right]_0^n = 1 - e^{-0{,}1n}$.

On avait obtenu $P(N \leqslant n) = 1 - 0{,}9^n$.

En écrivant $I(n) = 1 - e^{-0{,}1n} = 1 - (e^{-0{,}1})^n$ et en remarquant que $e^{-0{,}1} \approx 0{,}9048$, on conforte l'idée que $I(n) = \int_0^n f(x)\, dx$ peut être pris comme approximation de $P(N \leqslant n)$.

b. • $P(N \leqslant 5)$ peut être approché par :

$I(5) = \int_0^5 f(x)\, dx = 1 - e^{-0{,}1\times5} \approx 0{,}3935$.

- $P(10 < N \leqslant 20) = P(N \leqslant 20) - P(N \leqslant 10)$ peut être approché par :

$I(20) - I(10) = \int_{10}^{20} f(x)\, dx = e^{-0{,}1\times10} - e^{-0{,}1\times20} \approx 0{,}2325$.

- $P(N > 25) = 1 - P(N \leqslant 25)$ peut être approché par :

$1 - I(25) = 1 - \int_0^{25} f(x)\, dx = e^{-0{,}1\times25} \approx 0{,}0821$.

c.

	aire histogramme	aire sous courbe	écart (h - c)
P(N<=5)	0,4095	0,3935	0,0160
P(10<N<=20)	0,2271	0,2325	-0,0054
P(N>25)	0,0718	0,0821	-0,0103

Les calculs de ces trois probabilités effectués à partir de l'histogramme puis à partir de la courbe de densité de la loi exponentielle fournissent des résultats très voisins.

85 **1. a.** L'algorithme fait appel 12 fois à la fonction random.

b. En sortie d'algorithme, la variable x est la somme de 12 réalisations de la fonction random.

c. La moyenne de la fonction random est 0,5.

La moyenne des valeurs de x en sortie d'algorithme est donc 6 et celle de $x - 6$ est 0.

d. La variance des valeurs de x en sortie d'algorithme est $12 \times \dfrac{1}{12} = 1$.

Celle de $x - 6$ est la même que celle de x c'est-à-dire 1.

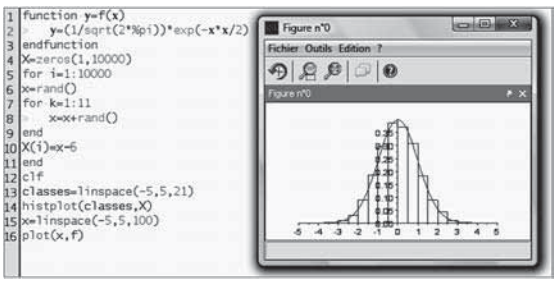
2. Algorithme modifié (en gras)

```
Pour i = 1 à 10 000
    Affecter à x la valeur random
    Pour k allant de 1 à 11
        Affecter à x la valeur x + random
    FinPour
Affecter à X(i) la valeur x – 6
FinPour
Afficher la liste X
```

3. La densité de la loi normale centrée réduite correspond au « profil » de l'histogramme normalisé des fréquences des 10 000 simulations.

On peut considérer que l'algorithme de la question 1. simule assez correctement une réalisation d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Exemple d'implantation sur Scilab :



86 **A.** X suit la loi normale $\mathcal{N}(35\,000\,;5\,000^2)$.

1. a. $P(X < 22\,500) \approx 0{,}0062$

b. $P(25\,000 < X < 40\,000) \approx 0{,}8186$

c. $P(X \geqslant 45\,000) \approx 0{,}0228$

2. On cherche le plus petit réel x tel que $P(X \leqslant x) > 0{,}75$. Or $P(X \leqslant x) = 0{,}75$ conduit, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, à $x \approx 38\,372{,}45$ km.

Comme la fonction $x \mapsto P(X \leqslant x)$ est croissante, on aura $P(X \leqslant x) > 0{,}75$ pour $x \geqslant 38\,573$ (km).

B. X suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$.

1. $E(X) = 35\,000 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} = 35\,000 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{35\,000}$.

On a donc $\lambda \approx 0{,}0000286$.

2. a. $P(X < 22\,500) = 1 - e^{-22500\lambda} \approx 0{,}4742$.

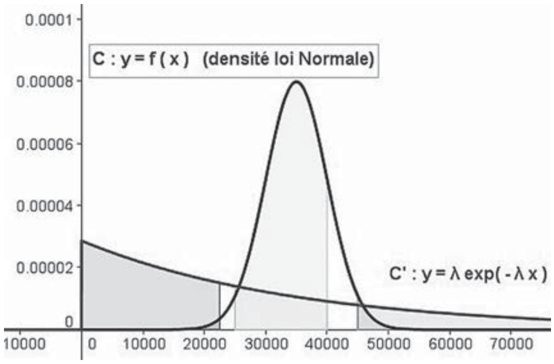
b. $P(25\,000 < X < 40\,000) \approx 0{,}1706$.

c. $P(X \geqslant 45\,000) \approx 0{,}2765$.

C. 1. Les courbes de densité sont représentatives des fonctions f et g telles que :

- $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

avec ici : $\mu = 35\,000 \quad \sigma = 5\,000 \quad \lambda = 0{,}0000286$.



2. a. Les allures, très différentes, des deux courbes justifient les résultats très différents obtenus dans les deux modèles.

Remarque : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Mais l'allure de $\mathscr{C}$ permet de comprendre pourquoi on peut se limiter à l'intervalle $[0, +\infty[$. D'ailleurs le tableur donne pour $P(X < 0)$ une valeur nulle à 10^{-12} près.

b. Il s'agit de proposer un nombre N tel que les aires sous $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $[0\,;N]$ soient proches.

L'observation du graphique peut conduire à proposer une valeur de N proche de 35 000.

Plus précisément, on obtiendrait sur un tableur : $N \approx 37\,000$ (km)

En effet, on a : $P(X \leqslant 37\,000) \approx 0{,}655$ dans le modèle « normal » et $P(X \leqslant 37\,000) \approx 0{,}653$ dans le modèle exponentiel.

c. C'est à vous de voir !

87 **1. a.** On cherche la plus petite valeur de μ telle que $P(X < 100) < 0{,}001$, soit encore

$P\left(\dfrac{X-\mu}{2} < \dfrac{100-\mu}{2}\right) < 0{,}001$ avec $Z = \dfrac{X-\mu}{2}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Or le quantile z de la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$ tel que $P(Z < z) = 0{,}001$ est $z \approx -3{,}09$ (en utilisant une calculatrice ou un logiciel).

On aura donc $P\left(Z < \dfrac{100-\mu}{2}\right) < 0{,}001$ pour

$\dfrac{100-\mu}{2} < -3{,}090$ (car la fonction $z \mapsto P(Z < z)$ est croissante).

On trouve alors $\mu > 106{,}180$.

b. On prend $\mu = 106{,}18$.

Remarque : Avec cette valeur de μ, on obtient $P(X < 100) \approx 0{,}0010008$.

Prendre $\mu = 106{,}19$ aurait été plus sûr pour respecter la réglementation !

Avec $\mu = 106{,}16$ et $\sigma = 2$, $P(X > 110) \approx 0{,}028$.

2. a. On cherche la plus grande valeur de μ telle que $P(X > 110) < 0{,}01$.

Or $P(X > 110) < 0{,}01$ s'écrit aussi

$P\left(\dfrac{X-\mu}{2} > \dfrac{110-\mu}{2}\right) < 0{,}01$ avec $Y = \dfrac{X-\mu}{2}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Cherchons le nombre y tel que $P(Y > y) = 0{,}01$ ou encore $P(Y \leqslant y) = 0{,}99$.

On trouve $y \approx 2{,}326$ et donc $P(Y > y) < 0{,}01$ lorsque $y > 2{,}326$ (car la fonction $y \mapsto P(Y > y)$ est décroissante).

On prend donc μ tel que $\dfrac{110-\mu}{2} > 2{,}326$ soit $\mu \approx 105{,}34$.

b. Avec $\mu = 105{,}34$ et $\sigma = 2$, $P(X < 100) \approx 0{,}0038$.

Ce réglage, plus favorable pour la coopérative, donne une probabilité plus importante de ne pas satisfaire la réglementation.

3. On cherche μ et σ tels que :

$P(X < 100) < 0{,}001$ et $P(X > 110) < 0{,}01$, ou encore tels que : $P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{100-\mu}{\sigma}\right) < 0{,}001$

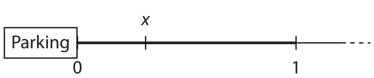
$P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} > \dfrac{110-\mu}{\sigma}\right) < 0{,}01$.

En reprenant les démarches adoptées aux questions 1.a. et 2.a. on obtient : $\begin{cases} \dfrac{100-\mu}{\sigma} < -3{,}090 \\ \dfrac{110-\mu}{\sigma} > 2{,}326 \end{cases}$.

En prenant, par exemple,

$\dfrac{100-\mu}{\sigma} = -3{,}10$ et $\dfrac{110-\mu}{\sigma} = 2{,}33$ et en résolvant le système, on obtient : $\mu \approx 105{,}70$ et $\sigma \approx 1{,}84$.

88



• Notons E l'événement : « la clé se trouve sur le tronçon $[0\,;1]$ ». On a, par hypothèse, $P(E) = p$ et donc $P(\overline{E}) = 1 - p$.

• Notons E_x l'événement : « la clé se trouve sur le tronçon $[0\,;x]$ » E_x peut s'écrire $E \cap (0 \leqslant D \leqslant x)$ et $P(E_x) = P(E) \times P_E(0 \leqslant D \leqslant x) = p \times \dfrac{x}{1} = px$.

• Notons F_x l'événement : « la clé se trouve sur le tronçon $[x\,;1]$ ».

F_x peut s'écrire $E \cap (x \leqslant D \leqslant 1)$

et $P(F_x) = P(E)\,P_E(x \leqslant D \leqslant 1) = p \times \dfrac{1-x}{1} = p(1-x)$.

1. On calcule ici :

$q(x) = P_{\overline{E_x}}(F_x) = \dfrac{P(\overline{E_x} \cap F_x)}{P(\overline{E_x})} = \dfrac{P(F_x)}{P(\overline{E_x})} = \dfrac{p(1-x)}{1-px}$.

2. Lorsque $x = \dfrac{1}{2}$, $q\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{p}{2-p}$.

On n'a donc pas $q\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{p}{2}$ pour $p \in]0\,;1[$.

