

1 Signaux mécaniques et ondes mécaniques progressives

1. Signaux mécaniques

- Un signal mécanique, c'est-à-dire une perturbation de courte durée, se propage dans un milieu matériel élastique en provoquant des déformations (ébranlements) du milieu à son passage.
- On distingue :
 - les signaux transversaux : ce sont des déformations orthogonales à la direction de propagation (déformation d'une corde, vague à la surface de l'eau...);
 - les signaux longitudinaux : ce sont des déformations parallèles à la direction de propagation (compression-élongation d'un ressort...).



Fig. 1-1



Fig. 1-2

2. Phénomènes vibratoires

- Un mouvement vibratoire est un mouvement qui s'effectue de part et d'autre d'une position moyenne (position d'équilibre par exemple). Le mouvement effectué lors d'un aller-retour est une oscillation.

3. Ondes mécaniques progressives

On définit une onde mécanique comme étant le phénomène découlant de la propagation dans un milieu matériel d'une succession de signaux émis par un système vibratoire appelé source ou émetteur. Ces ondes sont dites progressives si, dans un milieu illimité, elles s'éloignent indéfiniment de la source.

- Comme pour les signaux mécaniques, il existe des ondes mécaniques longitudinales et des ondes mécaniques transversales.

- Dans les milieux homogènes, on définit la vitesse de propagation de l'onde ou **célérité** (notée V) comme étant la vitesse de déplacement de la déformation.

4. Ondes sonores

- Les ondes sonores sont des ondes mécaniques longitudinales de compression-dilatation qui se propagent dans toutes les directions. Ces ondes ne se propagent pas dans le vide. Leur propagation nécessite un milieu matériel élastique.

Exemple d'application

On jette une pierre à la surface de l'eau calme d'un lac. Celle-ci entre dans l'eau en un point O situé à quelques mètres de la rive.

1. Comment s'appelle le phénomène physique engendré par la chute de la pierre dans l'eau ?
2. Préciser en le justifiant si le phénomène de propagation est transversal ou longitudinal.
3. Dans cette expérience, quel est le rôle joué par l'eau ?
4. Supposons à présent qu'on laisse tomber en O une succession de pierres à intervalles de temps réguliers. Comment peut-on alors nommer le phénomène de propagation engendré ?

Corrigé commenté

1. **Indication** : l'expérience revient à perturber un milieu matériel élastique.

En entrant dans l'eau, la pierre provoque une perturbation de courte durée de la surface. L'eau étant un milieu matériel élastique, la perturbation va se propager. Il s'agit donc d'un **signal mécanique**.

2. La déformation de la surface se fait orthogonalement à la direction de propagation qui, elle, est dans un plan horizontal. Donc ce signal mécanique est **transversal**.

3. Ici, l'eau est le milieu dans lequel le signal peut se propager : il s'agit donc d'un **milieu matériel élastique**.

4. **Indication** : le dispositif de perturbation est maintenant entrete nu.

Le point O et chaque pierre lorsqu'elle touche l'eau constituent un système vibratoire. Le phénomène engendré est donc une **onde mécanique progressive**.

2 Propriétés générales des ondes mécaniques

1. Onde et célérité

Contrairement au déplacement d'un objet mobile, la propagation d'une onde s'effectue **sans transport de matière**. Une onde se propage cependant dans un milieu en transportant de l'information et de l'énergie.

- À cause des frottements existants lors du passage de la perturbation dans le milieu matériel, une partie de l'énergie transportée se transforme en chaleur. On dit qu'il y a **amortissement** du signal : son amplitude diminue.

- La propagation de signaux peut se produire dans des milieux :

- à une dimension (corde, ressort, échelle de perroquet, ...),

- à deux dimensions (surface de l'eau – voir figure 1-3, ...),

- à trois dimensions (son dans l'air, ...).

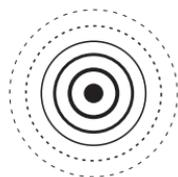


Fig. 1-3

- Dans les milieux à deux ou trois dimensions, l'énergie se répartit sur des cercles ou des sphères de plus en plus grands : il se produit une **atténuation** du signal, « il se dilue ». Il ne faut pas confondre amortissement et atténuation.

Dans la plupart des cas, la célérité ne dépend pas de la forme et de l'amplitude de l'onde. C'est une propriété du milieu et de son état physique : elle dépend de la nature du milieu, elle augmente avec son élasticité et diminue avec son inertie.

- Le milieu étant considéré homogène (constitué d'éléments de même nature), isotrope (qui a les mêmes propriétés dans toutes les directions) et infini, la célérité des ondes progressive est constante.

Remarque : les ondes électromagnétiques (en particulier la lumière) se propagent dans le vide à la vitesse :

$$c \approx 3,00.10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

2. Croisement de deux signaux

● Si deux signaux de même nature se propagent l'un vers l'autre, alors ils se superposent momentanément lorsqu'ils se croisent. La déformation résultante est égale à la somme algébrique des déformations que provoquerait chacun des signaux s'il intervenait seul au point considéré (voir figure 1-4).



Fig. 1-4

● Après s'être croisés, les signaux s'éloignent sans avoir été modifiés par leur rencontre.

Exemple d'application

On reprend la situation de l'application 1. À mi-chemin entre O et la rive, flotte un bouchon B de pêcheur initialement au repos ($OB = 10$ m).

1. Expliquer pourquoi le bouchon n'est pas entraîné vers la rive au moment où la perturbation passe à son niveau.
2. En ne tenant pas compte de l'amortissement, calculer le coefficient α par lequel il faut diviser l'énergie E_1 transportée par l'onde sur $L = 1$ cm de large lorsqu'elle est située en A à 1 m de O pour trouver l'énergie E_2 transportée par l'onde sur $L = 1$ cm de large lorsqu'elle arrive en B.

Corrigé commenté

1. Le passage de la perturbation se traduit par des mouvements ascendants et descendants de l'eau. Le bouchon étant solidaire de l'eau qui l'entoure, il n'a lui aussi qu'un mouvement ascendant et descendant. Le bouchon n'avance donc pas vers la rive.

2. **Indication** : le fait que l'on considère l'onde sur 1 cm de large ou sur toute autre longueur n'a pas d'importance en soi. C'est ici l'énergie par unité de longueur, l'énergie linéique, qui intervient dans le calcul : L se simplifie.

Si on néglige l'amortissement, la totalité de l'énergie E répartie sur le cercle C_1 de périmètre $P_1 = 2\pi(OA)$ se retrouve répartie sur le cercle C_2 de périmètre $P_2 = 2\pi(OB)$.

L'énergie transportée par $L = 1$ cm de largeur sur C_1 est : $E_1 = \frac{L}{P_1} E$.

L'énergie transportée par $L = 1$ cm de largeur sur C_2 est : $E_2 = \frac{L}{P_2} E$.

Le coefficient cherché est : $\alpha = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{L}{P_1} E}{\frac{L}{P_2} E} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\pi(OB)}{2\pi(OA)} = 10$.

3 Ondes progressives à une dimension

1. Notion d'onde progressive à une dimension

- Si, à l'extrémité S d'une longue corde légèrement tendue, nous produisons une succession d'ébranlements cadencés, nous observons la propagation d'une onde mécanique unidirectionnelle (voir fig. 1-5). La corde constitue un milieu mono-dimensionnel (non dispersif).



Fig. 1-5

2. Notion de retard

- Tout point du milieu de propagation (non dispersif) situé à la distance d de la source reproduit le mouvement de la source avec le **retard** τ tel que :

$$\tau = \frac{d}{V} \quad \text{avec } \tau \text{ en seconde, } d \text{ en mètre et } V \text{ en m.s}^{-1}.$$

- La perturbation, en un point M du milieu, à l'instant t , est celle qu'avait la source S au temps t_0 , tel que :

$$t_0 = t - \tau$$

Exemples d'application

- 1 Reprenons encore une fois la situation de l'application 1. On jette une pierre à la surface de l'eau calme d'un lac. Celle-ci entre dans l'eau en un point O situé à 20 m de la rive. À mi-chemin entre O et la rive, flotte un bouchon de pêcheur initialement au repos.

1. Un observateur regarde sa montre au moment où les vagues atteignent le bouchon. Il voit alors indiqué : $t_1 = 15 \text{ h } 00$. Sachant que la perturbation se propage à $V = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$, quelle heure t_0 était-il quand la pierre a touché l'eau ?

2. Avec quel retard τ (par rapport au bouchon) la perturbation atteindra-t-elle la rive ?

Corrigé commenté

1. **Conseil** : faites un schéma en coupe de la rive à t_0 et t_1 .

La durée qui sépare ces deux schémas est $(t_1 - t_0)$.

Pendant cette durée, la perturbation s'est propagée de d mètres à la célérité V .

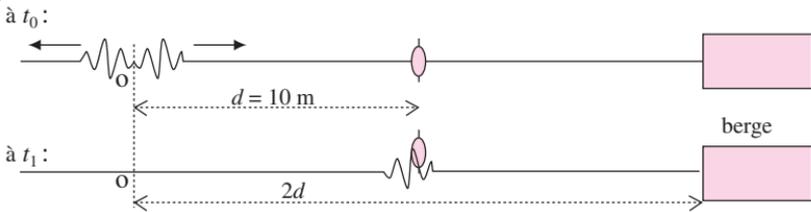


Fig. 1-6

Comme, par définition, $v = \frac{d}{t_1 - t_0}$, on a : $t_1 - t_0 = \frac{d}{v}$; soit : $t_0 = t_1 - \frac{d}{v}$.

A.N. : $t_0 = 14 \text{ h } 59 \text{ min } 40 \text{ s}$.

2. Comme le bouchon est à mi-chemin entre O et la berge, la perturbation mettra autant de temps à aller de O au bouchon que du bouchon à la berge.

Donc : $\tau = t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = \frac{d}{v}$, soit $\tau = 20 \text{ s}$. La perturbation atteint la rive 20 s après être passée au niveau du bouchon.

2 On observe la propagation d'une zone de compression-dilatation le long d'un ressort de longueur 1 mètre. Pour pouvoir étudier ce phénomène, on prend deux photos du ressort à 200 ms d'intervalle (voir fig. 1-7) :



Fig. 1-7

À l'aide des photos, déterminer la célérité de l'onde.

Corrigé commenté

Conseil : choisissez une spire du ressort à t_0 dont la position est notée A sur le schéma. Il faut ensuite trouver la spire correspondant au même état de variation mais à l'instant t_1 : on note B sa position (voir fig. 1-8).



Fig. 1-8

Pendant la durée $(t_1 - t_0)$, l'onde s'est propagée d'une longueur réelle $k.AB$, où k est le rapport de la longueur réelle du ressort divisée par sa longueur sur le schéma.

Par définition, la célérité est : $v = \frac{k.AB}{t_1 - t_0}$, soit : $v = \frac{1}{OC} \cdot AB$.

A.N. : $v = 1,65 \text{ m.s}^{-1}$

1 Notion d'onde progressive périodique

1. Phénomène périodique

- Un phénomène convenablement entretenu est périodique (ex : lame vibrante).
- Un phénomène vibratoire est périodique lorsqu'il se reproduit identique à lui-même au bout d'un intervalle de temps T , appelé **période**. T s'exprime en secondes (s).
- La **fréquence** ν d'un phénomène périodique est égale au nombre de périodes par seconde :

$$\nu = \frac{1}{T}, \text{ où } \nu \text{ est exprimé en hertz (Hz).}$$

2. Onde progressive périodique

- Une onde progressive est périodique si, à un instant quelconque, une photographie du milieu montre l'existence d'une périodicité spatiale de l'onde progressive.
- La période correspondante s'appelle **longueur d'onde** ; elle est notée λ . Exemple : onde progressive dans un milieu à une dimension de direction de propagation [Sx).

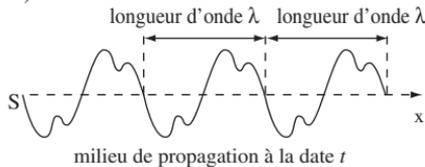


Fig. 2-1

3. Cas d'une onde progressive sinusoïdale

Une source vibratoire sinusoïdale (harmonique) génère une onde progressive sinusoïdale.

● Vibration en phase

Les points distants d'un nombre entier de longueurs d'onde sont dits en **phase** : $d = k \cdot \lambda$, avec k entier (ex : M_1 et $M_2 \dots$).

● Vibration en opposition de phase

Les points distants d'un nombre impair de demi-longueurs d'onde sont dits en **opposition de phase** :

$d = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$, avec k entier (ex : M_1 et M_3).

La figure 2-2 représente des photographies, à différentes dates, d'une corde parcourue par une onde progressive sinusoïdale. La source vibratoire (S) vibre avec une période T .

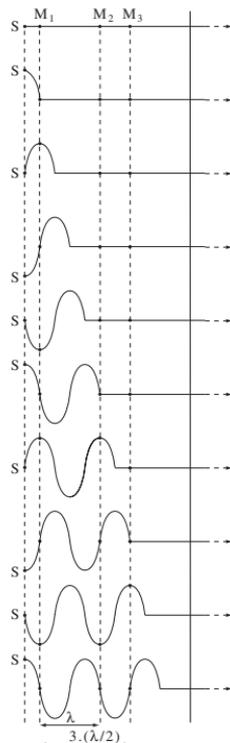


Fig. 2-2

Exemple d'application

On crée une onde circulaire sur une cuve à onde. La distance entre deux crêtes est $\lambda = 7,0$ cm. Soit deux points P_1 et P_2 de la surface situés respectivement à des distances x_1 et x_2 de la source. Comparer les mouvements de A et B :

1. si $x_2 - x_1 = 21,0$ cm ;
2. si $x_2 - x_1 = 17,5$ cm.