89 Si X est la durée de vie du composant, en mois, alors l'énoncé donne : $P(X \geqslant 150) = 0{,}85$.

X suivant une loi exponentielle de paramètre λ, $P(X \geqslant 150) = 0{,}85$ peut s'écrire $e^{-150\lambda} = 0{,}85$ soit $\lambda = -\dfrac{1}{150}\ln(0{,}85)$.

On cherche maintenant t tel que $P(X \geqslant t) > 0{,}9$, c'est-à-dire $e^{-\lambda t} > 0{,}9$, soit $-\lambda t > \ln(0{,}9)$, soit $t < -\dfrac{\ln(0{,}9)}{\lambda}$ ou $t < 150 \times \dfrac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}85)}$.

Comme $150 \times \dfrac{\ln(0{,}9)}{\ln(0{,}85)} \approx 97{,}245$, on remplacera le composant au bout de 97 mois.

90 $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \dfrac{2}{9}$ équivaut à $\displaystyle\int_1^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \dfrac{2}{9}$ soit $e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = \dfrac{2}{9}$ (1).

• En posant $e^{-\lambda} = t$, on est amené à résoudre : $t - t^2 = \dfrac{2}{9}$ soit $t^2 - t + \dfrac{2}{9} = 0$ ou encore $9t^2 - 9t + 2 = 0$.

Cette équation a deux solutions :

$t = \dfrac{9-3}{18} = \dfrac{1}{3}$ ou $t = \dfrac{9+3}{18} = \dfrac{2}{3}$.

• L'équation (1) équivaut donc à $e^{-\lambda} = \dfrac{1}{3}$ ou $e^{-\lambda} = \dfrac{2}{3}$ d'où $\lambda = \ln 3$ ou $\lambda = \ln 1{,}5$.

Il existe donc deux lois exponentielles répondant à la question, de paramètres $\lambda = \ln 3 \approx 1{,}1$ et $\lambda = \ln 1{,}5 \approx 0{,}4$.

91 Soit T la variable aléatoire modélisant la taille d'un individu pris au hasard dans la population concernée.

T suit la loi normale $\mathcal{N}(171{,}5\,;5^2)$.

Dans cette population, la fréquence des postulants refusés est $\dfrac{379}{500} = 0{,}758$.

Si t_0 est la taille minimale exigée, on peut en obtenir une estimation en posant $P(T < t_0) = 0{,}758$.

Sur un tableur, l'instruction

`=LOI.NORMALE.INVERSE(0,758;171,5;5)` donne $t_0 \approx 175$.

Une estimation de la taille minimale exigée est donc 1,75 m.

92 La masse, en grammes, de farine destinée à un paquet pris au hasard définit une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne M et d'écart-type 0,02M. On cherche M tel que $P(X \geqslant 1000) = 0{,}98$,

c'est-à-dire tel que $P(X < 1000) = 0{,}02$.

Or $P(X < 1000) = 0{,}02$ équivaut à

$P\left(\dfrac{X - M}{0{,}02M} < \dfrac{1000 - M}{0{,}02M}\right) = 0{,}02$ avec $Z = \dfrac{X - M}{0{,}02M}$

suivant la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Le réel z tel que $P(Z < z) = 0{,}02$ donné par une calculatrice ou un logiciel est $z \approx -2{,}054$.

En posant $\dfrac{1000 - M}{0{,}02M} = -2{,}054$, on obtient alors $M \approx 1\,042{,}84$ et donc $\sigma \approx 0{,}02M \approx 20{,}86$.

En paramétrant la machine avec $M = 1\,042{,}84$ on peut s'attendre à avoir 98 % de paquets contenant au moins 1 kg de farine.

93 Notons A la variable aléatoire modélisant l'âge d'entrée dans la vie professionnelle d'une personne prise au hasard dans cette population.

A suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

Traduisons l'énoncé par :

$P(A < 20) = 0{,}35$ et $P(A < 24) = 0{,}55$.

- $P(A < 20) = 0{,}35$ s'écrit encore

$P\left(\dfrac{A - \mu}{\sigma} < \dfrac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}35$ avec $\dfrac{A - \mu}{\sigma} = B$ variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Mais $P(B < b) = 0{,}35$ donne (calculatrice ou logiciel) : $b \approx -0{,}385$ soit $\dfrac{20 - \mu}{\sigma} \approx -0{,}385$ (1)

- De même, $P(A < 24) = 0{,}55$ s'écrit

$P\left(B < \dfrac{24 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}55$.

Mais $P(B < b') = 0{,}55$ donne $b' \approx 0{,}126$ soit

$\dfrac{24 - \mu}{\sigma} \approx 0{,}126$ (2)

- (2) – (1) donne $\dfrac{4}{\sigma} \approx 0{,}511$ soit $\sigma \approx 7{,}828$.

En reportant dans (2) : $\sigma \approx 23{,}014$.

A suit donc la loi normale $\mathcal{N}(23{,}01\,;7{,}83^2)$.

- Il reste à calculer $P(A > 25) \approx 0{,}6$.

Conclusion : selon ce modèle on peut s'attendre à ce que 60 % des personnes n'aient pas débuté leur vie professionnelle à 25 ans.

94 **1.** X prenant ses valeurs dans [0 ; 1], $Y = X^2$ prend ses valeurs dans [0 ; 1].

2. a. $P(Y \leqslant 0{,}25) = P(X^2 \leqslant 0{,}25) = P(X \leqslant 0{,}25) = \dfrac{1}{2}$.

b. Non, car on aurait dans ce cas : $P(Y \leqslant 0{,}25) = 0{,}25$.

3. a. Pour $t \in [0\,;1]$:

$P(Y \leqslant t) = P(X^2 \leqslant t) = P(X \leqslant \sqrt{t}) = \sqrt{t}$.

b. Si f est la fonction densité de la loi de Y, on a $P(Y \leqslant t) = \int_0^t f(x)\,dx$ et donc $t \overset{F}{\mapsto} P(Y \leqslant t)$ est une primitive sur [0 ; 1] de la fonction f.

On en déduit : $F(t) = \sqrt{t}$ et donc $f(t) = F'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

95 **1.** U suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;0{,}7^2)$.

$P(4 + U > 2) = P(U > -2) = 1 - P(U \leqslant -2) \approx 0{,}998$.

2. U suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\sigma^2)$.

On cherche pour quelles valeurs de σ on a :

$P(4 + U \leqslant 2) < 0{,}001$ ou $P(U \leqslant -2) < 0{,}001$, ou encore

$P\left(\dfrac{U}{\sigma} \leqslant \dfrac{-2}{\sigma}\right) < 0{,}001$ avec $V = \dfrac{U}{\sigma}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Cherchons le réel v tel que $P(V \leqslant v) = 0{,}001$.

Une calculatrice ou un tableur donne $v \approx -3{,}09$.

Comme $v \mapsto P(V \leqslant v)$ est croissante, on en déduit que $P(V \leqslant v) < 0{,}001$ est vérifié lorsque $v < -3{,}09$.

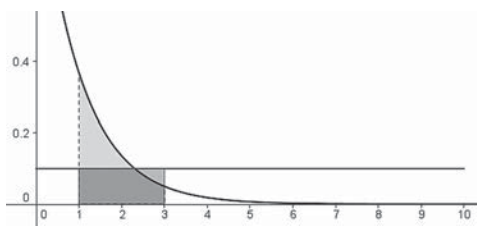
On a donc $P\left(\dfrac{U}{\sigma} \leqslant \dfrac{-2}{\sigma}\right) < 0{,}001$ lorsque $\dfrac{-2}{\sigma} < -3{,}09$,

c'est-à-dire $\sigma \leqslant 0{,}647$.

En conclusion, pour $\sigma \leqslant 0{,}647$ on peut s'attendre à ce que la proposition d'erreurs de transmission d'un chiffre 1 soit inférieure à 0,001.

Accompagnement personnalisé

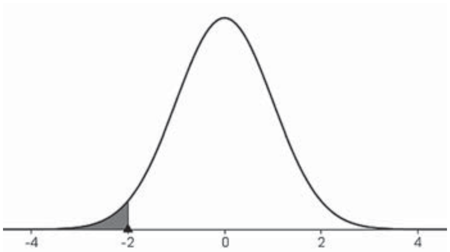
1 **1.**



2. $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \dfrac{3 - 1}{10} = 0{,}2$.

$P(1 \leqslant Y \leqslant 3) = \int_1^3 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^3 = e^{-1} - e^{-3} \approx 0{,}318$.

2 **1. a.**



b. $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = b$.

2. $P(X > 2) = P(X > -2) = a$.

$P(X > 1) = P(1 < X \leqslant 2) + P(X > 2) = b + a$.

$P(0 < X < 1) = P(X > 0) - P(X \geqslant 1)$

$= 0{,}5 - (b + a)$

$= 0{,}5 - a - b$.

$P(-2 < X < -1) = P(1 < X < 2) = b$.

$P(X < -1) = P(X > 1) = a + b$.

$P(-1 < X < 1) = 2\,P(0 < X < 1)$

$= 2(0{,}5 - a - b)$

$= 1 - 2a - 2b$.

3. $a \approx 0{,}023$, $b \approx 0{,}136$.

3 **1. a.** $Z = \dfrac{Y-5}{2}$.

b. $Y < 3$ équivaut à $Z < -1$

$P(Y < 3) = P(Z < -1) \approx 0{,}1587$.

2. a. Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu' ; 2^2)$

$P(Y < 3) = 0{,}04$ équivaut à $P\left(\dfrac{Y-\mu'}{2} < \dfrac{3-\mu'}{2}\right) = 0{,}04$

avec $Z' = \dfrac{Y-\mu'}{2}$ qui suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Or $P(Z' < t) = 0{,}04$ conduit, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, à $t \approx -1{,}75$.

D'où $P\left(Z' < \dfrac{3-\mu'}{2}\right) = 0{,}04$ est vérifié lorsque

$\dfrac{3-\mu'}{2} = -1{,}75$ d'où $\mu' = 6{,}5$.

b. Y suit la loi normale $\mathcal{N}(5 ; \sigma'^2)$

$P(Y < 3) = 0{,}04$ équivaut à $P\left(\dfrac{Y-5}{\sigma'} < \dfrac{-2}{\sigma'}\right) = 0{,}04$ où

$Z'' = \dfrac{Y-5}{\sigma'}$ suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Comme dans 2.a. $P\left(Z'' < -\dfrac{2}{\sigma'}\right) = 0{,}04$ est vérifié

lorsque $-\dfrac{2}{\sigma'} = -1{,}75$, d'où $\sigma' = 1{,}143$.

4 **1. a.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b. $m = f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399$.

c. $P(Z \notin [-5 ; 5]) = 2\,P(Z > 5) = 2(1 - P(Z \leqslant 5))$

$\approx 5{,}73 \times 10^{-7}$.

d. En unités d'aire, si E est ce domaine,

$\mathcal{A}(E) = \int_{-5}^{5} f(x)\,dx = P(-5 \leqslant X \leqslant 5)$

$\approx 1 - 5{,}73 \times 10^{-7}$

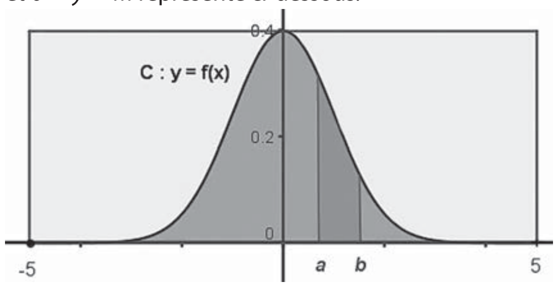
$\approx 0{,}999999427$.

Une valeur approchée à 10^{-6} près de $\mathcal{A}(E)$ est 1.

2. a. X suit la loi uniforme sur $[-5 ; 5]$.

b. Y suit la loi uniforme sur $[0 ; m]$.

c. Une réalisation $(x ; y)$ correspond au choix d'un point au hasard dans le rectangle correspondant à $-5 \leqslant x \leqslant 5$ et $0 \leqslant y \leqslant m$ représenté ci-dessous.



d. Il y a rejet lorsque le point de coordonnées $(x ; y)$ est situé au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

e. La probabilité de rejet correspond à la proportion de l'aire de la partie du rectangle située au-dessus de $\mathscr{C}$, c'est-à-dire $\dfrac{10m-1}{10m} = 1 - \dfrac{\sqrt{2\pi}}{10} \approx 0{,}75$.

f. Pour une valeur x acceptée, la probabilité que x appartienne à $[a, b]$ est le quotient de l'aire bleue et de l'aire verte, soit $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{1} = \int_a^b f(x)\,dx$.

On en déduit qu'une telle valeur x constitue une simulation d'une réalisation de la variable aléatoire Z.

CHAPITRE 14

Échantillonnage et estimation

Pour reprendre contact

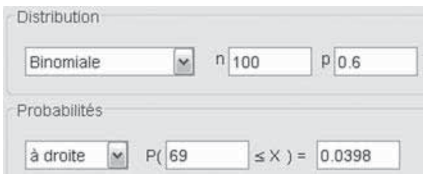
① Avec l'échantillonnage et le loi binomiale

1. On répète 100 fois le tirage d'une boule, avec remise, où le succès : « La boule est rouge » a pour probabilité $p = 0{,}6$.
La variable aléatoire X, qui compte les succès au cours de ces 100 tirages, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;0{,}6)$.
On a alors $E(X) = 100 \times 0{,}6 = 60$; $\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0{,}6 \times 0{,}4} \approx 4{,}90$.

2. Avec une calculatrice ou un logiciel (par exemple, GeoGebra, tableur), on obtient à 10^{-4} près :

a. $P(X = 60) \approx 0{,}0812$ (voir copie d'écran ci-dessous) ;

b. $P(X \leqslant 49) \approx 0{,}0168$; $P(X \leqslant 50) \approx 0{,}0271$; $P(X \geqslant 69) = 1 - P(X \leqslant 68) \approx 0{,}0398$ (voir copie d'écran ci-dessous) ; $P(X \geqslant 70) \approx 0{,}0248$.



② Avec les intervalles de fluctuation

1. $F = \dfrac{X}{100}$. **2.** $I = [0{,}5\,;\ 0{,}7]$; $P(0{,}5 \leqslant F \leqslant 0{,}7) = P(50 \leqslant F \leqslant 70) \approx 0{,}9685$.

3. a. • $P\left(F < \dfrac{a}{n}\right) = P(X < a)$. D'après l'exercice 1, le plus grand entier a tel que $P(X < a) \leqslant 0{,}025$ est égal à 50.

• $P\left(F > \dfrac{b}{n}\right) = P(X > b)$. D'après l'exercice 1, le plus petit entier b tel, que $P(X > b) \leqslant 0{,}025$ est égal à 69.

D'où l'intervalle de fluctuation cherché : $J = \left[\dfrac{50}{100}\,;\ \dfrac{69}{100}\right] = [0{,}50\,;\ 0{,}69]$.

b. $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant F \leqslant \dfrac{b}{n}\right) = 1 - P\left(F < \dfrac{a}{n}\right) - P\left(F > \dfrac{b}{n}\right)$. Comme $P\left(F < \dfrac{a}{n}\right) \leqslant 0{,}025$ et $P\left(F > \dfrac{b}{n}\right) \leqslant 0{,}025$, on en déduit :

$P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant F \leqslant \dfrac{b}{n}\right) \geqslant 0{,}95$. On a donc, ici : $P(0{,}50 \leqslant F \leqslant 0{,}69) \geqslant 0{,}95$.

Remarque : la copie d'écran figurant dans l'énoncé de l'exercice 1 permet de vérifier cette affirmation.

③ Avec le théorème de Moivre-Laplace

D'après le théorème de Moivre-Laplace, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(-1{,}96 \leqslant \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 1{,}96\right) = P(-1{,}96 \leqslant Z \leqslant 1{,}96)$ où Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Avec une calculatrice ou un tableur, on obtient : $P(-1{,}96 \leqslant Z \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}950004$.

Activités

1. Un intervalle de fluctuation « asymptotique » !

1. Le lancer, répété n fois, d'une pièce de monnaie constitue un schéma de Bernouilli où le succès « Pile apparaît » a pour probabilité $p = 0{,}5$. La variable aléatoire X_n qui compte les succès obtenus au cours de ces n lancers suit la loi binomiale de paramètre n et $p = 0{,}5$.

On a alors : $E(X_n) = n \times 0{,}5 = 0{,}5n$; $\sigma(X_n) = \sqrt{n \times 0{,}5 \times 0{,}5} = 0{,}5\sqrt{n}$.

2. a. $P(F_n \in I_n) = P\left(0{,}5 - \dfrac{0{,}98}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{X_n}{n} \leqslant 0{,}5 + \dfrac{0{,}98}{\sqrt{n}}\right) = P\left(0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n} \leqslant X_n \leqslant 0{,}5n + 0{,}98\sqrt{n}\right)$

$= P\left(X_n \leqslant 0{,}5n + 0{,}98\sqrt{n}\right) - P\left(X_n < 0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}\right).$

b.

n	$0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}$	$0{,}5n + 0{,}98\sqrt{n}$	i	j	$P(F_n \in I_n)$
100	40,2	59,8	40	59	0,943
1 000	469,01	530,99	469	530	0,946
2 500	1 201	1 299	1 200	1 299	0,952

3. a. X_n prend des valeurs entières.

- L'entier i tel que $P\left(X_n < 0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}\right) = P(X_n \leqslant i)$ est le plus grand entier strictement inférieur à $0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}$.

Remarques : (1) prendre pour entier i la partie entière de $0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}$ ne convient pas lorsque $0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}$ est un entier ;
(2) prendre pour entier i la partie entière de $0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}$, diminuée de 1, ne convient pas lorsque $0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}$ n'est pas un entier.

Solution : en prenant l'entier i donné par : `=ARRONDI.SUP(0,5n–0,98√n ; 0)–1` on obtient bien l'entier précédant (strictement) $0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}$, qu'il soit entier ou non.

- Par ailleurs, l'entier j tel que $P\left(X_n \leqslant 0{,}5n + 0{,}98\sqrt{n}\right) = P(X_n \leqslant j)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $0{,}5n + 0{,}98\sqrt{n}$. On peut donc prendre pour j la partie entière de ce nombre, soit sur un tableur : `=ENT(0,5n+0,98√n)`

b. Sur le graphique, la suite $(P(F_n \in I_n))$ représentée pour n croissant de 0 à 1 000 000, paraît converger vers 0,95.
On conjecture donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(F_n \in I_n) = 0{,}95$.

4. $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{X_n - 0{,}5n}{0{,}5\sqrt{n}}$.

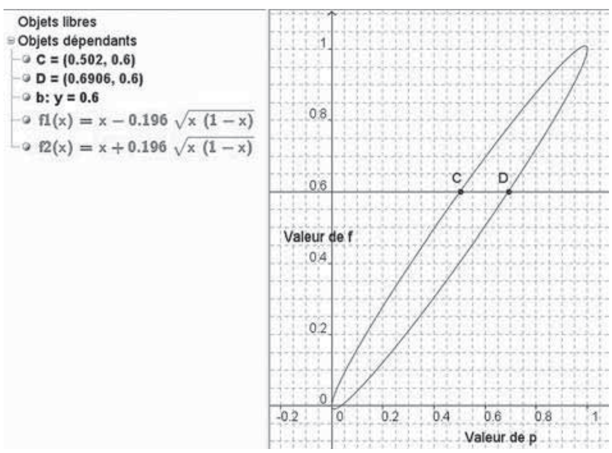
a. $F_n \in I_n$ équivaut à $0{,}5 - \dfrac{0{,}98}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{X_n}{n} \leqslant 0{,}5 + \dfrac{0{,}98}{\sqrt{n}}$ c'est-à-dire $0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n} \leqslant X_n \leqslant 0{,}5n + 0{,}98\sqrt{n}$;
$-1{,}96 \leqslant \dfrac{X_n - 0{,}5n}{0{,}5\sqrt{n}} \leqslant 1{,}96$; $-1{,}96 \leqslant Z_n \leqslant 1{,}96$. D'où l'équivalence : $F_n \in I_n \Leftrightarrow Z_n \in [-1{,}96 ; 1{,}96]$.

b. D'après le théorème de Moivre-Laplace, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Z_n \in [-1{,}96 ; 1{,}96]) = P(Z \in [-1{,}96 ; 1{,}96])$ où Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.
Une calculatrice ou un logiciel donne $P(Z \in [-1{,}96 ; 1{,}96]) \approx 0{,}950004$. D'où enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(F_n \in I_n) \approx 0{,}95$.