Corrigé commenté

Indication : regardez si $x_2 - x_1$ est divisible par λ ou par $\lambda/2$.

1. Dans le premier cas, la distance séparant A et B est un nombre entier de longueurs d'onde : $d = x_2 - x_1 = k\lambda$, avec $k = 3$ (car $3\lambda = 21,0$ cm). Donc A et B vibrent **en phase**.
2. Dans le deuxième cas, la distance séparant A et B est un nombre impair de demi-longueurs d'onde : $d = x_2 - x_1 = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$, avec $k = 2$ (car $2,5 \cdot \lambda = 17,5$ cm). Donc A et B vibrent en **opposition de phase**.

2 Double périodicité d'un phénomène ondulatoire ; équation aux dimensions

1. Périodicité temporelle T

● Tous les points du milieu de propagation reproduisent le mouvement de la source ; ils vibrent avec la même période T et la même fréquence ν que la source. T est appelé « **période temporelle** » de l'onde progressive.

2. Périodicité spatiale λ

● La longueur d'onde λ représente la **période spatiale** de l'onde : c'est la distance parcourue par l'onde pendant une période T (période du phénomène vibratoire entretenu).

● L'expression de la longueur d'onde est : $\lambda = V \cdot T = \frac{V}{\nu}$,

avec λ : longueur d'onde en mètres (m), V : vitesse de propagation en mètres par seconde ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$), T : période en secondes (s) et ν : fréquence en hertz (Hz).

3. Double périodicité λ et T

● La période temporelle T est aussi bien la durée qu'il faut à l'onde pour avancer d'une longueur d'onde λ (période spatiale) que la durée nécessaire pour qu'un point se retrouve dans le même état de vibration.

● La période spatiale λ est aussi bien la distance parcourue en T secondes (période temporelle) que la distance séparant deux points consécutifs vibrant en phase. En pratique, pour mesurer la fréquence d'une onde sur cuve à onde par exemple, on utilise un stroboscope. La fréquence de l'onde est la plus petite fréquence stroboscopique pour laquelle il y a immobilité apparente.

4. Équation aux dimensions

● La notion de dimension est rattachée à celle d'un type de grandeurs physiques ; elle est indépendante du système d'unités choisi.

● Quatre dimensions indépendantes fondamentales permettent de décrire une grande partie de la physique :

- les **longueurs** symbolisées par la lettre **L**,
- les **masses** symbolisées par la lettre **M**,
- les **temps** symbolisés par la lettre **T**,
- les **intensités** des courants symbolisées par la lettre **I**.

- En physique, l'utilisation du signe « = » signifie non seulement que les expressions de part et d'autre du signe ont la même valeur, mais aussi qu'elles sont de même nature, c'est-à-dire qu'elles ont la même dimension.
- Par convention, la dimension d'une grandeur physique A (autre qu'une longueur, une masse, un temps ou une intensité) est notée [A].
- La dimension d'un produit (ou d'un quotient) est le produit (ou le quotient) des dimensions. Les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques n'ont pas de dimension.

5. Dimension de la longueur d'onde

D'après la définition de la longueur d'onde : $[\lambda] = [v \cdot T] = [v] \cdot [T] = \frac{L}{T} \cdot T$, soit $[\lambda] = L$.

La longueur d'onde a bien la dimension d'une longueur.

Exemple d'application

Un robinet goutte de façon régulière à la surface d'une eau calme à raison de 120 gouttes par minute, en créant une onde progressive sinusoïdale. La distance entre deux crêtes est 8 cm.

1. Que vaut la vitesse V de propagation de l'onde ?
2. Sachant que 1 Hertz correspond à 1 s^{-1} , retrouver, par une analyse dimensionnelle de la formule $\lambda = \frac{V}{\nu}$, la dimension de λ .

Corrigé commenté

Indication : déterminez d'abord les périodes spatiale et temporelle de l'onde.

Rappel : la période temporelle T est l'inverse de la fréquence ν .

1. Il tombe 120 gouttes par minute, c'est-à-dire $120/60 = 2$ gouttes par seconde. La fréquence de la chute des gouttes, et par conséquent celle de l'onde, est donc $\nu = 2 \text{ Hz}$. De plus, $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$; donc la période temporelle est $T = 0,5 \text{ s}$.

Lors de la propagation de l'onde, une crête de vague prend la place de celle qui la précède en T secondes. Par définition, la période spatiale est la distance entre deux crêtes ; la période spatiale est ici $\lambda = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$.

Comme l'onde parcourt λ mètres en T secondes, sa vitesse est :

$$V = \frac{\lambda}{T}, \text{ soit } V = \frac{0,08}{0,05} = 0,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. Par analyse dimensionnelle, on a : $[\lambda] = \left[\frac{V}{\nu} \right] = \frac{L}{T} = \frac{L}{1}{1} \cdot \frac{T}{1} = L$.
 λ est bien une longueur.

3 Phénomènes de diffraction et de dispersion

1. Diffraction des ondes progressives sinusoïdales

● Lorsqu'on interpose un diaphragme de petite dimension dans le faisceau d'une onde progressive, le faisceau s'élargit : c'est le **phénomène de diffraction** (figure 2-3).

De manière générale, il y a diffraction chaque fois qu'une onde rencontre un obstacle (figure 2-4).

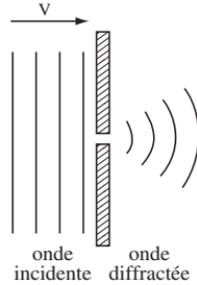


Fig. 2-3

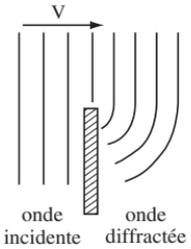


Fig. 2-4

● Conséquences : les ondes peuvent contourner des obstacles.

2. Influence de la dimension de l'ouverture sur le phénomène observé

Lorsqu'une onde progressive sinusoïdale, de longueur d'onde λ , passe au travers d'une ouverture de dimension d :

● si $d \approx \lambda$ ou $d < \lambda$ (figure 2-4), l'onde est diffractée et elle prend la forme d'une onde sphérique (ou circulaire) centrée sur l'ouverture ;

● si $d \geq \lambda$ (figure 2-5), l'onde passe sans être perturbée. Elle est seulement diaphragmée (sauf près des bords où l'on retrouve une diffraction mais très négligeable en général).

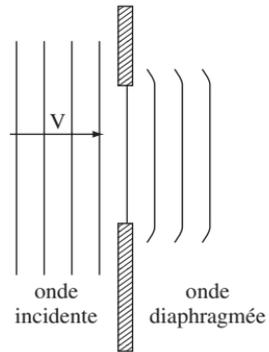


Fig. 2-5

Le passage par une ouverture, quelle que soit sa dimension d , ne modifie ni la longueur d'onde ni la fréquence de l'onde progressive.

3. Phénomène de dispersion des ondes mécaniques

Un milieu est dit **dispersif** pour une onde progressive sinusoïdale si la célérité de l'onde dépend de sa fréquence.

- Certains milieux sont très dispersifs : c'est le cas de la surface de l'eau.
- Certains milieux sont très peu dispersifs : c'est le cas d'un gaz.

Exemple d'application

On fait passer une onde sonore de fréquence $\nu = 1$ kHz dans une ouverture circulaire de diamètre d pratiquée dans une paroi de laine de roche (isolant acoustique). L'onde sonore est émise par une source ponctuelle assez éloignée. Dans les conditions de l'expérience, la vitesse du son dans l'air est $v = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. Quelle est la géométrie de l'onde émise ?
2. Du fait que la source ponctuelle est assez éloignée, quelle géométrie peut-on attribuer à l'onde incidente au niveau de l'obstacle ?
3. a) Quelle sera la géométrie de cette onde sonore après l'obstacle si $d = 10 \text{ cm}$?
b) Quelle sera la géométrie de cette onde sonore après l'obstacle si $d = 1 \text{ m}$?

Corrigé commenté

1. **Indication** : en 3 dimensions, une onde est en général soit sphérique soit plane. Le choix est donc assez restreint.

Comme la source est ponctuelle, l'onde est **sphérique**.

2. Du fait que la source ponctuelle est assez éloignée, on peut considérer l'onde comme **plane** lorsqu'elle arrive sur la paroi de laine de roche. En effet, on peut assimiler une petite portion de sphère à une portion de plan si la sphère est grande devant la portion considérée, c'est-à-dire si sa surface (ici l'obstacle) est éloignée de son centre (la source sonore).

3. **Indication** : Comparez la dimension du diaphragme à la longueur d'onde du son.
En fonction du résultat, l'onde est soit diffractée, soit simplement diaphragmée.

Connaissant la vitesse v de l'onde et sa fréquence ν , on en déduit sa longueur d'onde λ : $\lambda = \frac{v}{\nu}$. A.N. : $\lambda = \frac{340}{1000} = 0,34 \text{ m} = 34 \text{ cm}$

- a) Si $d = 10 \text{ cm}$, $d < \lambda$: l'onde est diffractée, elle est donc **sphérique**.
- b) Si $d = 100 \text{ cm}$, $d > \lambda$: l'onde est diaphragmée, elle est donc **plane**.

1 Propagation de la lumière dans le vide

1. L'optique géométrique : rappels

- Dans un milieu transparent, homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse qui dépend du milieu.
- Le rayon lumineux est le modèle qui représente le chemin suivi par la lumière. Cette notion de rayon lumineux est à la base de l'optique géométrique. Elle permet :
 - d'expliquer la formation des ombres (utilisée pour les calculs de longueurs en classe de seconde) et les conditions de visibilité d'un objet ;
 - de comprendre les phénomènes de réflexion et de réfraction (lois de Descartes) ;
 - la conception d'instruments d'optiques (lunette astronomique, lunette terrestre ou jumelles, appareils de projection ou de rétro projection...).

2. Modèle ondulatoire de la lumière

- L'existence du phénomène de diffraction de la lumière (voir page 32) prouve son caractère ondulatoire.
- La lumière est un ensemble d'ondes électromagnétiques auxquelles l'œil humain est sensible : ces ondes sont appelées ondes lumineuses.

Remarque : selon ce que l'on fait avec la lumière, on la voit comme un grain de lumière appelé « photon » (optique géométrique), ou bien comme une onde (lors d'une diffraction par exemple). On parle de la dualité onde-corpuscule. Ces deux « facettes » de la lumière restent longtemps contradictoires l'une de l'autre mais elles sont désormais unifiées par une théorie assez récente : la mécanique quantique.

3. Célérité

- La lumière se propage dans les milieux transparents ; elle est arrêtée par les milieux opaques.
- Contrairement aux ondes mécaniques, les ondes lumineuses se propagent aussi dans le vide. La propagation de ces ondes se fait avec la **même célérité** :

$$c \approx 3,00.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

4. Fréquence et longueur d'onde dans le vide

● Chaque onde lumineuse est caractérisée par sa fréquence ν (ou sa période T) et sa longueur d'onde λ , dans le vide telle que :

$$\lambda_0 = c \cdot T = \frac{c}{\nu}.$$

Exemple d'application

On veut estimer la distance D à laquelle se trouve un immeuble de hauteur H composé de 18 étages de hauteur $L = 3$ m chacun. En tendant le bras, on observe que le pouce, tenu verticalement, cache exactement l'immeuble. Le pouce, qui mesure $h = 6$ cm, se trouve alors à une distance $d = 0,60$ m de l'œil.

1. Faire un schéma en représentant les rayons lumineux importants.
2. Calculer D en justifiant les hypothèses et les étapes suivies.

Corrigé commenté

1.

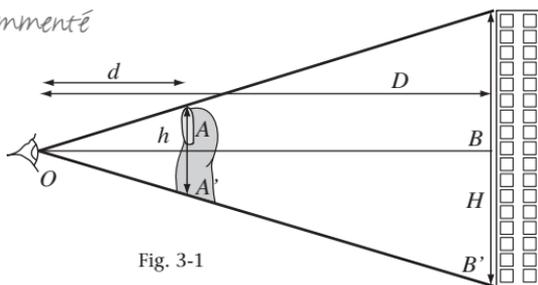


Fig. 3-1

2. **Conseil :** pensez à justifier que les rayons lumineux sont rectilignes.

On suppose que l'air (évidemment transparent) est un milieu homogène et isotrope. La lumière s'y propage donc en ligne droite.

On peut alors appliquer le théorème de Thalès dans les triangles (OBB') et

$$(OAA') : \frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'} \text{ soit } \frac{d}{D} = \frac{\frac{h}{2}}{\frac{H}{2}} = \frac{h}{H} \text{ et } D = \frac{H \cdot d}{h}.$$

$$\text{On obtient donc : } D = \frac{18 \cdot L \cdot d}{h}, \text{ AN : } D = \frac{18 \times 3 \times 0,60}{0,06} = 540 \text{ m.}$$

2 La diffraction de la lumière

1. Observation de la diffraction de la lumière émise par un laser

● Si on fait passer le faisceau laser à travers une ouverture circulaire de diamètre de l'ordre du dixième de millimètre, nous constatons que le faisceau émergent diverge. Nous observons sur l'écran (figure 3-2) un cercle brillant entouré d'anneaux noirs et brillants : la figure observée est appelée figure de diffraction.

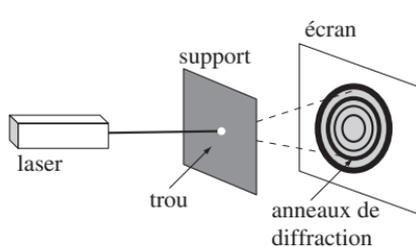


Fig. 3-2

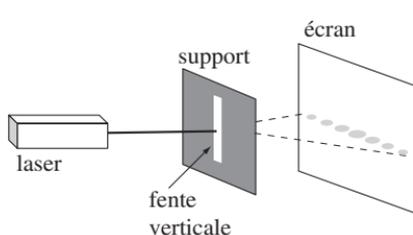


Fig. 3-3

- Remplaçons l'ouverture circulaire par une fente (figure 3-3) : la lumière est diffractée dans une direction perpendiculaire à la fente.
- Un fil rectiligne diffracte la lumière de la même façon qu'une fente.