2. Loi exponentielle

1. a. Voir sur le site Math'x.

b. En utilisant le curseur du fichier GeoGebra pour afficher la valeur de p et en lisant les ordonnées des points A et B, on obtient :
pour $p = 0{,}4$, $I = [0{,}304 ; 0{,}496]$;
pour $p = 0{,}71$, $I = [0{,}6211 ; 0{,}7989]$;
pour $p = 0{,}02$, $I = [-0{,}0074 ; 0{,}0474]$. Dans ce dernier cas, la borne inférieure de I est un nombre négatif. On peut retenir $I = [0 ; 0{,}0474]$.



2. a. Le fichier GeoGebra permet d'obtenir le résultat ci-contre. La lecture des coordonnées des points C et D : (0,502 ; 0,6) et (0,6906 ; 0,6) conduit à écrire : $x_1 \approx 0{,}502$ et $x_2 \approx 0{,}6906$.

b. Les abscisses des points C et D sont les solutions des équations $f_1(x) = 0,6$ et $f_2(x) = 0,6$.

- Or $f_1(x) = 0,6$ équivaut à $x - 0,196\sqrt{x(1-x)} = 0,6$

soit $x - 0,6 = 0,196\sqrt{x(1-x)}$

soit $\begin{cases} x \geqslant 0,6 & (1) \\ (x-0,6)^2 = 0,196^2\,x(1-x) & (2) \end{cases}$

(2) devient successivement : $x^2 - 1,2x + 0,36 = 0,038416(x - x^2)$; $1,038416x^2 - 1,238416x + 0,36 = 0$.

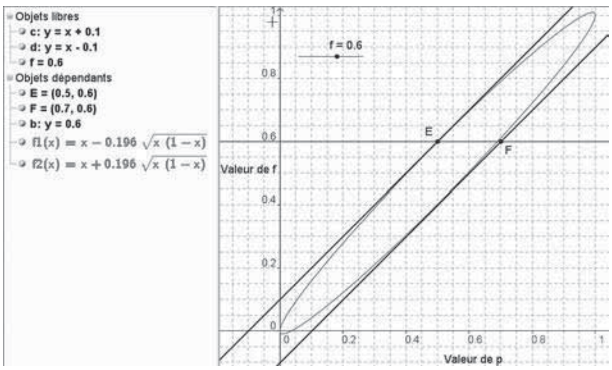
Le calcul de $\Delta = 0,038355149$ conduit à : $x = \dfrac{1,238416 \pm \sqrt{0,038355149}}{2 \times 1,038416}$ d'où $x \approx 0,5020$ ou $x \approx 0,6906$.

- De même, $f_2(x) = 0,6$ équivaut à $x + 0,196\sqrt{x(1-x)} = 0,6$ soit $0,6 - x = 0,196\sqrt{x(1-x)}$

qui équivaut à $\begin{cases} x \leqslant 0,6 & (3) \\ (0,6-x)^2 = 0,196^2\,x(1-x) & (4) \end{cases}$

On remarque que l'équation (4) coïncide avec l'équation (2). La condition (3) amène à retenir $x = 0,5020$. D'où les solutions obtenues cette fois algébriquement : $x_1 = 0,5020$ et $x_2 = 0,6906$. Un intervalle de confiance de p à 95 % est donc $[0,5020 ; 0,6906]$.

3. Les fonctions $x \mapsto x - 0,1$ et $x \mapsto x + 0,1$ sont des fonctions affixes. La copie d'écran GeoGebra montre les points E et F dont les abscisses 0,5 et 0,7 déterminent l'intervalle de confiance cherché : $J = [0,5 ; 0,7]$.



TP1. Lois de l'hérédité de Mendel

A. 1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F correspondant à la fréquence de caractère « yeux rouges » sur un échantillon aléatoire de taille 300 est $I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-n)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-n)}}{\sqrt{n}}\right]$.
Avec $p = 0,75$ et $n = 300$, on obtient $I = [0,701 ; 0,799]$.

2. Si f est la fréquence observée du caractère « yeux rouges » sur un échantillon aléatoire de taille 300, deux cas sont possibles.

- $f \in I$; dans ce cas, on ne rejette pas l'hypothèse $p = 0,75$, au seuil de 5 %.
- $f \notin I$; dans ce cas, on rejette l'hypothèse $p = 0,75$, au seuil de 5 %.

3. La fréquence observée sur l'échantillon de taille 300 est $f = \dfrac{237}{300} = 0,79$. Donc $f \in I$. La répartition observée est conforme à la loi de Mendel, au seuil de 5 %.

4. La conformité avec la loi de Mendel serait rejetée, au seuil de décision de 5 %, si l'on avait $f = \dfrac{N}{300}$ en dehors de l'intervalle I. Cela se produit lorsque l'on a :

- soit $\dfrac{N}{300} < 0,701$ c'est-à-dire $N < 210,3$, soit $N \leqslant 210$,
- soit $\dfrac{N}{300} > 0,799$ c'est-à-dire $N > 239,7$, soit $N \geqslant 240$.

En conclusion, sur un échantillon de taille 300, on rejette la conformité à la loi de Mendel, au seuil de décision de 5 %, lorsque le nombre N de drosophiles à yeux rouges est en dehors de l'intervalle $[210 ; 240]$.

B. 1. Sur l'échantillon prélevé, Mendel obtient une fréquence de petits pois « jaunes et ronds » égale à $f = \frac{315}{556} \approx 0{,}5665$.
Or l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire correspondant à la fréquence des petits pois « jaunes et ronds », sous l'hypothèse $p = \frac{9}{16}$, est $I = \left[\frac{9}{16} - 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{9}{16}\times\frac{7}{16}}}{\sqrt{556}} ; \frac{9}{16} + 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{9}{16}\times\frac{7}{16}}}{\sqrt{556}}\right]$ soit après calculs : $I = [0{,}5213 ; 0{,}6037]$. Comme $f \in I$, on considère que la répartition observée dans l'échantillon prélevé est conforme à la loi Mendel, au seuil de décision de 5 %.

2. a. L'observation de chacun des 556 petits pois de l'échantillon s'apparente à un schéma de Bernouilli, où le succès « le petit pois est jaune et rond » a pour probabilité $\frac{9}{16}$ (selon la loi de Mendel). Le nombre X de succès suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(556 ; \frac{9}{16}\right)$.

b. La variable aléatoire $F = \frac{X}{556}$ représente la fréquence du caractère « jaune et rond » sur un échantillon de taille 556.

c. $|F - 0{,}5625| \leqslant 0{,}004$ équivaut à $0{,}5585 \leqslant F \leqslant 0{,}5685$; réalisé par $311 \leqslant X \leqslant 314$.
Or X suivant la loi $\mathcal{B}(556 ; 0{,}5625)$, une calculatrice ou un logiciel donne $P(311 \leqslant X \leqslant 314) \approx 0{,}136$.

TP2. Peut-on croire un sondage ?

A. 1. $F = \frac{X}{1000}$ correspond à la fréquence des personnes favorables au candidat sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2.

p	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,5	0,5
$P(F \in I(p)) \approx$	0,99	0,98	0,97	0,96	0,96	0,95	0,95
	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	
	0,95	0,96	0,96	0,97	0,98	0,99	

3. $P(F \in I(p)) \geqslant 0{,}95$ s'écrit $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \leqslant F \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right) \geqslant 0{,}95$ ou encore $P\left(F - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \leqslant p \leqslant F + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right) \geqslant 0{,}95$.

B. 1. Non, il n'y a rien d'aléatoire ici : p appartient ou n'appartient pas à un intervalle donné. Ici, $p = 0{,}55$ appartient à l'intervalle de confiance $[0{,}502 ; 0{,}566]$.

2. a. Non, certains intervalles de confiance ne contiennent pas p. Le diagramme en montre au moins deux.

b. D'après la question A.3., cette probabilité est au moins égale à 0,95.

3. Oui, le diagramme de la feuille de calcul montre que des intervalles de confiance de p peuvent être disjoints.
Quand deux tels intervalles sont disjoints, on est sûr que l'un au moins ne contient pas p.

Exercices

1 **1.** Réponse b. **2.** Réponse a.

2 **1. a.** Z_n est la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n.

b. $\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b)$ où Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

2. $\lim_{n\to+\infty} P(-1{,}96 \leqslant Z \leqslant 1{,}96) = P(-1{,}96 \leqslant Z \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$.

3 **1. a.** La variable aléatoire $\frac{X_n}{n}$ correspond à la fréquence du succès dans un schéma de Bernouilli de paramètres n et p.

b. I_n est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire $\frac{X_n}{n}$.

2. $\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = P(Z \in [-1{,}96 ; 1{,}96]) = 0{,}95$ où Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

4 La fréquence de votes favorables à Z sur un échantillon de taille 400 est $f = 0{,}48$. On constate que $f \notin I_{95}$ et $f \in I_{99}$.

- Au seuil de décision de 5 % (donc avec un risque d'erreur de 5 %), on rejette l'hypothèse que Monsieur Z ait dit vrai.
- Au seuil de décision de 1 %, par contre, on ne peut rejeter l'hypothèse que Monsieur Z ait dit vrai.

2. a. Un intervalle de confiance à 95 % de p est de la forme : $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Avec $f = 0,48$ et $n = 400$, on obtient $J = [0,43\,;0,53]$.

b. Au niveau de confiance de 95 %, on a $0,43 \leqslant p \leqslant 0,53$. Rien ne laisse penser que l'on aura $p < 0,5$ et donc cet intervalle ne donne pas Monsieur Z battu (tout comme il ne le donne pas gagnant !).

5 Corrigé en fin de manuel.

6 **1.** L'expérience réalisée est un schéma de Bernouilli de paramètres $n = 100$ et $p = 0,5$. La variable aléatoire associée au nombre de succès « pile apparaît » suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(100\,;0,5)$.

2. a. $I_{0,95} = \left[0,5-1,96\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{100}}\,;0,5+1,96\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{100}}\right]$;

$I_{0,95} = [0,402\,;0,598] \approx [0,4\,;0,6]$.

b. La probabilité que Zoé perde son pari est $P(F \notin [0,4\,;0,6])$. Comme $P(F \in I_{0,95}) \approx 0,95$, on en déduit que $P(F \notin [0,4\,;0,6]) \approx 0,05$.

3. X suit la loi $\mathscr{B}(100\,;0,5)$.

$P(X < 40 \text{ ou } X > 60) = 1 - P(40 \leqslant X \leqslant 60)$.

Le logiciel GeoGebra donne $P(40 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,9648$ d'où $P(X < 40 \text{ ou } X > 60) \approx 0,0352$. Le pari de Zoé était effectivement peu risqué !

7 **1. a.** Le prélèvement d'un échantillon aléatoire de taille 1 000 dans cette population s'apparente à un schéma de Bernouilli où $n = 1000$ et $p = 0,075$ (probabilité du succès : « taux de cholestérol » élevé). La variable aléatoire X, qui compte les succès dans l'échantillon prélevé, suit donc la loi $\mathscr{B}(1\,000\,;0,075)$.

b. Le plus petit intervalle $[a\,;b]$ avec a et b entiers tels que $P(X < a) \leqslant 0,025$ et $P(X > b) \leqslant 0,025$ est $I = [59\,;92]$.

En effet, une calculatrice ou un logiciel donne :

k	P(X<=k)	P(X>k)
58	0,020823302	0,9791767
59	0,028201567	0,97179843
60	0,037583929	0,96241607

k	P(X<=k)	P(X>k)
91	0,973578172	0,02642183
92	0,979765102	0,0202349
93	0,984662863	0,01533714

- Le plus grand entier a tel que $P(X < a) \leqslant 0,025$ est 59.
- Le plus petit entier b tel que $P(X > b) \leqslant 0,025$ est 92.

Remarque : on peut aussi (comme en classe de Première), rechercher les plus petits entiers a et b tels que $P(X \leqslant a) > 0,025$ et $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

c. L'intervalle $I' = [0,059\,;0,092]$ est tel que $P\left(\frac{X}{1\,000} \in [0,059\,;0,092]\right) \geqslant 0,95$. I' est donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la variable aléatoire $F = \frac{X}{1\,000}$.

2. a. L'intervalle de fluctuation asymptotique de F au seuil de 95 % est donné par :

$$J = \left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Avec $p = 0,075$ et $n = 1\,000$,
on obtient $J = [0,0587\,;0,0913]$.

En arrondissant les bornes à 10^{-3} près et en « élargissant » l'intervalle de façon à préserver l'inégalité $P(F \in J) \geqslant 0,95$, on obtient $J = [0,058\,;0,092]$.

b. On peut remarquer que la méthode de Première, avec la loi binomiale, et celle de Terminale, avec approximation par la loi normale, conduisent à des résultats très voisins. Il est vrai que les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ sont très amplement respectées.

8 Le transport des 1 500 œufs, supposés se comporter de façon indépendante, s'apparente à un schéma de Bernouilli, avec $n = 1\,500$ et $p = 0,07$ (probabilité du succès : « l'œuf est endommagé »). Le nombre X d'œufs endommagés suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(1\,500\,;0,07)$. L'espérance de X étant $E(X) = 105$, on recherche un intervalle de la forme $[105-\varepsilon\,;105+\varepsilon]$ qui contienne X avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Les conditions sur n et p étant satisfaites, on sait que l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $F = \frac{X}{1500}$ au seuil de 95 % est donné par

$$I = \left[0,07-1,96\frac{\sqrt{0,07\times 0,93}}{\sqrt{1\,500}}\,;0,07+1,96\frac{\sqrt{0,07\times 0,93}}{\sqrt{1\,500}}\right].$$

On en déduit que

$P(0,07\times 1500 - 1,96\sqrt{0,07\times 0,93\times 1\,500}$

$\leqslant X \leqslant 0,07\times 1\,500 + 1,96\sqrt{0,07\times 0,93\times 1\,500}) \geqslant 0,95$

d'où $P(105-20 \leqslant X \leqslant 105+20) \geqslant 0,95$ soit

$P(85 \leqslant X \leqslant 125) \geqslant 0,95$. L'intervalle $[85\,;125]$ contient au moins 95 % des œufs endommagés.

9 **1.** La fréquence de « pile » est modélisée par la variable aléatoire $F = \frac{X}{100}$ où X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(100\,;0,5)$. L'intervalle de fluctuation asymptotique de F est :

a. au seuil de 95 %, l'intervalle

$I_{95} = \left[0,5-1,96\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{100}}\,;0,5+1,96\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{100}}\right]$ soit

$I_{95} = [0,402\,;0,598]$.

b. au seuil 99 %, l'intervalle

$$I_{99}=\left[0,5-2,58\frac{\sqrt{0,5\times0,5}}{\sqrt{100}}\,;0,5+2,58\frac{\sqrt{0,5\times0,5}}{\sqrt{100}}\right]$$ soit

$I_{99}=[0,371;0,629]$.

2. La fréquence de « pile » sur cet échantillon de taille 100 est $f=0,38$.

a. Comme $0,38\notin I_{95}$, on peut rejeter, au seuil de décision de 5 %, l'hypothèse $p=0,5$ qui traduit que la pièce est bien équilibrée.

b. Comme $0,38\in I_{99}$, on ne peut pas rejeter, au seuil de décision de 1 %, l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée.

10 **1.** L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de F est donné par :

$$I=\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

avec $p=0,26$ et $n=400$.

D'où I = [0,217 ; 0,303].

2. Sur l'échantillon de taille 400 considéré, $f=\frac{120}{400}=0,3$.

Comme $f\in I$, on ne peut pas considérer, au seuil de décision de 5 %, que l'échantillon observé présente un nombre anormal de personnes allergiques.

11 On fait l'hypothèse que le pourcentage des lymphocytes parmi les leucocytes (globules blancs) est $p=25$ %.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire correspondant à la fréquence des lymphocytes sur un échantillon de 500 globules blancs est

$$I=\left[0,25-1,96\sqrt{\frac{0,25\times0,75}{500}}\,;0,25+1,96\sqrt{\frac{0,25\times0,75}{500}}\right]$$

soit I = [0,212 ; 0,288].

La fréquence des lymphocytes sur l'échantillon de taille 500 observé est $f=0,3$.

Comme $f\notin I$, on peut considérer, au seuil de décision de 5 %, que l'écart avec $p=0,25$ est significatif.

12 **1.** Sous l'hypothèse $p=0,5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire correspondant à la fréquence de « Pile » sur un échantillon de taille 4 040 est

$$I=\left[0,5-1,96\frac{\sqrt{0,5\times0,5}}{\sqrt{4\,040}}\,;0,5+1,96\frac{\sqrt{0,5\times0,5}}{\sqrt{4\,040}}\right]$$

soit I = [0,484 ; 0,516].

2. Soit f la fréquence de « Pile » observée sur un échantillon de taille 4 040.

- Si $f\notin I$, on peut rejeter, au seuil de décision de 5 %, l'hypothèse selon laquelle $p=0,5$ (pièce équilibrée).
- Si $f\in I$, l'écart entre f et 0,5 n'est pas significatif au seuil de décision de 5 %. On ne rejette pas l'hypothèse que la pièce soit bien équilibrée.

3. Sur l'échantillon résultant de l'expérience réalisée par l'enfant, la fréquence de « Pile » est $f=\frac{2\,048}{4\,040}\approx0,507$.

Nous sommes donc dans le deuxième cas de figure envisagé à la question 2.

13 Corrigé en fin de manuel.

14 **1.** L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la variable aléatoire $F=\frac{X}{62}$ correspondant à la fréquence des temps d'attente entre deux tremblements de terre graves consécutifs dépassant 365 jours est donné par :

$$I=\left[0,43-1,96\frac{\sqrt{0,43\times0,57}}{\sqrt{62}}\,;0,43+1,96\frac{\sqrt{0,43\times0,57}}{\sqrt{62}}\right]$$

soit I = [0,306 ; 0,554].

2. Soit f la fréquence des temps d'attente entre deux tremblements de terre graves consécutifs dépassant 365 jours, fournie par un échantillon de taille 62.

Au seuil de décision de 5 % :

– Si $f\notin I$, on rejette l'hypothèse $p=0,43$.

– Si $f\in I$, on ne rejette pas cette hypothèse.

3. L'observation de 62 temps d'attente fournit une fréquence $f=\frac{29}{62}\approx0,468$.

Comme $f\in I$, on ne rejette pas, au seuil de décision de 5 % l'hypothèse selon laquelle la proportion des temps d'attente entre deux tremblements de terre graves consécutifs est $p=0,43$.

15 **1.** Sous l'hypothèse que la proportion de noix vides est $p=0,06$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F correspondant à la fréquence de noix vides fournie par un échantillon de taille 300 est

$$I=\left[0,06-1,96\frac{\sqrt{0,06\times0,94}}{\sqrt{300}}\,;0,06+1,96\frac{\sqrt{0,06\times0,94}}{\sqrt{300}}\right]$$

soit I = [0,033 ; 0,087].

Or l'échantillon observé ayant fourni une fréquence de noix vides égale à $f=\frac{21}{300}=0,07$, on est dans le cas où $f\in I$; cet échantillon ne permet donc pas de rejeter l'affirmation du négociant de noix : « 6 % des noix sont vides », au seuil de décision de 5 %.

2. On sait que si p est la proportion de noix vides et F_n la variable aléatoire correspondant à la fréquence de noix vides fournie par un échantillon de taille n, la formule $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ fournit un intervalle de fluctuation (simplifié) de F_n au seuil 0,95, lorsque $n\geqslant30$, $np\geqslant5$ et $n(1-p)\geqslant5$.

D'après le Théorème 2, on a, pour n suffisamment grand : $P\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0{,}95$.

Mais comme $p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}$ équivaut à $F_n-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}$, on peut dire que l'intervalle $\left[F_n-\frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ a une probabilité au moins égale à 0,95 de contenir p.

Si l'on suppose ici p inconnu, on peut approcher p par une réalisation f de F_n.

Pour avoir $|p-f| \leqslant 0{,}01$, il suffit de prendre $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}01$ soit $n \geqslant 10\,000$.

Ainsi, en prenant par exemple $f = 0{,}07$ qui correspond à la réalisation de F_n effectuée dans la question 1, on aura $p \in [0{,}07-0{,}01 ; 0{,}07+0{,}01]$ soit $0{,}06 \leqslant p \leqslant 0{,}08$, au niveau de confiance 0,95.

Remarque : La démarche adoptée dans cette question a conduit à l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ qui est un intervalle de confiance de p, au niveau de confiance 0,95.

Si la notion d'intervalle de confiance a déjà été traitée, la réponse à cette question 2 s'en trouve simplifiée et raccourcie.