2. Observation de la diffraction de la lumière blanche

● Lorsqu'on regarde la lumière du jour à travers un voilage fin, on voit apparaître des **taches lumineuses irisées** formant une croix (figure 3-4).

● Chaque maille du tissu diffracte la lumière blanche, l'aspect observé résulte de la superposition des lumières diffractées.

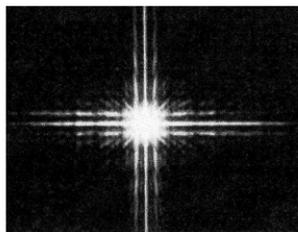


Fig. 3-4

3. Influence de la dimension de l'ouverture ou de l'obstacle sur le phénomène de diffraction

● On admet, en première approximation, qu'une onde lumineuse traversant une petite ouverture de largeur a (figure 3-5) diverge en formant un cône de demi-angle au sommet θ tel que :

$$\theta = \frac{\lambda}{a}, \text{ avec } \theta \text{ exprimé en radian.}$$

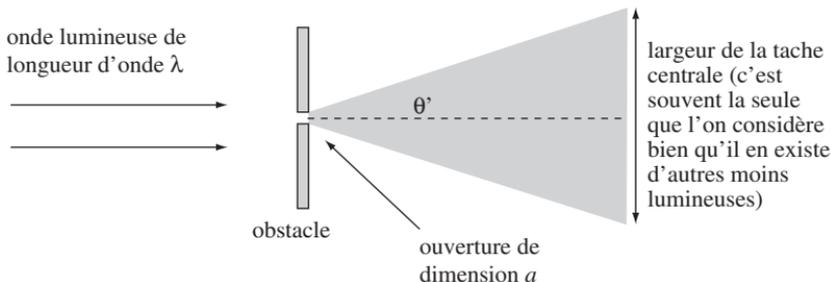


Fig. 3-5

Exemple d'application

On envoie un rayon laser He-Ne ($\lambda = 632 \text{ nm}$) sur une plaque de carton en un point percé d'un petit trou circulaire de diamètre a .

1. Que se passe-t-il si $a = 1 \text{ cm}$?
2. Que se passe-t-il si $a = 10 \mu\text{m}$? Calculer le demi-angle au centre θ en degrés du cône de lumière qui se forme après l'obstacle.

Corrigé commenté

Conseil : pensez à comparer la longueur d'onde du rayonnement et les dimensions du trou.

1. Dans ce cas, $a \gg \lambda_0$. On a donc $\theta = \frac{\lambda_0}{a} \approx 0$.

Il n'y a pas de diffraction visible : le faisceau n'est que diaphragmé.

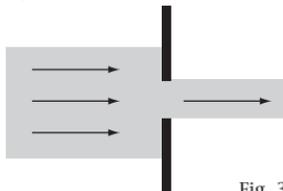


Fig. 3-6

2. Ici a est plus petit. Il y a formation

d'un cône de diffraction tel que : $\theta = \frac{\lambda_0}{a}$.

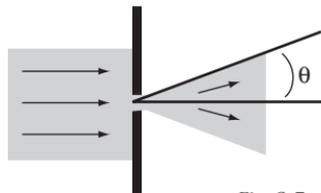


Fig. 3-7

$$\text{AN: } \theta = \frac{632 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-6}} = 6,32 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 6,32 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi} \approx 3,6^\circ$$

3 Lumières monochromatique et polychromatique ; indice d'un milieu transparent

1. Lumière monochromatique

- Une lumière monochromatique (composée d'une seule couleur) est caractérisée par sa fréquence ν . Cette lumière monochromatique produit sur l'œil une sensation de couleur déterminée, qui est liée à sa fréquence. La fréquence d'une radiation monochromatique (donc la couleur) ne change pas lorsqu'elle passe d'un milieu transparent à un autre.
- Dans un milieu donné, une lumière monochromatique peut être caractérisée par sa longueur d'onde λ :

$$\lambda = \frac{V}{\nu}$$

où V représente la célérité de l'onde dans le milieu considéré. On voit bien que la longueur d'onde dépend de ce milieu.

2. Lumière polychromatique

- Une lumière polychromatique est constituée de plusieurs lumières monochromatiques.
- Les lumières monochromatiques du domaine du visible composant la lumière blanche ont des longueurs d'onde, **dans le vide**, comprises entre 400 nm et 800 nm.
- Les radiations ultraviolettes et infrarouges encadrent le spectre de la lumière visible.

3. Propagation dans les milieux transparents : indice du milieu

- La célérité de la lumière dépend du milieu dans lequel elle se propage :
 - dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,
 - dans l'eau : $V_{\text{eau}} \approx 2,26 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- On définit l'indice de réfraction n d'un milieu matériel transparent comme étant le rapport de la célérité de la lumière dans le vide par la célérité de la lumière dans le milieu considéré :

$$n = \frac{c}{V}, \quad n \text{ étant sans dimension.}$$

- La célérité V de la lumière dans un milieu matériel transparent étant toujours inférieure à sa célérité dans le vide, alors n est toujours supérieur à 1.

$$n > 1$$

Exemples : n_{air} (à 0°C , 10^5Pa) = $1,00029 \approx 1,00$; $n_{\text{eau}} \approx 1,33$; $n_{\text{verre}} \approx 1,50$.

- Par suite, la longueur d'onde d'une onde lumineuse dépend du milieu dans lequel elle se propage. Comme $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$ et $\lambda = \frac{V}{\nu}$, on a : $\lambda = \frac{V}{c} \lambda_0$.

On obtient donc : $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ ou $n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$.

Exemple d'application

On admet que la sensation « couleur jaune » est due aux ondes électromagnétiques visibles ou lumières monochromatiques dont les fréquences sont comprises entre $\nu_{\text{min}} = 5,0 \cdot 10^{14}$ Hz et $\nu_{\text{max}} = 5,3 \cdot 10^{14}$ Hz. On admet que la célérité dans l'eau est sensiblement la même pour les diverses lumières monochromatiques et est égale à $225\,000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Préciser les longueurs d'onde correspondantes lorsque ces lumières se propagent dans l'air, puis dans l'eau.

Corrigé commenté

Indication : considérer que la célérité de la lumière est indépendante de sa fréquence revient à négliger le caractère dispersif de l'eau. Pour l'air, on fait toujours cette approximation.

Rappel : la célérité de la lumière dans l'air est supposée connue : $V_{\text{air}} \approx c \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

On a $\lambda = \frac{V}{\nu}$, donc $\lambda_{\text{air max}} = \frac{V_{\text{air}}}{\nu_{\text{min}}}$ et $\lambda_{\text{air min}} = \frac{V_{\text{air}}}{\nu_{\text{max}}}$.

$$\text{AN : } \lambda_{\text{air max}} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{5,0 \cdot 10^{14}} \approx 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ m et } \lambda_{\text{air min}} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{5,3 \cdot 10^{14}} \approx 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ m .}$$

Pour la couleur jaune dans l'air, on a : $5,7 \cdot 10^{-7} \text{ m} \leq \lambda \leq 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

De même, $\lambda_{\text{eau max}} = \frac{V_{\text{eau}}}{\nu_{\text{min}}}$ et $\lambda_{\text{eau min}} = \frac{V_{\text{eau}}}{\nu_{\text{max}}}$.

On calcule $\lambda_{\text{eau max}} \approx 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ et $\lambda_{\text{eau min}} \approx 4,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Pour la couleur jaune dans l'eau, on obtient : $4,2 \cdot 10^{-7} \text{ m} \leq \lambda \leq 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

4 Phénomène de dispersion de la lumière blanche par un prisme

1. Milieux dispersifs

- Dans certains milieux matériels transparents, la célérité de la lumière dépend de la fréquence de la lumière considérée. Comme dans le cas des ondes mécaniques, ces milieux sont dits dispersifs.
- L'indice de réfraction du milieu dépend donc dans ce cas non seulement du milieu mais aussi de la fréquence de l'onde lumineuse qui s'y propage.

2. Le prisme

- Éclairé de lumière blanche, le prisme décompose cette lumière en un spectre coloré continu. Une tradition mythique veut que l'on distingue sept couleurs (violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge) dans ce spectre (arc-en-ciel) mais il est clair que la couleur varie continûment du violet au rouge et qu'il y a donc une infinité de couleurs.

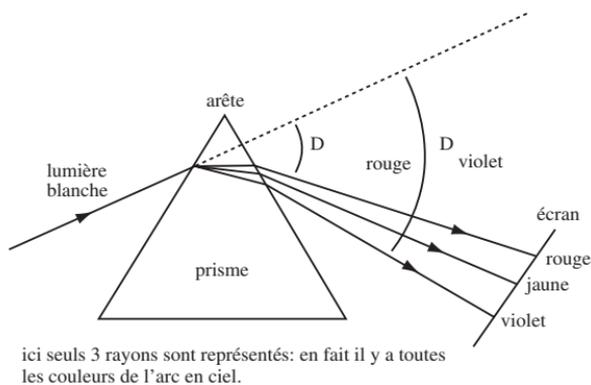


Fig. 3-8

- Dans un milieu transparent comme le verre, les diverses radiations n'ont pas la même vitesse : cette vitesse décroît des radiations rouges aux radiations violettes. En conséquence, l'indice n du verre constituant un prisme décroît quand la longueur d'onde augmente : $n_{400\text{nm}} = 1,7$ et $n_{650\text{nm}} = 1,5$.
- Les radiations qui constituent la lumière blanche ne subissent pas la même réfraction. Le violet est plus réfracté (plus dévié) que le jaune, qui lui-même est plus dévié que le rouge : c'est la dispersion de la lumière.

Exemple d'application

On envoie un faisceau de lumière monochromatique sur un prisme en verre. Que lui arrive-t-il lors de la traversée du prisme ?

Corrigé commenté

Indication : exploitez le caractère monochromatique de la lumière.

Comme, par définition, cette lumière n'est composée que d'une seule couleur, il n'y aura pas de dispersion. Ce rayon subit une réfraction sur la face d'entrée et une autre sur la face de sortie. Ce rayon est donc simplement dévié.

1 Stabilité et instabilité des noyaux

1. Composition des noyaux

- Le noyau est le cœur d'un atome. Il renferme des nucléons : Z protons chargés positivement (charge $+e$) et $(A-Z)$ neutrons (de charge nulle et de masse voisine de celle des protons).
- A est appelé **nombre de masse** : il représente le nombre de nucléons, c'est-à-dire le nombre total de protons et de neutrons.
- Z est le **nombre de charge** ou numéro atomique : il représente le nombre de protons.

2. Représentation d'un noyau

- Un noyau est donc caractérisé par les nombres A et Z . Il sera représenté par le symbole :



Remarque : on appelle **nucléide** l'ensemble d'atomes ou d'ions possédant des noyaux identiques.

3. Isotopes d'un même élément chimique

- Ce sont des noyaux ayant le même nombre de charge Z (même nombre de protons) mais des nombres de masse A différents (donc des nombres différents de neutrons).

- Exemples :

Isotopes de l'hydrogène : ${}_1^1\text{H}$ [1 proton et $(1-1) = 0$ neutron] ; ${}_1^2\text{H}$ [1 proton et $(2-1) = 1$ neutron] et ${}_1^3\text{H}$ [1 proton et $(3-1) = 2$ neutrons].

Isotopes du carbone : ${}_6^{12}\text{C}$ [6 protons et $(12-6) = 6$ neutrons] et ${}_6^{14}\text{C}$ [6 protons et $(14-6) = 8$ neutrons].

4. Domaine de stabilité et d'instabilité des noyaux

- La cohésion et la stabilité des noyaux atomiques sont assurées par l'interaction forte. C'est une interaction attractive intense, de courte portée, qui s'exerce indifféremment entre protons, entre neutrons ou entre proton et neutron. Elle est en concurrence avec la répulsion électrostatique qui existe entre les protons.

- Lorsque le nombre de protons dans le noyau augmente, la répulsion électrostatique l'emporte sur l'interaction forte : le noyau est instable.

Exemple d'application

On considère la courbe (N, Z) de stabilité des noyaux donnant l'inventaire des noyaux des principaux atomes. Les points noirs indiquent les noyaux stables et les points rouges, les noyaux instables, radioactifs.

1. Comparer le nombre de neutrons et de protons pour des noyaux légers stables.
2. Comparer le nombre de neutrons et de protons pour des noyaux lourds stables.
3. Y a-t-il forcément un seul isotope stable par élément ?

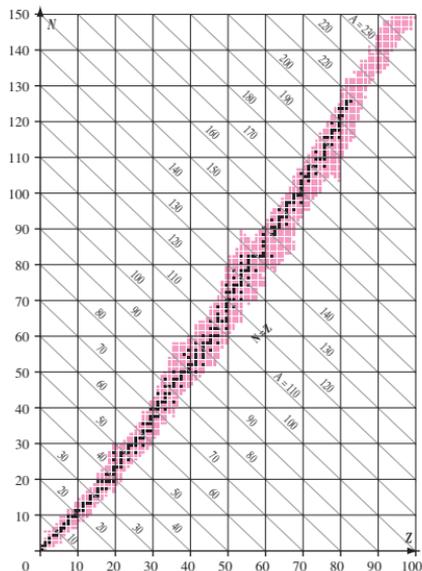


Fig. 4-1

Corrigé commenté

1. Indication : situez les points concernés par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On voit que les points noirs pour les petites valeurs de N et de Z (noyaux légers) sont situés au voisinage de la droite $N = Z$. On en déduit que les noyaux stables légers contiennent un nombre de neutrons sensiblement égal à celui des protons.

2. Indication : situez les points concernés par rapport à la droite d'équation $y = 2x$.

On voit que les points noirs pour les grandes valeurs de N et de Z (noyaux lourds) sont situés bien au-dessus de la droite $N = Z$. On en déduit que les noyaux stables légers contiennent plus de neutrons que de protons.

3. Certains points noirs se trouvent sur une même verticale, donc il existe des éléments qui ont plusieurs isotopes stables.

2 La radioactivité

1. Définition

- La radioactivité résulte de désintégrations spontanées de noyaux atomiques instables. Ces noyaux sont dits radioactifs. Cette désintégration radioactive s'accompagne de l'émission de particules α , β^- ou β^+ .

2. Les trois types de radioactivité spontanée

- Il existe trois types de radioactivité spontanée :
 - la radioactivité α : émission de particule α (positive), notée ${}^4_2\text{He}$;
 - la radioactivité β^- : émission d'un électron, noté ${}^0_{-1}\text{e}$;
 - la radioactivité β^+ : émission d'un positon ${}^0_{+1}\text{e}$ (antiparticule de l'électron).
- Une désintégration radioactive s'accompagne souvent d'un rayonnement électromagnétique de fréquence élevée : un noyau père X, instable, se désintègre en un noyau fils excité Y^* qui retourne dans son état fondamental Y par des émissions γ . On parle de désexcitation γ : ${}^A_Z Y^* \rightarrow {}^A_Z Y + \gamma$.

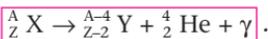
3. Lois de conservation des équations-bilan des réactions nucléaires

- Lors d'une réaction nucléaire, il y a conservation :
 - du nombre de charge Z ;
 - du nombre de nucléons A avant et après la réaction ;
 - de l'énergie totale.
- Lors d'une désintégration radioactive, il y a une diminution de l'énergie de masse du système de particules qui constituaient le noyau : cette énergie se transforme en énergies cinétiques des particules et en énergie transférée par rayonnement γ .

4. Équation d'une réaction nucléaire

- *Radioactivité α :*

Elle concerne les noyaux lourds dont le nombre de masse est $A > 200$ (figure 4-2).



Exemple : ${}^{226}_{88} \text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86} \text{Rn} + {}^4_2 \text{He} + \gamma$

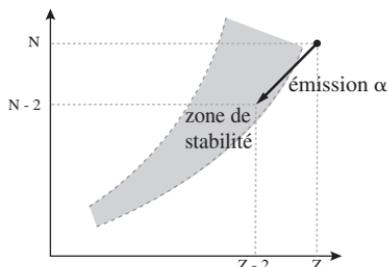


Fig. 4-2

● **Radioactivité β^- :**

Elle concerne certains nucléides présentant un excès de neutrons (figure 4-3) :



Tout se passe comme si :

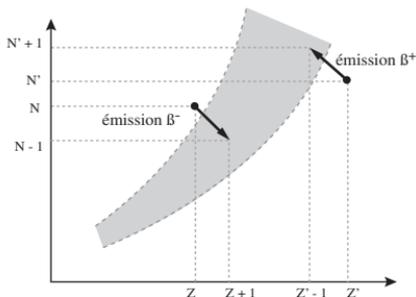
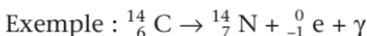
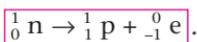
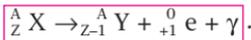


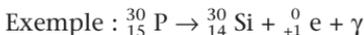
Fig. 4-3

● **Radioactivité β^+ :**

Cette désintégration ne s'observe qu'avec les radionucléides artificiels comportant un excès de protons (figure 4-3) :



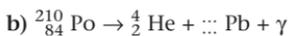
Tout se passe comme si : ${}^1_1 p \rightarrow {}^1_0 n + {}^0_{+1} e.$



Exemple d'application

1. Le nucléide ${}^{14}_6 C$ (carbone 14) est radioactif. Il se désintègre en émettant une particule β^- (le numéro atomique du Bore est $Z=5$, celui de l'azote $Z=7$). Donner la composition de ce noyau et écrire l'équation de sa désintégration.

2. Compléter les équations des réactions nucléaires suivantes en précisant le type de radioactivité :



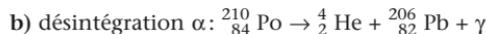
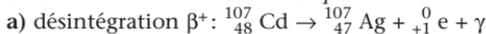
Corrigé commenté

1. D'après la notation ${}^A_Z X$, ce noyau est composé de $Z = 6$ protons et de $(A-Z) = 8$ neutrons.

L'équation de sa désintégration est : ${}^{14}_6 C \rightarrow {}^{14}_7 N + {}^0_{-1} e + \gamma.$

Le noyau fils obtenu est celui d'azote.

2. **Indication :** utilisez les deux premières lois de conservation.



3 Loi de décroissance radioactive

1. Loi de décroissance

● Étant donné une population de $N(t)$ noyaux radioactifs à la date t . On note ΔN la variation de cette population pendant une durée Δt . Du fait de la désintégration d'un certain nombre de noyaux radioactifs, la population $N(t)$ décroît et la variation correspondante ΔN est négative.

● La quantité de noyaux qui se désintègrent pendant cette durée Δt est égale à $(-\Delta N)$ telle que : $\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$ (1). La grandeur positive λ est la **constante radioactive**. Elle est caractéristique du type de noyau pour la désintégration étudiée (unité : s^{-1}).

● La conséquence de cette relation (1) est que le nombre moyen de noyaux non désintégrés présents dans l'échantillon à une date t est :

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau},$$

avec $\tau = \frac{1}{\lambda}$ la **constante de temps** et N_0 le nombre de noyaux radioactifs initialement présents dans l'échantillon.

2. Demi-vie $t_{1/2}$

● La demi-vie, ou période radioactive, d'un nucléide radioactif est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents dans un échantillon s'est désintégrée (figure 4-4) : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}$ (2).

● Au bout d'une durée égale à n fois t_s , le nombre de noyaux radioactifs encore présents dans l'échantillon est :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda n t_{1/2}} = N_0 \cdot (e^{-\lambda t_{1/2}})^n = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n. \text{ On a donc : } N(t) = \frac{N_0}{2^n}.$$

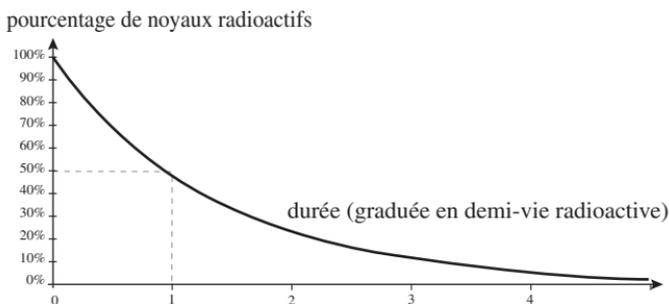


Fig. 4-4: loi de décroissance radioactive

3. Activité d'un échantillon

● L'activité A mesure le nombre moyen de désintégrations par unité de temps. L'activité est exprimée en becquerels (Bq). Un becquerel correspond à une désintégration par seconde.

$$A(t) = \frac{(-dN)}{dt} = -\frac{d(N_0 e^{-\lambda t})}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}, \text{ soit } \boxed{A(t) = \lambda \cdot N(t)}.$$

D'après (2), on peut aussi écrire : $\boxed{A(t) = \ln 2 \cdot \frac{N(t)}{t_{1/2}}}$.

● Par suite, un échantillon d'activité initiale A_0 possède, au bout de n périodes, une activité : $\boxed{A(t) = \frac{A_0}{2^n}}$.

● $A(t)$ est l'opposé de la pente de la tangente à la courbe $N(t)$ à l'instant t .

Exemples d'application

① Montrer que la formule $N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, dont la condition initiale est $N(t=0) = N_0$, se déduit de $\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$.

Corrigé commenté

Indication : considérez l'égalité comme une intégration de N_0 à N pour le membre de gauche et de 0 à t pour celui de droite.

Si on considère une durée très petite dt alors l'expression (1) s'écrit sous la forme :

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt, \text{ soit : } \left(\frac{1}{N}\right) \cdot dN = -\lambda \cdot dt \quad (2). \text{ On intègre et on obtient :}$$

$$\int_{N_0}^N \frac{1}{N} \cdot dN = \int_0^t -\lambda \cdot dt, \text{ soit : } \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t, \text{ d'où } \boxed{N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}.$$

② Montrer que la formule $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ se déduit de $N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

Corrigé commenté

Indication : Cherchez t dans l'équation de départ en remplaçant N par $N_0/2$.

$$\text{Comme } N = \frac{N_0}{2}, \text{ on a : } \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot \exp(-\lambda t_{1/2}), \text{ soit } \frac{1}{2} = \exp(-\lambda t_{1/2}).$$

$$\text{On obtient : } \ln 1 - \ln 2 = -\lambda t_{1/2}, \text{ d'où } \ln 2 = \lambda t_{1/2} \text{ et donc } \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}.$$

1 Équivalence masse-énergie

1. Équivalence masse-énergie

● Einstein a montré que la masse constitue une forme d'énergie appelée énergie de masse. La relation entre la masse (en kg) d'une particule, au repos, et l'énergie (en J) qu'elle possède est :

$$E = m \cdot c^2,$$

avec $c \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, vitesse de la lumière dans le vide.

● L'unité d'énergie utilisée en physique nucléaire est l'électron-volt (eV) et ses multiples (keV, MeV, GeV) :

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

2. Défaut de masse

● La masse d'un noyau est inférieure à la somme des masses des nucléons le constituant.

● On appelle **défaut de masse d'un noyau**, la différence entre la masse totale des nucléons séparés au repos et la masse du noyau constitué et au repos.

Pour un noyau ${}^A_Z X$, le défaut de masse est :

$$\Delta m = (Z \cdot m_p + (A-Z) \cdot m_n) - m_X,$$

avec m_X : masse du noyau, m_p : masse du proton et m_n : masse du neutron.

● La formation d'un noyau à partir de ses constituants s'accompagne d'une perte de masse, donc d'une émission d'énergie.

3. Énergie de liaison

● L'énergie de liaison est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau au repos pour le dissocier en nucléons isolés et immobiles :

$$E_\ell + m_{\text{noyau}} \cdot c^2 = m_{\text{nucléons}} \cdot c^2.$$

● Pour un noyau ${}^A_Z X$: $E_\ell = m_{\text{nucléons}} \cdot c^2 - m_X \cdot c^2 = (Z \cdot m_p + (A-Z) \cdot m_n) c^2 - m_X \cdot c^2$.

On a : $E_\ell = [(Z \cdot m_p + (A-Z) \cdot m_n) - m_X] c^2$, soit $E_\ell = \Delta m \cdot c^2$.

L'énergie de liaison est toujours positive.

4. Énergie de liaison par nucléon

- Pour juger de la stabilité d'un noyau et pour comparer les différents types de noyaux entre eux, il est nécessaire de considérer l'énergie moyenne de liaison par nucléons, soit : $\frac{E_l}{A}$.
- Cette énergie correspond à l'énergie nécessaire pour arracher un nucléon au noyau.
- Un noyau est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon est grande.

Exemples : L'énergie de liaison du fer 56 est $E_l = 492 \text{ MeV}$; son énergie de liaison par nucléon est de $8,79 \text{ MeV/nucléon}$.

L'énergie de liaison de l'uranium 238 est $E_l = 1802 \text{ MeV}$; son énergie de liaison par nucléon est de $7,57 \text{ MeV/nucléon}$.

Le fer 56 est donc plus stable que l'uranium 238.

Exemple d'application

Le noyau $^{16}_8\text{O}$ a une masse $m_{\text{noyau}} = 2,656 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. En prenant $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, calculer :

1. le défaut de masse Δm_1 ;
2. l'énergie de liaison E_l de ce noyau en joule puis en MeV ;
3. l'énergie de liaison par nucléon $\frac{E_l}{A}$ en MeV/nucléon.

Corrigé commenté

Rappel : sachez que la masse d'un noyau est inférieure à la somme des masses des nucléons le constituant.

1. Par définition, on a : $\Delta m = (Z \cdot m_p + (A-Z) \cdot m_n) - m_{\text{noyau}}$.

AN : $\Delta m = [8 \times 1,673 \cdot 10^{-27} + (16 - 8) \cdot 1,675 \cdot 10^{-27}] - 2,656 \cdot 10^{-26} = 2,240 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$.

2. Par définition, on sait que : $E_l = \Delta m \cdot c^2$.

AN : $E_l = 2,240 \cdot 10^{-28} \cdot (3,00 \cdot 10^8)^2 = 2,016 \cdot 10^{-11} \text{ J}$.

En divisant par $1,6 \cdot 10^{-19}$, on trouve : $E_l = 1,260 \cdot 10^8 \text{ eV}$, soit $E_l = 126 \text{ MeV}$.

3. On a : $\frac{E_l}{A} = \frac{\Delta m \cdot c^2}{A}$. AN : $\frac{E_l}{A} = \frac{126}{16} \approx 7,88 \text{ MeV/nucléon}$.

2 Fusion et fission

1. Courbe d'Aston

● La figure suivante donne les valeurs moyennes de $-E_l/A$ en fonction de A (courbe d'Aston) ; cette courbe permet de comparer la stabilité des différents types de noyaux.

● Sur cette figure, le niveau zéro de l'énergie correspond aux nucléons séparés et au repos. À un **minimum de la courbe** (valeur maximale pour $+E_l/A$) correspond une **stabilité maximale**.