16 Sur cet échantillon, la fréquence d'adolescents en surpoids est $f = \frac{210}{500} = 0{,}42$.

Comme on a : $n \geqslant 30$; $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$, l'intervalle $\left[0{,}42-\frac{1}{\sqrt{500}} ; 0{,}42+\frac{1}{\sqrt{500}}\right] = [0{,}375 ;\ 0{,}465]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance de 95 %.

17 $f = \frac{64}{81} \approx 0{,}79$.

Un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 est donc $\left[0{,}79-\frac{1}{9} ; 0{,}79+\frac{1}{9}\right] = [0{,}679 ; 0{,}902]$.

18 Corrigé en fin de manuel.

19 $f = 0{,}96$.

Un intervalle de confiance de p au niveau de confiance de 0,95 est donc $[0{,}96 - 0{,}1 ; 0{,}96 + 0{,}1] = [0{,}86 ; 1{,}06]$.

20 Corrigé en fin de manuel.

21 **1.** Sur l'échantillon de taille 60 prélevé, la fréquence de l'option est $f = \frac{9}{60} = 0{,}15$.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de personnes immunisées contre ce virus est $J = \left[0{,}15-\frac{1}{\sqrt{60}} ; 0{,}15+\frac{1}{\sqrt{60}}\right]$ soit $J = [0{,}02 ; 0{,}28]$.

2. Sur l'échantillon de taille 120, prélevé en deux fois, la fréquence de l'option est $f' = \frac{18}{120} = 0{,}15$.

L'intervalle de confiance correspondant est alors $J' = \left[0{,}15-\frac{1}{\sqrt{120}} ; 0{,}15+\frac{1}{\sqrt{120}}\right]$ soit $J' = [0{,}06 ; 0{,}24]$.

22 Corrigé en fin de manuel.

23 **1.** Sur les trois échantillons de taille 1 000 prélevés dans les trois populations respectives, on a $f_1 = 0{,}05$, $f_2 = 0{,}06$ et $f_3 = 0{,}11$.

Les intervalles de confiance « standards » au niveau de confiance de 95 % sont :

$$J_1 = \left[f_1 - 1{,}96\frac{\sqrt{f_1(1-f_1)}}{\sqrt{1000}} ; f_1 + 1{,}96\frac{\sqrt{f_1(1-f_1)}}{\sqrt{1000}}\right] = [0{,}036 ; 0{,}064]$$

$$J_2 = \left[f_2 - 1{,}96\frac{\sqrt{f_2(1-f_2)}}{\sqrt{1000}} ; f_2 + 1{,}96\frac{\sqrt{f_2(1-f_2)}}{\sqrt{1000}}\right] = [0{,}045 ; 0{,}075]$$

$$J_3 = \left[f_3 - 1{,}96\frac{\sqrt{f_3(1-f_3)}}{\sqrt{1000}} ; f_3 + 1{,}96\frac{\sqrt{f_3(1-f_3)}}{\sqrt{1000}}\right] = [0{,}090 ; 0{,}130]$$

2. Les intervalles J_1 et J_2 n'étant pas disjoints, on ne peut pas considérer qu'il existe une différence significative de la proportion de bébés de poids inférieur à 2,5 kg à la naissance entre les populations de mères non fumeuses et de mères fumeuses ayant arrêté de fumer au début de la grossesse.

Par contre, les intervalles J_1 et J_3, ainsi que J_2 et J_3 étant disjoints, on peut considérer, au niveau de confiance de 95 %, qu'une différence significative existe entre chacune des deux populations précédemment citée et la population des mères fumeuses ayant continué de fumer pendant la grossesse, relativement à la proportion de bébés pesant moins de 2,5 kg. La proportion de ces bébés est significativement supérieure dans cette troisième population.

24 **1.** Les fréquences des votes favorables à X, Y et Z fournies par le sondage aléatoire portant sur 1 320 personnes sont respectivement :

$f_1 = 0{,}27$ $\quad f_2 = 0{,}385$ $\quad f_3 = 0{,}345$.

Les intervalles de confiance des cotes de popularité de X, Y et Z, au niveau de confiance de 95 %, sont alors :

$$I_1 = \left[0{,}27-\frac{1}{\sqrt{1\,320}} ; 0{,}27+\frac{1}{\sqrt{1\,320}}\right] = [0{,}242 ; 0{,}298]$$

$$I_2 = \left[0{,}385-\frac{1}{\sqrt{1\,320}} ; 0{,}385+\frac{1}{\sqrt{1\,320}}\right] = [0{,}357 ; 0{,}413]$$

$$I_3 = \left[0{,}345-\frac{1}{\sqrt{1\,320}} ; 0{,}345+\frac{1}{\sqrt{1\,320}}\right] = [0{,}317 ; 0{,}373].$$

Le journal, au vu de ces intervalles de confiance, ne peut pas publier un classement des trois personnalités. Tout au plus, pourrait-il publier que X est distancé par Y et par Z, au niveau de confiance de 95 %, mais sans pouvoir départager Y et Z, puisque les intervalles I_2 et I_3 ne sont pas disjoints.

2. Avec ces mêmes taux et une taille n de sondage au moins égale à 1 320, il suffit de choisir n tel que

$I'_2 = \left[0{,}385 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0{,}385 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et

$I'_3 = \left[0{,}345 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0{,}345 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soient disjoints.

Pour cela, il suffit de prendre n tel que

$0{,}345 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}385 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ soit $\frac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}04$ soit $\sqrt{n} > 50$ ou $n > 2\,500$.

25 Les intervalles de fluctuation asymptotique en question sont :

$I_{99} = \left[p - 2{,}58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2{,}58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ et

$I_{95} = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

L'affirmation est donc vraie.

Remarque : Sans « écrire » les intervalles, on peut aussi adopter la démarche « logique » suivante : pour n suffisamment grand, F_n prend ses valeurs dans I_{99} avec une probabilité proche de 0,99 et dans I_{95} avec une probabilité proche de 0,95.

I_{99} qui contient F_n avec une probabilité supérieure contient donc I_{95} (même centre p et rayon supérieur pour I_{99}).

26 On rejette l'hypothèse à l'aide d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % lorsque $f \notin I_{95}$.

Comme $I_{95} \subset I_{99}$, on peut très bien avoir $f \in I_{99}$ et ne pas pouvoir rejeter dans ce cas l'hypothèse à l'aide de I_{99}.

L'affirmation est donc fausse.

27 Si $f \in I_{95}$, alors $f \in I_{99}$, car I_{99} contient I_{95}.

L'affirmation est donc vraie.

28 Avec I_{99}, la probabilité de rejeter l'hypothèse alors qu'elle est vraie est d'environ 1 %.

Avec I_{95}, cette même probabilité est d'environ 5 %.

L'affirmation est donc vraie.

29 **1.** La taille d'une classe d'âge étant n, la hauteur de la barre d'erreur correspondante est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Par lecture sur le graphique, on trouve environ, tour à tour : 13 %, 13 %, 16 %, 18 %, 18 % et 26 %.

À un pourcentage de k %, correspond une valeur de n telle que $\frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{k}{100}$, soit $\sqrt{n} = \frac{200}{k}$, soit $n = \left(\frac{200}{k}\right)^2$.

Cette formule conduit aux effectifs de classes d'âge suivants : 236, 236, 156, 123, 123, 59.

La taille de l'échantillon utilisé, tous âges confondus, est donc d'environ N = 933.

2. La longueur d'une « barre d'erreur » est d'autant plus grande que l'effectif de la classe d'âge est petit.

Ici, la classe d'âge de plus faible effectif est la classe « $\geqslant 55$ ».

3. Non car tous les intervalles de confiance ont une partie commune. Il faudrait utiliser un échantillon de plus grande taille pour que les longueurs des barres d'erreur s'en trouvent réduites, permettant peut-être à certains intervalles de confiance d'être disjoints.

30 **1.** X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(64 ; 0{,}18)$.

2. $F = \frac{X}{64}$ correspond à la fréquence des fumeurs sur un échantillon de taille 64.

3. L'intervalle de fluctuation asymptotique de F au seuil de 95 % est l'intervalle

$I = \left[p - t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où t est le réel tel que $P(-t \leqslant Z \leqslant t) = 0{,}95$ où Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Une calculatrice ou un logiciel donne alors $t \approx 1{,}96$.

D'où l'intervalle cherché :

$I = \left[0{,}18 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{64}} ; 0{,}18 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}18 \times 0{,}82}}{\sqrt{64}}\right]$

$I = [0{,}08 ; 0{,}28]$.

31 **1.** Soit f la fréquence de fumeurs sur un échantillon de taille 64, dans cette population.

- Si $f \notin I$ où $I = [0{,}08 ; 0{,}28]$, on considère que l'échantillon utilisé n'est pas représentatif de la proportion de fumeurs, égale à 0,18, dans la population, au seuil de 95 %.
- Si $f \in I$, on considère que l'écart entre f et 0,18 n'est pas significatif.

Dans ce cas, on ne rejette pas l'hypothèse selon laquelle l'échantillon est représentatif.

2. Sur cet échantillon, $f = \frac{17}{64} \approx 0{,}266$.

Comme $f \in I$, on ne rejette pas l'hypothèse que l'échantillon utilisé est représentatif de la population de fumeurs de la population.

32 Le résultat des 225 lancers du dé constitue un échantillon aléatoire de taille 225 de la population (infinie) des lancers de ce dé. La fréquence de l'issue « As » sur cet échantillon est $f = \frac{38}{225} \approx 0{,}169$.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la probabilité d'obtenir l'as avec ce dé est alors :

$$J = \left[0{,}169 - \frac{1}{\sqrt{225}}\,;\,0{,}169 + \frac{1}{\sqrt{225}}\right]$$

soit J = [0,102 ; 0,236].

Exercices **33** à **42**

QCM et VRAI/FAUX : corrigé en fin de manuel

Exercices **43** à **45**

Évaluer ses capacités : corrigé en fin de manuel

APPROFONDISSEMENT

46 **1.** X est la variable aléatoire indiquant le nombre de succès « Posséder l'Allèle A » observés sur un échantillon aléatoire de taille 100 dans une population où la proportion de patients présentant l'Allèle A est supposée être $p = 0{,}15$.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;\,0{,}15)$.

2. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable $F = \frac{X}{100}$ est

$$I = \left[0{,}15 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}15 \times 0{,}85}}{\sqrt{100}}\,;\,0{,}15 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}15 \times 0{,}85}}{\sqrt{100}}\right]$$

soit I = [0,08 ; 0,22].

3. a. $P(F > 0{,}22) = P(X > 22) = 1 - P(X \leqslant 22)$.