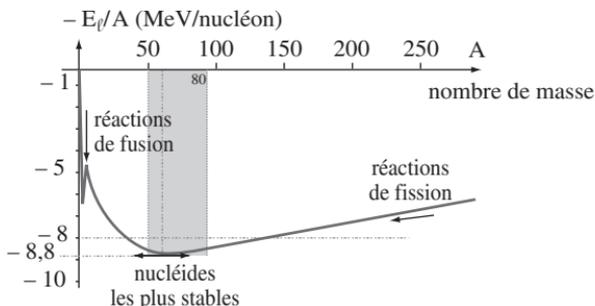


Fig. 5-1

2. Exploitation de la courbe d'Aston : domaines de la fission et de la fusion

- Pour $50 < A < 80$, la courbe présente un minimum très aplati qui correspond donc aux noyaux les plus stables.
- Les extrémités de la courbe correspondent aux noyaux les plus instables :
 - un noyau très lourd ($A > 100$), bombardé par une particule adéquate peut se casser en deux noyaux plus légers : c'est la **fission nucléaire** ;
 - un noyau léger peut donner un noyau plus lourd (possédant une énergie de liaison par nucléon plus grande) : c'est la **fusion nucléaire**.

3. La fission nucléaire

● Lors d'une fission nucléaire, un neutron lent dont l'énergie cinétique est de l'ordre de 0,1 MeV « casse » un noyau lourd **fissile** en formant deux noyaux plus légers et en libérant d'autres neutrons et de l'énergie.

● Le seul noyau naturel fissile est l'uranium 235.

Exemple de réaction : ${}_0^1\text{n} + {}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{38}^{95}\text{Sr} + {}_{54}^{139}\text{Xe} + 2 {}_0^1\text{n} + \gamma$

● Si la masse de matière fissile dépasse une certaine valeur, appelée **masse critique**, les neutrons libérés pourront, à leur tour, provoquer une fission : c'est la réaction en chaîne.

4. Réaction en chaîne

Soit k le nombre moyen de neutrons libérés qui provoquent une fission.

- Si $k < 1$, la réaction s'arrête. Le système est sous-critique.
- Si $k > 1$, la réaction peut devenir explosive. Le système est sur-critique.
- Si $k = 1$, la réaction s'auto-entretient. Le système est critique.

5. La fusion nucléaire

- Lors d'une fusion nucléaire, deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau plus lourd en libérant de l'énergie.
- C'est la fusion d'hydrogène en hélium qui est à l'origine de l'énergie solaire : ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 17 \text{ MeV}$.
- Ces réactions sont très exoénergétiques (Bombe H).
- Les réactions de fusion ne peuvent s'effectuer qu'à très haute température ($\approx 10^8 \text{ K}$). Ces réactions sont souvent appelées « réactions thermonucléaires ».

Exemple d'application

1. Calculer l'énergie de liaison par nucléon $\frac{E_l}{A}$ (en MeV/nucléon) d'un noyau d'uranium 235. Quelle est sa particularité parmi tous les noyaux naturels ? On rappelle que le numéro atomique de l'uranium est 92.
2. Lors de sa fission, il peut par exemple donner un noyau ${}^{148}_{57}\text{La}$, un noyau de brome et 3 neutrons. Écrire l'équation de cette réaction.

Corrigé commenté

1. **Indication** : calculez d'abord le défaut de masse.

Par définition, $\frac{E_l}{A} = \frac{\Delta mc^2}{A} = \frac{[(Zm_p + (A - Z) \cdot m_n) - m_{\text{noyau}}] c^2}{A}$.

AN: $\frac{E_l}{A} = \approx 1,24 \cdot 10^{-12} \text{ J/nucléon}$.

En divisant par $1,6 \cdot 10^{-19}$, on a : $E_l = 7,76 \cdot 10^6 \text{ eV/nucléon} = 7,76 \text{ MeV/nucléon}$.
C'est le seul noyau naturel fissile !

2. **Indication** : utilisez les lois de conservation pour équilibrer la réaction.

En utilisant les lois de conservation de la charge et des nucléons, on obtient :



3 Bilan de masse et d'énergie d'une réaction nucléaire

1. Masse en physique nucléaire

- Pour exprimer les masses, en physique nucléaire, on utilise une unité pratique : l'**unité de masse atomique** (symbole **u**) qui est, par convention, le douzième de la masse d'un atome de carbone 12.

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12,10^{-3}}{N_A} \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

- D'après la relation d'Einstein, 1 u équivaut à 931,5 MeV.

	proton	neutron	électron	positon ou positron	particule α
masse (en kg)	$1,6726 \cdot 10^{-27}$	$1,6479 \cdot 10^{-27}$	$9,1095 \cdot 10^{-31}$	$9,1095 \cdot 10^{-31}$	$6,6470 \cdot 10^{-27}$
masse (en u)	1,007 3	1,008 7	$0,55 \cdot 10^{-3}$	$0,55 \cdot 10^{-3}$	4,001 5
énergie au repos (en MeV)	938,3	939,6	0,5	0,5	3 728,4

2. Énergie libérée par une réaction nucléaire

- L'énergie libérée par une réaction nucléaire correspond à la **diminution de la masse totale du système**.

Cette **perte de masse** ΔM est :

$$\Delta M = (\text{masse totale avant réaction}) - (\text{masse totale après réaction}) = m_{\text{av}} - m_{\text{ap}}$$

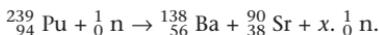
- D'après la relation d'Einstein, l'énergie correspondante est égale à :

$$E = \Delta M \cdot c^2 = (m_{\text{av}} - m_{\text{ap}}) \cdot c^2.$$

- Cette énergie est libérée sous forme :
 - d'énergie cinétique communiquée aux particules créées ;
 - d'énergie de rayonnement γ (rayonnement électromagnétique de très grande fréquence et donc de grande énergie).

Exemples d'application

- 1 On considère la fission nucléaire suivante :



On s'aidera du tableau ci-contre et des données suivantes : $m_{\text{Pu}} = 239,0522 \text{ u}$; $m_{\text{Ba}} = 137,9050 \text{ u}$; $m_{\text{Sr}} = 89,9070 \text{ u}$ et $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

- Calculer le nombre de neutrons libérés par cette réaction.
- Quelle quantité d'énergie libère cette réaction ?
- Quelle énergie (en MeV) est libérée lors de la fission de 100 grammes de plutonium ?

Corrigé commenté

Indication : utilisez les lois de conservation puis quand l'équation est complètement connue, calculez la perte de masse.

1. La conservation du nombre de nucléons s'écrit : $239 + 1 = 138 + 90 + x$, soit $x = 12$. Cette réaction libère donc **12 neutrons**.

2. La masse perdue est : $\Delta M = (m_{\text{av}} - m_{\text{ap}})$.

On obtient : $\Delta M = (m_{\text{Pu}} + m_{\text{n}}) - (m_{\text{Ba}} + m_{\text{Sr}} + 12 \cdot m_{\text{n}})$.

$\Delta M = (239,0522 + 1,00087) - (137,9050 + 89,9070 + 12 \times 1,00087) = 0,23063 \text{ u}$.

Or 1 u correspond à une énergie de $931,5 \text{ MeV}$. L'énergie libérée vaut donc : $E_1 = 0,23063 \times 931,5 = 214,832 \text{ MeV}$.

3. La masse d'un atome de plutonium est $m_{\text{Pu}} = 239,0522 \text{ u} = 3,9683 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$. D'où, dans 100 g de plutonium, il y a

$$N = \frac{0,1}{m_{\text{Pu}}} = \frac{0,1}{3,9683 \cdot 10^{-25}} \approx 2,5200 \cdot 10^{23} \text{ atomes.}$$

Donc cette fission libère $E_2 = 2,5200 \cdot 10^{23} \times 214,832 = 5,414 \cdot 10^{25} \text{ MeV}$.

- 2 On considère la réaction nucléaire suivante : ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$. Quelle énergie (en MeV) est libérée lors de la formation d'un noyau d'hélium ?

On donne les énergies de liaison par nucléon : ${}^2_1\text{H}$: $1,10 \text{ MeV}$; ${}^3_1\text{H}$: $2,83 \text{ MeV}$ et ${}^4_2\text{He}$: $7,07 \text{ MeV}$.

Corrigé commenté

Indication : pensez à multiplier l'énergie de liaison par nucléon par le nombre de nucléons pour trouver l'énergie de liaison totale d'un noyau.

L'énergie libérée par la formation d'un noyau d'hélium est égale à la variation des énergies de liaison : $E_1 = (E_l({}^4_2\text{He}) - (E_l({}^2_1\text{H}) + E_l({}^3_1\text{H})))$.

On calcule : $E_1 = (6 \times 7,07) - (3 \times 1,10 + 4 \times 2,83) = 27,8 \text{ MeV}$.

1 Le condensateur

1. Description - Symbole

● Un condensateur est formé de deux lames conductrices (armatures) séparées par un isolant appelé diélectrique (verre, air, film plastique, mica, céramique), dont la représentation symbolique est donnée figure 6-1.

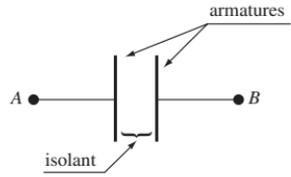


Fig. 6-1

Remarque : un condensateur ne laisse pas passer de courant continu.

2. Charges des armatures

● Dans le circuit représenté figure 6-2, le courant électrique qui circule provoque un déficit d'électrons sur l'armature A et un excès d'électrons sur l'armature B : le condensateur se charge, et à chaque instant :

$$q_A = -q_B$$

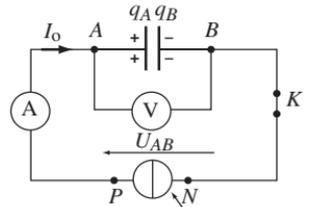


Fig. 6-2

● L'intensité I_0 du courant continu à travers une section (S) d'un conducteur représente un **débit constant de charges électriques**. Cette intensité est égale à la valeur absolue de la charge électrique totale traversant cette section par unité de temps :

$$I_0 = \frac{|q|}{t}, \text{ avec } \begin{cases} q : \text{charge totale traversant la section (S), exprimée en coulombs (C)} \\ t : \text{durée exprimée en secondes (s)} \\ I_0 : \text{intensité exprimée en ampères (A)} \end{cases}$$

3. Algébrisation de l'intensité

● Considérons un conducteur parcouru par un courant d'intensité absolue I dont on ne connaît pas, a priori, le sens réel. On oriente arbitrairement (dans un sens ou dans l'autre) le conducteur par une flèche dessinée sur le fil, ce qui définit l'intensité algébrique i .

- Le sens choisi est appelé sens positif.

Si le sens réel du courant correspond au sens choisi, alors $i = +I > 0$.

Si le sens réel du courant correspond au sens inverse, alors $i = -I < 0$.

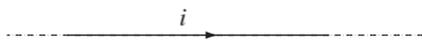


Fig. 6-3

4. Convention récepteur

- Dans le but de simplifier la relation liant la tension u et l'intensité i pour un dipôle passif, il faut se placer en convention récepteur.

En convention récepteur, il faut représenter i et u par des flèches de sens opposé.

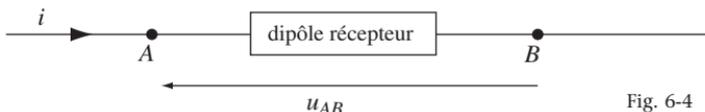


Fig. 6-4

- Dans un **récepteur**, le courant descend les potentiels. Si le dipôle AB est un récepteur, alors, pour $u = u_{AB} = V_A - V_B > 0$ (soit $V_A > V_B$), le courant va bien de A vers B dans le dipôle, c'est-à-dire que $i > 0$. Les grandeurs **tension et intensité sont, dans cette convention, de même signe**.

Pour un générateur, et pour des raisons similaires, il faut utiliser la convention inverse (flèches u et i de même sens) appelée **convention générateur**.

Exemple d'application

Dans le circuit ci-contre, le courant $i = 1$ A est supposé constant.

- Combien d'électrons traversent S chaque seconde ? Dans quel sens ?

On rappelle que $e = +1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

- Pour le dipôle D , i et u sont-ils en convention générateur ou récepteur ? Si D est une résistance R , donner la loi liant u et i .

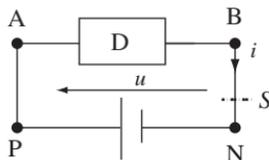


Fig. 6-5

Corrigé commenté

Rappel : 1 ampère est un débit de 1 coulomb par seconde et chaque électron a une charge $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

- La charge électrique traversant la section S chaque seconde de B vers N est : $q = i \cdot t = 1 \times 1 = 1$ C. La charge : $-q = -1$ C circule de N vers B .

Pour former une telle charge, il faut $N = (-q)/(-e) = 6,25 \cdot 10^{18}$ électrons. Ces électrons de charge négative circulent donc de N vers B .

- Comme u et i (pour D) sont dans des sens opposés, il s'agit de la convention récepteur. Pour une résistance, on a donc $u = R \cdot i$ dans cette convention.

2 Relation entre tension et intensité

1. Charge d'un condensateur à courant constant

● En reprenant le montage de la figure 6-2 (le condensateur étant préalablement déchargé) et en relevant, à la fermeture de l'interrupteur K , les valeurs de la tension u_{AB} en fonction de la durée t de charge, on obtient le graphe ci-contre.

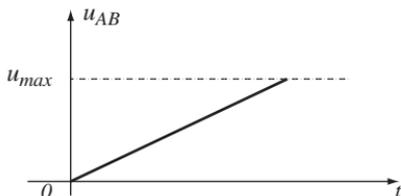


Fig. 6-6

● Ce graphe est celui d'une fonction linéaire, on a donc : $u_{AB} = k.t$ (1), où k est une constante. Comme par définition $q_A = i.t$, d'après la relation (1), on en déduit : $\frac{q_A}{u_{AB}} = \frac{i.t}{k.t} = \text{constante}$, soit : $q_A = C.u_{AB}$ (2).

Le coefficient C est positif : il est appelé **capacité du condensateur**. La capacité s'exprime en **Farads** de symbole F , avec q_A en coulombs (C) et u_{AB} en volts (V).

2. Cas des courants variables

● Dans ce cas, intensité et tension sont des grandeurs qui sont des fonctions du temps. On travaille alors avec les valeurs instantanées $i(t)$ et $u(t)$.

● Les lois fondamentales utilisées en courant continu (tensions, intensités) restent valables pour des **valeurs instantanées**.

● Dans le cas de courants variables, l'intensité n'est plus un débit constant de charges.

On définit la valeur instantanée $i(t)$ de l'intensité à la date t comme étant égale à la valeur de la dérivée de la fonction $q(t)$ à cette date t , avec en convention récepteur : $i(t) = \frac{dq_A}{dt}$ (3)

Comme $q_A(t) = C.u_{AB}(t)$, alors $i(t) = C.\frac{du_{AB}}{dt}$ (4).

Exemple d'application

On étudie la charge d'un condensateur de capacité C avec un générateur de courant délivrant une intensité constante $i = 100 \mu\text{A}$. Un dispositif électronique non représenté permet d'interrompre périodiquement la charge en produisant une décharge totale quasi instantanée du condensateur. On branche un oscilloscope comme l'indique le schéma et on observe l'écran de l'oscillographe ci-dessous.

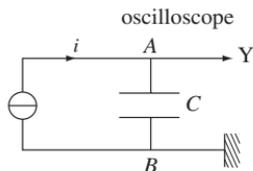


Fig. 6-7



Fig. 6-8

sensibilité verticale : 1 V/div
base de temps : 0,1 ms/div

1. Recopier le schéma en représentant la tension u mesurée par l'oscilloscope. Si on considère la tension u et l'intensité i pour le condensateur, dans quelle convention (générateur ou récepteur) est-on ? En déduire la relation entre u et i .
2. Déterminer la capacité C du condensateur.

Corrigé commenté

Rappel : l'entrée Y de l'oscilloscope correspond à la borne « + » d'un voltmètre.

1. L'oscilloscope mesure toujours la tension entre la voie Y et la masse, c'est-à-dire que $u = u_{AB}$ (pointe de la flèche en A).

u et i (tension aux bornes de C) sont de sens contraire : il s'agit donc de la **convention récepteur**.

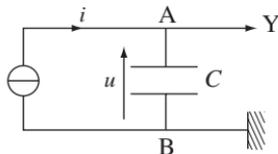


Fig. 6-9

Dans cette convention, la relation demandée est

$$i = C \cdot \frac{d(u(t))}{dt} \quad (4)$$

2. Pour chaque charge, u varie linéairement en fonction du temps. Le terme $d(u(t))/dt$ correspond donc à la pente des segments obliques de l'oscillogramme.

Graphiquement, on trouve $d(u(t))/(dt) = \frac{4}{0,2} = 20 \text{ V} \cdot \text{ms}^{-1} = 2 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$.

D'après la relation (4), on a $C = \frac{i}{d(u(t))/dt}$, soit $C = 5 \text{ nF}$.

3 Dipôle RC

1. Charge et décharge d'un condensateur

● Le montage ci-contre est réalisé pour étudier la charge puis la décharge d'un condensateur. Le générateur de tension délivre ici une tension continue, de valeur constante au cours du temps. On utilise un oscilloscope à mémoire.

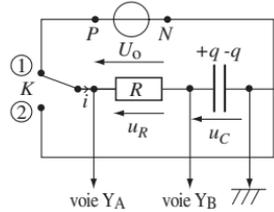


Fig. 6-10

● La charge ou la décharge d'un dipôle (R, C) sont des **phénomènes transitoires**.

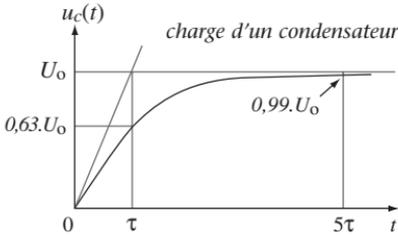


Fig. 6-11

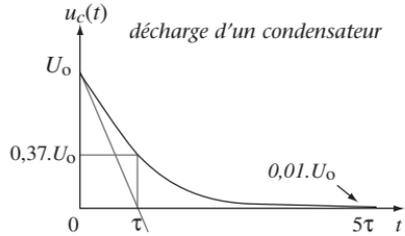


Fig. 6-12

● Si K passe en position ①, un courant positif s'établit dans le circuit. L'intensité i de ce courant décroît progressivement tandis que u_C augmente. Quand $u_C = U_0$, alors $i = 0$.

● D'après la loi des mailles et (4) : $u_c + u_R = U_0$ donc $u_c + R.C \frac{du_c}{dt} = U_0$.

Cette équation est l'équation différentielle régissant la charge du condensateur.

● En tenant compte des conditions initiales, la solution de cette équation différentielle est :

$$u_c(t) = U_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \text{ avec } \tau = RC \quad (5).$$

● Si K passe de ① à ②, un courant négatif s'établit dans le circuit. La valeur absolue de l'intensité de ce courant décroît : le condensateur se décharge. Quand $i = 0$ alors $u_C = 0$.

● D'après la loi des mailles et (4) : $u_c + u_R = 0$ donc $u_c + R.C \frac{du_c}{dt} = 0$.

Cette équation est l'équation différentielle régissant la décharge du condensateur.

● En tenant compte des conditions initiales, la solution de cette équation différentielle est :

$$u_c(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = RC \quad (6).$$

2. Influence de la constante de temps τ sur la charge et la décharge

- On remplace le générateur de tension continue (voir fig. 6-11) par un générateur délivrant une tension en créneaux. Les résistance et condensateur sont variables.
- Sur la voie B, on observe la tension aux bornes du condensateur. On fait varier les valeurs des résistances du conducteur ohmique et la capacité du condensateur. On obtient les deux oscillogrammes de la figure 6-15.

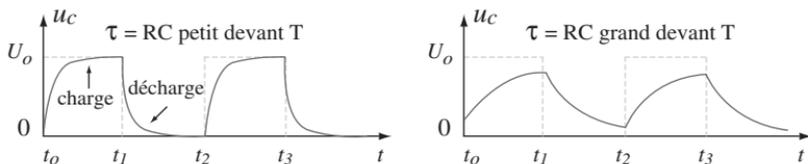


Fig. 6-13

Exemple d'application

À l'aide des formules (5) et (6), trouver en fonction de U_0 l'expression de $u_c(t)$ à l'instant $t = \tau$, ainsi que l'expression du coefficient directeur de la tangente à l'origine pour la charge et la décharge.

Corrigé commenté

Indication : remplacez t par τ dans les équations.

Rappel : la dérivée de $f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x}$ est $f'(x) = -a \cdot b \cdot e^{-b \cdot x}$.

Le point $(\tau ; u_c(\tau))$ de la courbe $u_c(t)$ permet de déterminer expérimentalement τ .

Charge d'un condensateur :

Pour $t = \tau$, $u_c(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-1}) = 0,63 U_0$.

$$\left(\frac{du_c}{dt} \right)_{t=0} = \left(-\frac{U_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)_{t=0} = +\frac{U_0}{\tau}$$

Décharge d'un condensateur :

Pour $t = \tau$, $u_c(t) = U_0 \cdot e^{-1} = 0,37 U_0$.

$$\left(\frac{du_c}{dt} \right)_{t=0} = \left(-\frac{U_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)_{t=0} = -\frac{U_0}{\tau}$$

La mesure de ce coefficient directeur est une autre méthode graphique pour déterminer expérimentalement la constante de temps τ .

4 Intensité et énergie dans un condensateur

1. Intensité du courant lors de la charge et la décharge

● Pour étudier l'intensité du courant, l'oscilloscope doit être branché aux bornes du conducteur ohmique (Fig. 6-14). On visualise ainsi la tension $u_R = R.i$, donc l'intensité du courant à un facteur R près (voir figure 6-15).

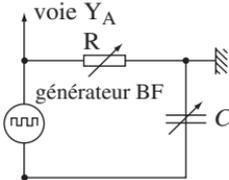


Fig. 6-14

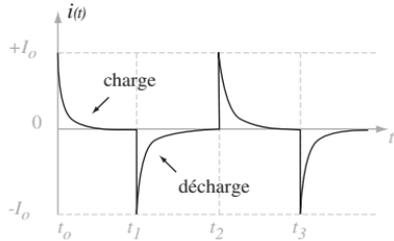


Fig. 6-15

● Intensité lors de la charge :

$$\text{D'après (4) et (5), on a : } i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{C.U_0}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{U_0}{R} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

$$\text{En posant } I_0 = \frac{U_0}{R}, \text{ on a : } i(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

$i(t)$ est une fonction décroissante par valeurs positives.

● Intensité lors de la décharge :

De même, d'après (4) et (6), on a :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{C.U_0}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -\frac{U_0}{R} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

$$\text{On obtient : } i(t) = -I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

$i(t)$ est une fonction croissante par valeurs négatives.

● Contrairement à $u_C(t)$, $i(t)$ est discontinue.

2. Énergie stockée dans un condensateur

● Un condensateur chargé constitue un réservoir d'énergie. Cette énergie peut être restituée dans un circuit (principe du flash photographique).

● La valeur de l'énergie potentielle électrostatique stockée par un condensateur est : $E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$.

D'après (2), on a aussi : $E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q \cdot u_c$.

Remarque : stockage et déstockage de l'énergie ne peuvent jamais s'effectuer instantanément, ce qui confirme que les variations de la tension $u_c(t)$ ne sont jamais discontinues.

3. Analyse dimensionnelle de la constante de temps τ

D'après la loi d'ohm pour un conducteur ohmique : $u = R \cdot i$, on a $[R] = \frac{[u]}{[i]}$.

D'après (2), on a : $q = C \cdot u$, soit $[C] = \frac{[q]}{[u]}$.

Or d'après (4), on a $[i] = \frac{[q]}{[t]}$, soit $T = \frac{[q]}{[i]}$.

On en déduit : $[R \cdot C] = \frac{[u]}{[i]} \cdot \frac{[q]}{[u]} = \frac{[q]}{[i]} = T$.

La constante τ a donc bien la dimension d'un temps.

Exemple d'application

On considère le circuit ci-contre.

A $t = 0$ s, on ferme l'interrupteur K. On appelle $u_c(t)$ la tension aux bornes du condensateur initialement chargé.

Elle a alors pour expression : $u_c(t) = 10 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.

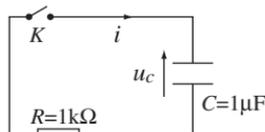


Fig. 6-16

- Établir l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit pour $t > 0$ s.
- Calculer l'énergie $E(t_1)$ stockée dans le condensateur à $t_1 = 2$ ms.

Corrigé commenté

1. **Rappel :** sachez que l'intensité dans un condensateur est proportionnelle à la dérivée de la tension à ses bornes ; le coefficient de proportionnalité est sa capacité C .

$$i(t) = C \cdot \frac{du_c}{dt} = -\frac{10}{R} \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{10}{10^3} \cdot \exp\left(-\frac{t}{10^3 \cdot 10^{-6}}\right),$$

soit $i(t) = -0,01 \cdot e^{-1000 \cdot t}$.

2. **Rappel :** l'énergie stockée dans un condensateur ne dépend que de sa capacité et de la tension à ses bornes.

$$E(t_1) = \frac{1}{2} C \cdot [u_c(t_1)]^2 \quad \text{AN: } E(t_1) = \frac{1}{2} 10^{-6} \left[10 \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 10^{-6}}\right) \right]^2 = 9 \cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

1 La bobine

1. Description - Symbole

● Les bobines ou inductances sont constituées d'un fil conducteur isolé bobiné sur un support isolant (bakélite, téflon...) cylindrique ou torique, à l'intérieur desquelles on peut introduire des noyaux métalliques (alliage ferromagnétique) ou des noyaux de ferrite.

- Du point de vue électrique, une bobine est caractérisée :
 - par une grandeur appelée **inductance**, notée L , exprimée en henry (H) ;
 - par sa résistance r exprimée en ohm (Ω) qui représente son défaut.

Remarque : l'inductance dépend des caractéristiques physiques de la bobine (nombre de spires par unité de longueur, présence ou non d'un noyau...).

- Sa représentation symbolique est : 

2. La bobine en convention récepteur

● La tension aux bornes d'une bobine est :

$$u_{AB} = r i + L \frac{di}{dt} \quad (1).$$

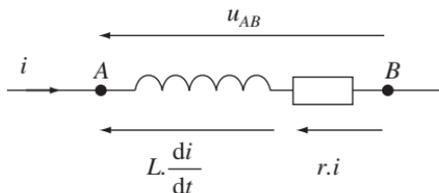


Fig. 7-1

● Le terme $r.i$ correspond à la tension que l'on aurait aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance r .

● Le terme $L \cdot \frac{di}{dt}$ est lié aux variations de l'intensité du courant dans la bobine.

En particulier, si $i > 0$ et tend à **augmenter** (lors de la fermeture du circuit) alors $L \cdot \frac{di}{dt} > 0$. La bobine se comporte bien en récepteur qui s'oppose au passage du courant, elle modère l'augmentation de i .

Inversement, si $i > 0$ et tend à **diminuer** (lors de l'ouverture du circuit), alors $L \cdot \frac{di}{dt} < 0$. La bobine se comporte en générateur qui tend à maintenir un courant dans le circuit.