Une calculatrice ou un logiciel donne $P(X > 22) \approx 0{,}02$.

b. Selon la règle de décision choisie, la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse $p = 0{,}15$ dans la population des malades d'Alzheimer est d'environ 2 %.

4. Sur cet échantillon, $f = \frac{27}{100} = 0{,}27$.

Comme $f > 0{,}22$ c'est-à-dire $X > 22$, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}15$ chez les malades d'Alzheimer, avec un risque d'erreur de 2 % environ.

47 **1.** La variable aléatoire X associe à tout échantillon de taille 64 de tennismen et d'escrimeurs le nombre de gauchers. Pour chaque individu observé, le succès « être gaucher » se réalise avec la probabilité $p = 0{,}1$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(64\,;\,0{,}1)$.

2. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire $F = \frac{X}{64}$ est

$$I = \left[0{,}1 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}1 \times 0{,}9}}{\sqrt{64}}\,;\,0{,}1 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}1 \times 0{,}9}}{\sqrt{64}}\right]$$

soit I = [0,027 ; 0,174].

3. $I = [\alpha\,;\,\beta]$ avec $\beta = 0{,}174$.

$P(F > \beta) = P(X > 64\beta) = P(X > 11{,}136) = 1 - P(X \leqslant 11) \approx 0{,}024$.

La probabilité de rejeter l'hypothèse à tort selon cette règle est $P(F > \beta) \approx 0{,}024$.

5. Sur cet échantillon de 64 tennismen et escrimeurs, la fréquence des gauchers est $f = \frac{13}{64} \approx 0{,}203$.

Comme $f > 0{,}174$, on rejette, selon la règle de décision donnée, l'hypothèse selon laquelle la proportion de gauchers chez les tennismen et les escrimeurs est celle observée dans la population toute entière. Le risque de rejeter à tort cette hypothèse est d'environ 2,4 %.

48 **1.** $p = \frac{105}{205} \approx 0{,}512$.

2. a. X correspond au nombre de succès « Garçon » obtenus sur un échantillon de taille n, où la proportion de garçons est $p = 0{,}512$.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}512)$.

b. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence F_n de garçons sur un échantillon de taille n est donné par :

$$I_n = \left[0{,}512 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}512 \times 0{,}488}}{\sqrt{n}}\,;\,0{,}512 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}512 \times 0{,}488}}{\sqrt{n}}\right]$$

soit $I_n = \left[0{,}512 - \frac{0{,}98}{\sqrt{n}}\,;\,0{,}512 + \frac{0{,}98}{\sqrt{n}}\right]$.

c. Pour $n = 227$

On rejette l'hypothèse $p = 0{,}512$ si la fréquence de garçons observée est inférieure à $0{,}512 - \frac{0{,}98}{\sqrt{227}}$, c'est-à-dire inférieure à 0,446.

Pour $n = 132$: on rejette l'hypothèse $p = 0{,}512$ si la fréquence de garçons observée est inférieure à $0{,}512 - \frac{0{,}98}{\sqrt{132}}$, c'est-à-dire inférieure à 0,426.

d. Pour $n = 227$

$P\left(\frac{X}{227} < 0{,}446\right) = P(X \leqslant 101) \approx 0{,}025$.

Pour $n = 132$

$P\left(\frac{X}{132} < 0{,}426\right) = P(X \leqslant 56) \approx 0{,}027$.

e. Selon la règle de décision adoptée, la probabilité de rejeter l'hypothèse $p = 0{,}512$ alors qu'elle est vraie est égale à :

- $P\left(\frac{X}{227} < 0{,}446\right) \approx 0{,}025$ lorsque $n = 227$.
- $P\left(\frac{X}{132} < 0{,}426\right) \approx 0{,}027$ lorsque $n = 132$.

3. À U*fa*, la fréquence des garçons sur un échantillon de 227 enfants est $f = \frac{91}{227} \approx 0{,}401$.

Comme $f < 0{,}446$, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}512$ chez les enfants des personnes exposées à des pesticides, avec une probabilité de rejet à tort d'environ 0,025.

4. Au Canada, la fréquence des garçons sur un échantillon de 132 enfants est $f = \dfrac{46}{132} \approx 0{,}348$. Comme $f < 0{,}426$, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}512$, l'écart entre f et p étant cette fois encore considéré comme significatif.

PROBLÈMES

49 **1.** $P\left(p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{Xn}{n} \leqslant p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 95$ équivaut à

$P(np - \sqrt{n} \leqslant Xn \leqslant np + \sqrt{n}) \geqslant 95$ c'est-à-dire à

$P(X \leqslant np + \sqrt{n}) - P(Xn < np - \sqrt{n}) \geqslant 95$.

50 **1.** Pour chacun des n billets vendus, la probabilité que l'acheteur se présente est p. La variable aléatoire X_n qui compte les succès « L'acheteur se présente » au cours de ces n épreuves supposées indépendantes suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique de $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ au seuil de 95 % est donné par :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

3. Si la condition (1) est vérifiée, alors on a :

$$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{300}{n}.$$

D'où $P(X_n > 300) = P\left(F_n > \dfrac{300}{n}\right)$

$\leqslant P(F_n \notin I_n) = 1 - P(F_n \in I_n) \leqslant 1 - 0{,}95 \leqslant 0{,}05$.

Plus précisément, on a même :

$P(X_n > 300) = P\left(F_n > \dfrac{300}{n}\right)$

$\leqslant P\left(F_n \geqslant p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$

$\leqslant \dfrac{1}{2}(1 - P(F_n \in I_n))$

$\leqslant \dfrac{1}{2} \times 0{,}05 \leqslant 0{,}025$.

4. Sur un tableur, on obtient :

D4 fx =B4*D$2+1,96*RACINE(B4*D$2*(1-D$2))

	A	B	C	D	E
1		tabulation de	p	p	p
2		np+1,96rac(np(1-p))	0,85	0,9	0,95
4	n	336	298,4286	313,1782	327,0302
5		337	299,2977	314,0942	327,9918
6		338	300,1668	315,0102	328,9535
8		320	284,5195	298,5185	311,6415
9		321	285,389	299,4349	312,6034
10		322	286,2585	300,3513	313,5653
12		306	272,3425	285,6858	298,1725
13		307	273,2125	286,6026	299,1347
14		308	274,0825	287,5194	300,0968

Le plus grand entier n tel que $np + 1{,}96\sqrt{np(1-p)} \leqslant 300$ est donc :

- $n_0 = 337$ lorsque $p = 0{,}85$
- $n_0 = 321$ lorsque $p = 0{,}90$
- $n_0 = 307$ lorsque $p = 0{,}95$.

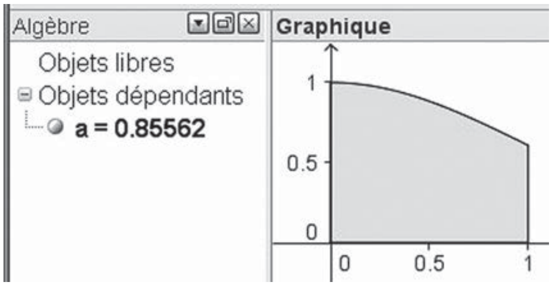
5. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, on obtient :

- Lorsque $p = 0{,}85$, $P(X_{337} > 300) \approx 0{,}013$
- Lorsque $p = 0{,}90$, $P(X_{321} > 300) \approx 0{,}012$
- Lorsque $p = 0{,}95$, $P(X_{307} > 300) \approx 0{,}005$.

51 **1. a.** Lorsqu'on prend au hasard un point M dans le carré de côté 1, la probabilité p que M appartienne au domaine bleu (situé sous la courbe) est égale à :

$\dfrac{\mathcal{A}(\text{domaine bleu})}{\mathcal{A}(\text{carré})} = \dfrac{\int_0^1 \varphi(x)\,dx}{1}$. On a donc $p = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

b. Le logiciel GeoGebra donne :



2. Dans cette simulation, n désigne le nombre de points tirés, à choisir par l'utilisateur.

La boucle *Pour k de 1 à n … FinPour* (lignes 3 à 7) simule n fois le tirage de deux nombres aléatoires x et y dans $[0\,;1[$, donc simule n fois le tirage aléatoire d'un point $M(x\,;y)$ situé dans le carré $(0 \leqslant x < 1\,;0 \leqslant y < 1)$.

Le test de la ligne 5 est positif si le point M est situé dans la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe d'équation $y = f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, c'est-à-dire s'il appartient à la partie du carré colorée en bleu (frontières comprises). Dans ce cas, on incrémente s de 1.

La variable s, initialisée à 0, est donc augmentée de 1 à chaque fois que le point tiré aléatoirement est situé dans la partie du carré colorée en bleu. Au bout des n tirages, s contient donc le nombre de points ainsi tirés aléatoirement qui appartiennent à la partie du carré colorée en bleu.

La ligne 8 déclenche donc l'affichage de la fréquence de l'événement « Le point tiré est dans la partie du carré colorée en bleu » lors de la simulation de n tirages aléatoires d'un point dans le carré $[0\,;1] \times [0\,;1]$.

3. a. Si f_n est la fréquence des points situés sous la courbe sur un échantillon de n points pris au hasard dans le carré, l'expression d'un intervalle de confiance de p au niveau de confiance de 95 % est donnée par

$$J_n = \left[f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;f_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

b. Pour n suffisamment grand, J_n contiendra p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

4. a. En confrontant les 4 résultats obtenus par simulation avec la valeur approchée de p calculée à la question 1.b., on observe que le nombre de décimales exactes de p est 2 ; 2 ; 2 et 1, respectivement.

b. On obtient, au niveau de confiance de 95 %, une estimation de p à la précision 10^{-3} pour n tel que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 10^{-3}$ soit $\sqrt{n} \geqslant 2\,000$ ou $n \geqslant 4 \times 10^6$. En exécutant l'algorithme pour $n = 4 \times 10^6$, on obtient :

```
nombre de points n = 4*10^6

    0.8557362

 Exécution terminée.
```

D'où l'estimation de p suivante, au niveau de confiance de 95 % : $p \in \left[0,8557 - \frac{1}{2 \times 10^3} ; 0,8557 + \frac{1}{2 \times 10^3}\right]$.

52 **1.** La variable aléatoire X_n qui donne le nombre de succès « boule rouge » obtenus sur un échantillon de taille n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.