Remarque : en régime permanent et en courant continu ($i = cte$), on a $u_{AB} = r i$; la bobine se comporte alors comme un simple conducteur ohmique.

3. Énergie dans une bobine

● La puissance électrique reçue par un dipôle (AB) est égale à $P_e = u_{AB} \cdot i$.

Pour une bobine : $P_e = r \cdot i^2 + Li \frac{di}{dt}$.

● Cette puissance se décompose en deux termes :

– la puissance dissipée par effet Joule : $P_j = r \cdot i^2$;

– la puissance (magnétique) emmagasinée par la bobine : $P_m = Li \frac{di}{dt}$.

● Cette expression peut s'écrire : $P_m = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$ (4).

Or par définition de la puissance : $P_m = \frac{d}{dt} (E_m)$ (5).

D'après (4) et (5), on déduit l'énergie emmagasinée par une bobine à la date t :

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2, \text{ avec } \begin{cases} E_m : \text{énergie en joules (J)} \\ L : \text{inductance en Henry (H)} \\ i : \text{intensité en ampères (A)} \end{cases}$$

Exemple d'application

Une bobine ($L = 1 \text{ mH}$, $r = 10 \Omega$) est traversée par un courant de la forme $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$ avec $I_0 = 0,1 \text{ A}$ et $\omega = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Trouver l'expression de la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine.
2. Que vaut l'énergie emmagasinée dans cette bobine à $t = \pi$ secondes ?

Corrigé commenté

1. **Rappel** : la dérivée de $f(t) = \cos(\omega t)$ est $f'(t) = -\omega \sin(\omega t)$.

$$u_L(t) = ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = r I_0 \cos(\omega t) + L \frac{d}{dt} (I_0 \cos(\omega t)),$$

soit : $u_L(t) = \cos(1000 t) - 0,1 \sin(1000 t)$.

2. **Rappel** : pour n entier, $\cos(2n\pi) = 1$

Par définition, $E_m(t = \pi) = \frac{1}{2} L (i(t = \pi))^2$.

A.N. : $E_m(t = \pi) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot (0,1 \cos(1000 \cdot \pi))^2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.

2 Dipôle RL

1. Étude expérimentale

- On visualise la tension aux bornes du générateur sur la voie Y_A de l'oscilloscope.
- On visualise la tension u_{BM} aux bornes du conducteur ohmique R' (à un coefficient près, c'est l'intensité i du courant dans le circuit : $i = \frac{u_{BM}}{R'}$) sur la voie Y_B (voir figure 7-2).
- On obtient les oscillogrammes dessinés figure 7-3. On voit que :
 - (a) lors de la mise sous tension du circuit, le courant n'atteint pas immédiatement son maximum ;
 - (b) lorsque la tension s'annule, le courant ne diminue que progressivement.

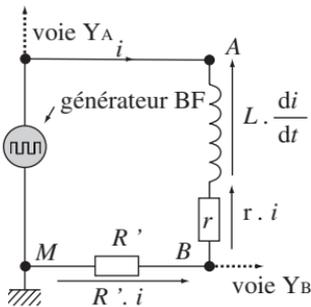


Fig. 7-2

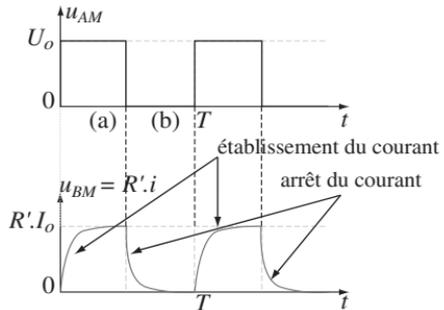


Fig. 7-3

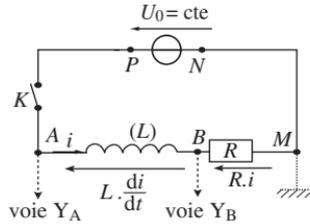
Une bobine placée dans un circuit s'oppose à l'établissement d'un courant ou à sa rupture. L'intensité du courant qui traverse la bobine n'est jamais discontinue (pas de saut). C'est le phénomène d'auto-induction.

2. Étude des phénomènes transitoires d'établissement et d'arrêt du courant : principe du montage

- Sur la voie Y_A de l'oscilloscope, on visualise la tension u_{AM} aux bornes du circuit RL .

● Sur la voie Y_B , on visualise la tension u_{BM} aux bornes du conducteur ohmique et à un coefficient près, l'intensité i du courant dans le circuit : $i = \frac{u_{BM}}{R}$.

● La résistance r est supposée nulle ; R représente la résistance du circuit.



oscilloscope à mémoire

Fig. 7-4

3. Étude des phénomènes transitoires

● L'interrupteur K du montage de la Fig. 7-4 étant fermé, un courant $i(t)$ s'établit dans le circuit.

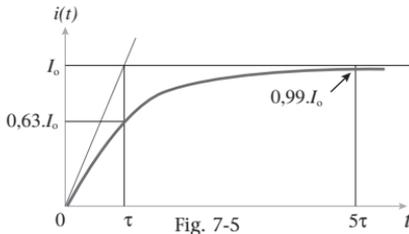


Fig. 7-5

● D'après la loi d'additivité des tensions : $u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$.
Durant l'établissement du courant, le générateur maintient une tension constante : $u_{AM} = U_0$.
On obtient l'équation différentielle :

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{U_0}{R}$$

C'est l'équation différentielle régissant l'établissement du courant dans la bobine.

● En tenant compte des conditions initiales, la solution de cette équation différentielle est :

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \right] \text{ ou}$$

$$i(t) = I_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (2).$$

● On ouvre l'interrupteur du montage de la Fig. 7-4 : le courant décroît progressivement jusqu'à la valeur 0.

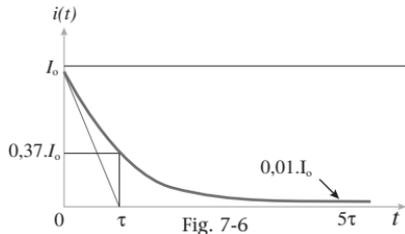


Fig. 7-6

● D'après la loi d'additivité des tensions : $u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$,
soit : $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0$.

On obtient l'équation différentielle :

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} + i = 0$$

C'est l'équation différentielle régissant l'annulation du courant dans la bobine.

● En tenant compte des conditions initiales, la solution de cette équation différentielle est :

$$i(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} t\right).$$

En posant : $\tau = \frac{L}{R}$, on obtient :

$$i(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3).$$

3 Constante de temps τ et tension pour un circuit RL

1. Influence des paramètres R et L

● L'établissement du courant et son arrêt dans le circuit sont d'autant plus rapides que la constante $\tau = \frac{L}{R}$ est plus petite, c'est-à-dire que L est petit et R est grand (voir figure 7-7).

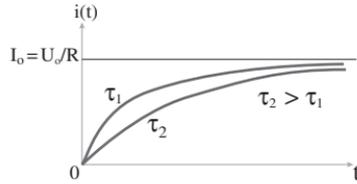


Fig. 7-7

2. Détermination expérimentale de la constante de temps $\tau = R/L$

● Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $i(t)$ au point d'abscisse $t = 0$ est égale à la valeur de la dérivée de la fonction $i(t)$ à la date $t = 0$.

● Dans le cas de l'établissement du courant dans le circuit et d'après (2), on a : $\left[\frac{di}{dt}\right]_{t=0} = \left[\frac{I_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_{t=0} = \frac{I_0}{\tau}$ (5).

● Dans le cas de l'annulation du courant dans le circuit et d'après (3), on a : $\left[\frac{di}{dt}\right]_{t=0} = \left[-\frac{I_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_{t=0} = \frac{I_0}{\tau}$ (6).

● Dans les deux cas, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $i(t)$ au point d'abscisse $t = 0$ permet la détermination facile de la constante de temps τ .

Remarque : $\tau = \frac{L}{R}$ a la dimension d'un temps et s'exprime donc en secondes.

3. Évolution de la tension en régime transitoire

● Lors de l'établissement du courant, et d'après (1) et (2), si la résistance de la bobine est négligeable, on a :

$$u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \left(\frac{I_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) = RI_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

● Lors de l'arrêt du courant, et d'après (1) et (3), si la résistance de la bobine est négligeable, on a :

$$u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \left(-\frac{I_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right),$$

$$\text{soit } u_{AB} = RI_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

oscillogramme représentant $u_{AB} = f(t)$

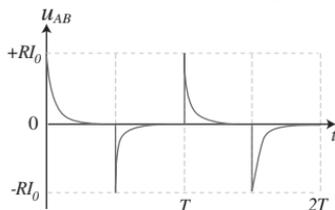


Fig. 7-8

Remarque : on observe que la variation de la tension est discontinue.

Exemple d'application

On considère le schéma de la figure 7-4. À $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur K. On observe l'établissement d'un courant dans la bobine d'inductance L et le conducteur ohmique de résistance $R = 50 \Omega$ dont les variations sont représentées sur le schéma ci-contre.

1. Faire l'analyse dimensionnelle de la constante de temps $\tau = L/R$.
2. Déterminer graphiquement cette constante.

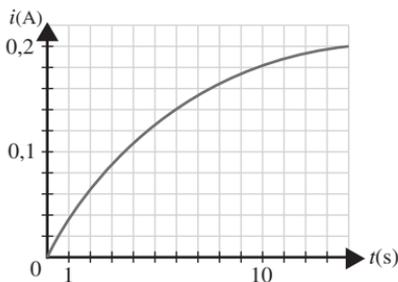


Fig. 7-9

Corrigé commenté

Indication : utilisez la formule $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$.

1. Comme $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, on a : $[U] = [L] \cdot \frac{[I]}{[T]}$, soit $[L] = \frac{[U] \cdot [T]}{[I]}$. On a $\frac{[U]}{[I]} = [R]$.

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[R][T]}{[R]} = T : \text{cette constante a bien les dimensions d'un temps.}$$

2. La pente de la tangente Δ à l'origine est :

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{i_c - i_0}{t_c - t_0} = \frac{0,1 - 0}{2,5 - 0} = 0,04 \text{ A s}^{-1}$$

Or, d'après (5),

$$\tau = \frac{I_0}{\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}} = \frac{0,2}{0,04} = 5 \text{ s.}$$

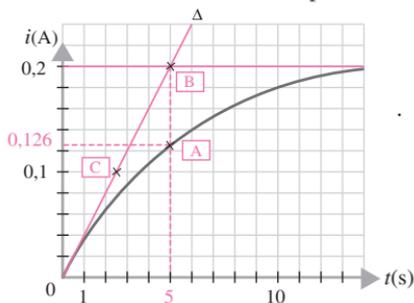


Fig. 7-10

1 Décharge d'un condensateur dans une bobine

1. Principe et schéma du montage

- L'interrupteur (K) étant sur la position (1), le condensateur de capacité C se charge. La charge est terminée lorsque $u_c = U_0$. La valeur de l'énergie potentielle électrostatique stockée dans le condensateur est alors : $E = \frac{1}{2} C u_c^2 = \frac{1}{2} C U_0^2$.

- L'interrupteur (K) est alors basculé sur la position (2). Le condensateur se décharge dans le conducteur ohmique R et la bobine L .

- L'oscilloscope à mémoire, branché aux bornes du condensateur, permet d'étudier le régime transitoire qui règne lors de cette décharge.

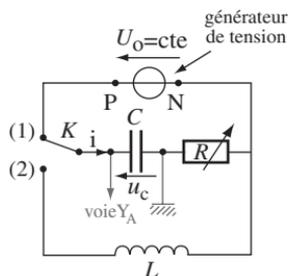


Fig. 8-1

2. Observations

Suivant la résistance R du circuit, on peut observer deux régimes de décharge.

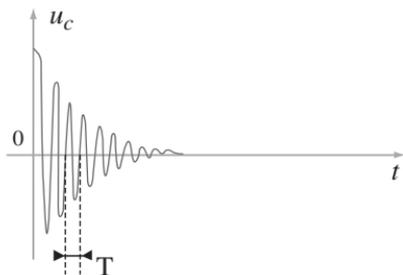


Fig. 8-2

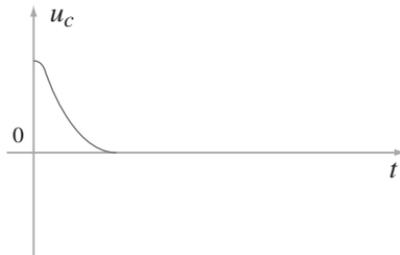


Fig. 8-3

- Lorsque la résistance est faible (fig. 8-2) : la décharge du condensateur n'est pas instantanée, elle donne lieu à des oscillations libres. La tension évolue d'une façon quasi périodique autour de la valeur 0 ; son amplitude diminue au cours du temps. Il s'agit d'un **régime pseudo-périodique**. T représente la pseudo-période des oscillations.

- Lorsque la résistance est grande (fig. 8-3) : la tension u_c s'annule sans oscillation. Il s'agit d'un **régime apériodique**.

Remarque : le régime apériodique pour lequel l'annulation de la tension est la plus rapide est appelé **régime apériodique critique**. Il marque la limite entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique. La résistance du circuit est égale à une valeur critique R_C telle que : $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

3. Pseudo-période

● La pseudo-période T des oscillations libres est d'autant plus grande que l'inductance L est grande et/ou que la capacité C est grande.

Exemple d'application

On ferme un circuit constitué d'un condensateur de capacité C préalablement chargé, d'une bobine d'inductance L , de résistance nulle et d'un conducteur ohmique de faible résistance R , montés en série. La valeur de R est telle que la tension aux bornes du condensateur est pseudo-périodique.

1. Faire une analyse dimensionnelle du produit LC .
2. En déduire la relation qui doit probablement exister entre la pseudo-période du phénomène observé et le produit LC .