2. $f_n(p) = P(p \in I_n) = P\left(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant \frac{X_n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$= P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$= P\left(np - \sqrt{n} \leqslant X_n \leqslant np + \sqrt{n}\right)$

$= P\left(X_n \leqslant np + \sqrt{n}\right) - P\left(X_n < np - \sqrt{n}\right)$.

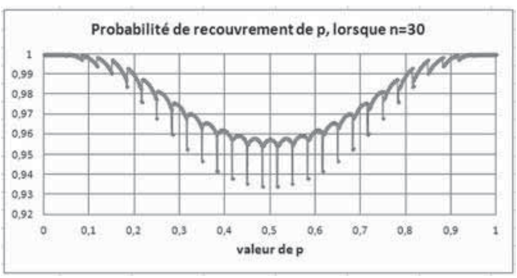
3.

n	p	$np - \sqrt{n}$	$np + \sqrt{n}$	i	j	$f_n(p)$
100	0,47	37	57	36	57	0,965
100	0,471	37,1	57,1	37	57	0,955
110	0,45	39,012	59,988	39	59	0,945

4. Le couple (110 ; 0,45) est dit « malheureux » car l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % contient p avec une probabilité inférieure à 0,95.

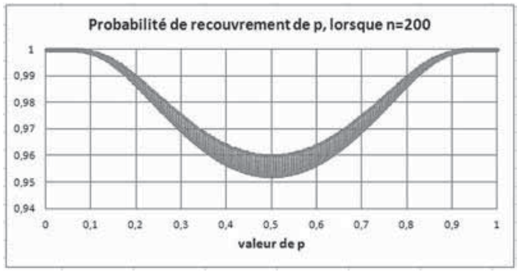
5. b. Pour $n = 110$, on observe sur le graphique 6 valeurs de p pour lesquelles la probabilité de recouvrement de p par I_{110} est inférieure à 0,95. Ces valeurs de p sont 0,411 ; 0,45 ; 0,459 ; 0,541 ; 0,55 ; 0,559.

c. • Pour $n = 30$, on obtient le graphique suivant :

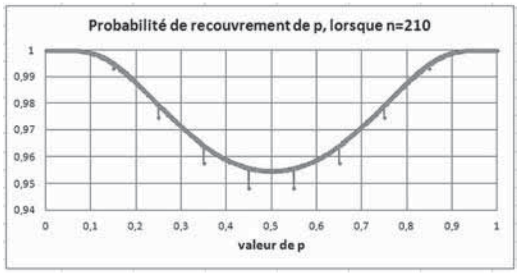


Les valeurs de p telles que $f_{30}(p) < 0,95$ sont : 0,35 ; 0,383 ; 0,384 ; 0,416 ; 0,417 ; 0,45 ; 0,483 ; 0,484 ; 0,516 ; 0,517 ; 0,55 ; 0,583 ; 0,584 ; 0,616 ; 0,617 ; 0,65.

• Pour $n = 200$, il n'existe aucune valeur de p telle que (200 ; p) soit un couple « malheureux ».



• Pour $n = 210$, il existe deux valeurs de p telles que $f_{210}(p) < 0,95$. Ce sont 0,45 et 0,55.



53 **1.** Max doit proposer un intervalle de fluctuation de la fréquence f du virus au seuil de 95 %.

• S'il est élève de Seconde, il propose l'intervalle simplifié $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,04 - \frac{1}{30} ; 0,04 + \frac{1}{30}\right]$;

$I = [0,06 ; 0,74]$.

• S'il est élève de Première, il pourra déterminer avec la loi binomiale les plus petits entiers a et b tels que $P(X \leqslant a) > 0,025$ et $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ où X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(900\,; 0,04)$. Une calculatrice ou un logiciel donne alors $a = 25$ et $b = 48$. D'où l'intervalle $I = \left[\frac{25}{900} ; \frac{48}{900}\right] = [0,027 ; 0,054]$.

• S'il est élève de Terminale, il déterminera l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$;

$I = [0,027 ; 0,053]$.

2. La fréquence du virus observée sur le lycée est $f = \frac{54}{900} = 0,06$.

• Si Max est en Seconde, il vérifiera que $f \in I$ et il ne rejettera pas, au seuil de décision de 5 % (c'est-à-dire avec un risque d'erreur de 5 %) l'hypothèse selon laquelle la fréquence du virus sur le lycée est compatible avec celle de la population nationale (l'écart entre f et p sera considéré « non significatif »).

• Si Max est en Première ou en Terminale, il observera que $f \notin I$ et il pourra considérer que la fréquence f observée sur le lycée n'est pas conforme à la population nationale, au seuil de décision, de 5 %.

3. Max doit rechercher n tel que si $|f - p| = 0{,}02$, alors $f \notin I$.

• Si $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ il suffit d'avoir $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}02$ c'est-à-dire $n > 2\,500$.

• Si $I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$, il suffit d'avoir $1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < 0{,}02$ soit, avec $p = 0{,}04$, $n \geqslant 369$.

54 Sur l'échantillon de taille 642 considéré, la fréquence des parents espérant que leur garçon obtienne un bac S est $f_1 = 0{,}771$ et celle des parents espérant que leur fille obtienne un bac S est $f_2 = 0{,}507$. En construisant des intervalles de confiance au niveau de confiance de 95 % des probabilités p_1 et p_2 que des parents, pris au hasard dans la population, se prononcent pour un « espoir de bac S » pour leur garçon ou pour leur fille, on obtient :

$J_1 = \left[0{,}771 - \frac{1}{\sqrt{642}} ; 0{,}771 + \frac{1}{\sqrt{642}}\right]$ soit $J_1 = [0{,}73 ; 0{,}82]$.

$J_2 = \left[0{,}507 - \frac{1}{\sqrt{642}} ; 0{,}507 + \frac{1}{\sqrt{642}}\right]$ soit $J_2 = [0{,}46 ; 0{,}55]$.

Les intervalles J_1 et J_2 étant disjoints, on considère qu'il existe une différence significative entre les fréquences f_1 et f_2. On peut donc conclure avec un niveau de confiance de 95 % que l'espoir de bac S pour un enfant est influencé par le sexe de celui-ci.

55 En construisant les intervalles de confiance au niveau de confiance de 95 % des probabilités p_1 et p_2 qu'un individu fumeur de cette population soit atteint ou non d'un cancer du poumon, on obtient à partir des fréquences f_1 et f_2 :

$J_1 = \left[0{,}913 - \frac{1}{\sqrt{605}} ; 0{,}913 + \frac{1}{\sqrt{605}}\right]$ soit $J_1 = [0{,}89 ; 0{,}94]$;

$J_2 = \left[0{,}653 - \frac{1}{\sqrt{780}} ; 0{,}653 + \frac{1}{\sqrt{780}}\right]$ soit $J_2 = [0{,}62 ; 0{,}69]$.

Comme J_1 et J_2 sont disjoints, la différence entre f_1 et f_2 est significative, au niveau de confiance de 95 %. D'où l'affirmation ainsi justifiée de Wynder et Graham.

56 **1.** Pour montrer que

$\left[f - 1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} ; f + 1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$,

il suffit d'établir l'inégalité $1{,}96\sqrt{f(1-f)} \leqslant 1$ ou même $\sqrt{f(1-f)} \leqslant \frac{1}{2}$.

Or $\sqrt{f(1-f)} \leqslant 0{,}5$ équivaut à $f(1-f) \leqslant 0{,}25$ c'est-à-dire à $f^2 - f + 0{,}25 \geqslant 0$ soit encore à $(f - 0{,}5)^2 \geqslant 0$, qui est vrai quel que soit $f \in [0 ; 1]$.

2. La probabilité de recouvrement de p par l'intervalle de confiance « standard » à 95 % est donc inférieure ou égale à la probabilité de recouvrement de p par l'intervalle de confiance « simplifié » de même niveau de confiance.

3. Voir fichier sur le site Math'x.

Accompagnement personnalisé

① Faire le point sur les intervalles utilisés

1. Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n ; p)$ et $F = \frac{X_n}{n}$ la variable aléatoire correspond à la fréquence de « succès » observée.

• Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de F_n est un intervalle I tel que $P(F_n \in I) \geqslant 0{,}95$.

Remarques : en classe de Première, on obtient l'intervalle de fluctuation « exact » à l'aide de la loi binomiale en déterminant les plus petits entiers a et b tels que $P(X_n \leqslant a) \geqslant 0{,}025$ et $P(X_n \leqslant b) > 0{,}975$.

I est alors l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$.

En classe de Terminale, pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, soit $I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

• Lorsque p est inconnu, un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % est un intervalle J obtenu à partir d'une réalisation de l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ dont les bornes sont aléatoires et qui contient p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Remarque : si f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n (f est une réalisation de F_n), on obtient alors $J = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ comme intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %. Il y a autant d'intervalles de confiance de p que d'échantillons !

② Comparaison de deux populations à l'aide d'intervalles de confiance à 95 %

1. Les intervalles de confiance correspondant aux fréquences f_1 et f_2 fournies par deux échantillons de taille 100 sont $J_1 = \left[f_1 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; f_1 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right]$ et $J_2 = \left[f_2 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; f_2 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right]$.

J_1 et J_2 sont disjoints lorsque l'on a soit
$f_1 + \frac{1}{\sqrt{100}} < f_2 - \frac{1}{\sqrt{100}}$, soit $f_2 + \frac{1}{\sqrt{100}} < f_1 - \frac{1}{\sqrt{100}}$,
ce qui se résume par $|f_1 - f_2| > 0{,}2$.

2. Voir fichier sur le site Math'x.

La probabilité d'obtenir deux intervalles de confiance au niveau de confiance de 95 % qui soient disjoints (alors qu'ils portent sur des échantillons d'une même population où p est connu et vaut 0,7) paraît très faible (très inférieure à 0,5 %).

3. Voir fichier sur le site Math'x.

a. En cellule B104, on peut entrer :

```
=B103–1,96*RACINE(B103*(1–B103)/100)
```

b. Deux intervalles $[a\,;b]$ et $[c\,;d]$ sont disjoints si et seulement si on a : $b < c$ ou $d < a$. Cela peut s'écrire encore : $\text{Min}(b, d) < \text{Max}(c, a)$.

L'instruction entrée en cellule B104 renvoie donc 1 lorsque les intervalles de confiance correspondant aux fréquences affichées en cellules B103 et C103 sont disjoints. L'instruction renvoie 0 dans le cas contraire.

c. On peut en déduire que la probabilité de considérer à tort une différence comme significative est d'environ 0,5 %.