Corrigé commenté

Indication : pour réaliser l'analyse dimensionnelle, rappelez les formules définissant les grandeurs considérées.

1. La tension aux bornes d'une bobine est : $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ d'où : $[L] = \frac{[U][T]}{[I]}$ (1).

D'autre part, d'après l'expression de la tension aux bornes d'un condensateur et

d'après la définition de l'intensité d'un courant, on a : $[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[I][T]}{[U]}$ (2).

De (1) et (2), on déduit : $[LC] = \frac{[U][T]}{[I]} = \frac{[I][T]}{[U]}$ soit : $[L.C] = [T]^2$.

2. On a observé que la pseudo-période T des oscillations libres est d'autant plus grande que l'inductance L est grande et/ou que la capacité C est grande. Elle varie donc dans le même sens que le produit LC .

D'après l'étude dimensionnelle, on peut donc présumer que la pseudo-période est proportionnelle à \sqrt{LC} , soit : $T = k \cdot \sqrt{L.C}$.

2 Étude d'un circuit LC

1. Principe

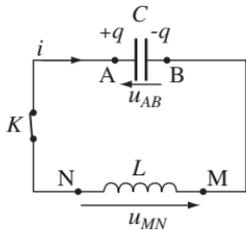


Fig. 8-4

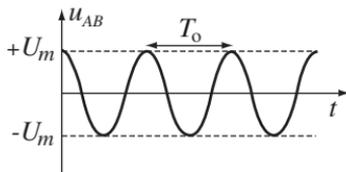


Fig. 8-5

● Soit le circuit constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance nulle, associée à un condensateur de capacité C initialement chargé (fig. 8-4). À la fermeture du circuit, on obtient un **régime périodique** (fig. 8-5). Un tel circuit LC de résistance nulle constitue un oscillateur électrique de période propre T_0 .

2. Étude théorique

● À chaque instant, d'après l'additivité des tensions, on a : $u_{AB} + u_{MN} = 0$. À la date t , la charge portée par l'armature A est $q(t)$ et la tension aux bornes du condensateur est : $u_{AB}(t) = \frac{q(t)}{C}$.

Aux bornes de la bobine, on a : $u_{MN}(t) = r i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ et comme $r = 0$, $u_{MN}(t) = L \frac{di(t)}{dt}$.

Or, par définition de l'intensité d'un courant : $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \dot{q}$.

L'équation différentielle régissant la variation de la charge q du condensateur dans le temps est donc : $L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0$.

Cette équation peut encore s'écrire : $\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$.

● La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \phi_0), \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0}.$$

ω_0 est la pulsation propre du circuit (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$), Q_m est l'amplitude (en coulomb) et ϕ_0 est la phase à l'origine des dates (en rad).

- Un circuit LC est un **oscillateur électrique harmonique** qui est le siège d'oscillations électriques libres, non amorties, de période propre :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Exemple d'application

Un circuit série est constitué d'un condensateur de capacité $C = 2 \mu\text{F}$ préalablement chargé, d'une bobine d'inductance $L = 5 \text{ mH}$, de résistance supposée nulle et d'un interrupteur ouvert. La tension aux bornes du condensateur est $U_0 = 6 \text{ V}$. À la fermeture du circuit, on observe la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope à mémoire.

1. Quel type d'oscillogramme doit-on obtenir ?
2. Calculer la période propre et la fréquence propre du circuit ainsi constitué.
3. En fait, la résistance de la bobine est $R = 27 \Omega$. Que peut-on observer sur l'écran de l'oscilloscope ?

Corrigé commenté

- 1. Indication :** les différents régimes que l'on peut observer sont directement liés à la résistance totale du circuit.

La résistance du circuit étant nulle, celui-ci constitue un oscillateur électrique harmonique : le régime est périodique. On peut observer un oscillogramme du type de la figure 8-5, avec $U_m = 6 \text{ V}$.

- 2. Rappel :** la fréquence (en hertz) est l'inverse de la période (en secondes).

La période propre de ce circuit est : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. On en déduit la fréquence : $f_0 = \frac{1}{T_0}$.

$$\text{AN: } T_0 = 2\pi\sqrt{5 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^{-6}} \approx 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ s} = \mathbf{0,63 \text{ ms}}.$$

$$f_0 \approx \frac{1}{6,3 \cdot 10^{-4}} \approx 1,6 \cdot 10^3 \text{ Hz} = \mathbf{1,59 \text{ kHz}}.$$

Dès que la résistance du circuit n'est pas nulle, le régime est soit pseudo-périodique, soit aperiodique suivant la valeur de cette résistance et la valeur de la résistance critique. Pour le montage étudié, la résistance critique est :

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ soit } R_c = 2\sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}}} = \mathbf{100 \Omega}.$$

La résistance du circuit étant inférieure à la résistance critique, le régime est pseudo-périodique.

3 Tension, intensité et énergie

1. Tension instantanée aux bornes du condensateur

- $u_{AB}(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ soit, en posant $U_m = \frac{Q_m}{C}$:

$$u_{AB}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \phi_0).$$

2. Intensité du courant

- Par définition, $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.

On a donc : $i(t) = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \phi_0)$, soit $i(t) = \omega_0 Q_m \cos\left(\omega_0 t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$.

Avec $I_m = \omega_0 Q_m$, on obtient : $i(t) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$.

- L'intensité du courant est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la charge $q(t)$ et par rapport à la tension aux bornes du condensateur. Quand la tension est maximale, l'intensité est nulle et vice versa.

3. Échanges énergétiques dans un circuit LC

- L'énergie potentielle électrique stockée par le condensateur à la date t est : $E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$, soit $E_C = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \phi_0)$.

- L'énergie magnétique emmagasinée par la bobine à la date t est :

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L\omega_0^2 Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi_0).$$

Comme $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, on a : $E_L = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} \sin^2(\omega_0 t + \phi_0)$.

- À chaque instant, l'expression de l'énergie totale est : $E = E_C + E_L$.

On calcule : $E = \frac{Q_m^2}{2C} [\cos^2(\omega_0 t + \phi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \phi_0)]$, soit : $E = \frac{Q_m^2}{2C} = \text{cte}$.

À chaque instant il y a transformation mutuelle de l'énergie potentielle électrostatique en énergie magnétique ou l'inverse.

Remarque : on constate que l'énergie stockée par le condensateur et l'énergie emmagasinée par la bobine ont une fréquence double de celle de la charge.

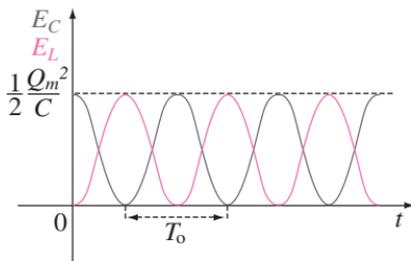


Fig. 8-6

Exemple d'application

Un circuit LC est constitué d'une bobine ($L = 50 \text{ mH}$; $r = 0 \Omega$) et d'un condensateur ($C = 20 \text{ }\mu\text{F}$) préalablement chargé et possédant une énergie initiale $E_C(t=0) = 0,36 \text{ mJ}$.

- À partir de l'expression de l'énergie totale du système à un instant t et sachant que cette énergie est constante, retrouver l'équation différentielle qui régit le régime périodique du système.
- Donner l'expression de la tension instantanée aux bornes du condensateur et en calculer les caractéristiques.

Corrigé commenté

Indication : pensez que si une grandeur est constante dans le temps, alors sa dérivée par rapport au temps est nulle.

- L'énergie totale de l'oscillateur électrique est :

$$E = E_C + E_L, \text{ soit } E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2.$$

Cette énergie étant constante, on en déduit que : $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C} 2q \frac{dq}{dt} + \frac{L}{2} 2i \frac{di}{dt} = 0$.

Or, $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$, donc $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{C} q\dot{q} + L\dot{q}\ddot{q} = L\dot{q} \left(\ddot{q} + \frac{1}{LC} q \right) = 0$.

Quel que soit l'instant t , on a : $\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$.

- La solution de cette équation différentielle est : $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right)$.

On en déduit l'expression de la tension aux bornes du condensateur :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right),$$

$$\text{soit : } u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right) \text{ avec } U_m = \frac{Q_m}{C}.$$

Or, l'énergie initiale du condensateur a pour expression : $E_C = \frac{1}{2} C \cdot U_m^2$.

$$\text{On calcule : } U_m = \sqrt{\frac{2 E_C(t=0)}{C}}. \quad \text{AN : } U_m = \sqrt{\frac{2 \times 0,36 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-6}}} = 6,0 \text{ V}.$$

La période est : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. AN : $T_0 = 2\pi\sqrt{50 \cdot 10^{-3} \times 20 \cdot 10^{-6}} = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

À $t = 0$, $u_C(t) = U_m$ donc $\cos \phi_0 = 1$ et la phase à l'origine est $\phi_0 = 0 \text{ rad}$.

La tension $u_C(t)$ est alors : $u_C(t) = 6 \cos\left(\frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^{-3}} t\right) = 6 \cos(1000 t)$.

4 Amortissement et entretien des oscillations dans un circuit RLC

1. Amortissement dans un circuit LC

- D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_R + u_L = 0,$$

soit : $\frac{q}{C} + Ri + \frac{di}{dt} = 0$ ou encore

$$\frac{q}{C} + \frac{di}{dt} = -Ri \quad (1).$$

- Or, à la date t , l'énergie électrique totale du circuit vaut : $E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$.

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = \left(\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} \right) i.$$

- D'après (1), on a : $\frac{dE}{dt} = (-Ri) i = -Ri^2$. On remarque que : $\frac{dE}{dt} < 0$ donc l'énergie totale diminue. Le terme $(-Ri^2)$ représente la puissance évacuée par transfert thermique (effet Joule).

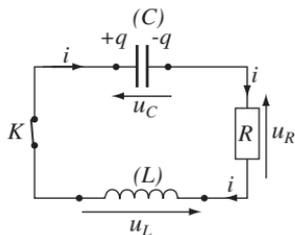


Fig. 8-7

2. Entretien des oscillations

- Pour entretenir les oscillations, il faut compenser les pertes d'énergie par effet Joule au moyen d'un montage électronique adapté faisant fonction d'un générateur capable de délivrer une tension $u_g(t)$ proportionnelle, à chaque instant, à l'intensité $i(t)$ du courant.

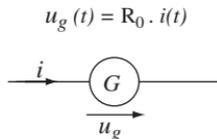


Fig. 8-8

Remarque : u et i sont représentées par des flèches de même sens, le générateur se comporte, à chaque instant, comme une résistance négative $(-R_0)$.

- D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_R + u_L - u_g = 0,$$

soit : $\frac{q}{C} + Ri + L \frac{di}{dt} + (-R_0)i = 0$.

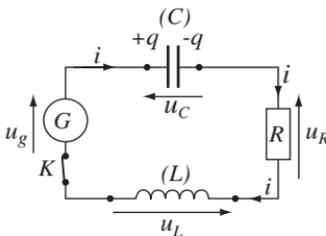


Fig. 8-9

- Pour $R = R_0$, on retrouve l'équation différentielle régissant la variation de la charge q du condensateur dans le temps pour un oscillateur électrique harmonique, c'est-à-dire sans amortissement :

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0.$$

- À la date t , la dérivée de l'énergie électrique totale du circuit vaut :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = \left(\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} \right) i = 0.$$

L'énergie totale est alors constante. Le dispositif électronique compense bien les pertes d'énergie par effet Joule.

Exemple d'application

Un circuit comporte une bobine ($L = 5,6$ mH ; R), un condensateur ($C = 4,7$ μ F) et un dipôle D . La tension u_D aux bornes de celui-ci est proportionnelle à l'intensité du courant : $u_D = -R_0 i$ ($R_0 > 0$).

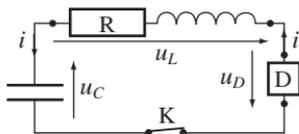


Fig. 8-10

1. Établir l'équation différentielle liant la tension u_C aux bornes du condensateur à ses dérivées première \dot{u}_C et seconde \ddot{u}_C .

2. Que se passe-t-il si $R = R_0$? Quel est l'intérêt du dipôle D ?

3. Quelle est dans ce cas l'expression de la période ? Calculer sa valeur.

Corrigé commenté

Indication : pensez que la tension aux bornes d'un condensateur est liée à sa

charge par : $q = C \cdot u_C$; par définition de l'intensité, $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} = C \dot{u}_C$

d'où : $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q} = C \ddot{u}_C$.

1. D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $u_D + u_L + u_C = 0$,

soit : $-R_0 i + L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = L \frac{di}{dt} + (R - R_0) i + \frac{q}{C} = 0$,

d'où : $LC \ddot{u}_C + (R - R_0) C \dot{u}_C + u_C = 0$. On obtient : $\ddot{u}_C + \frac{(R - R_0)}{L} \dot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C = 0$ (1).

2. Si $R = R_0$, l'équation différentielle (1) devient : $\ddot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C = 0$ (2).

Cette équation différentielle (2) est celle qui régit le régime périodique d'un oscillateur électrique harmonique (sans amortissement) de période propre T_0 . Le dipôle D sert à compenser les pertes d'énergie par effet Joule dues à la résistance du circuit (bobine).

3. L'expression de la période T_0 a pour expression : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, soit $T_0 = 1,0 \cdot 10^{-3}$ s.

1 Vecteur vitesse

1. Système

- On appelle système, un objet ou ensemble d'objets que l'on distingue de son environnement pour en faire l'étude. Un système est indéformable si la distance entre deux quelconques de ses points reste constante au cours du temps ; un tel système est appelé « solide ».
- On définit le centre de masse d'un système comme étant le point remarquable où l'on peut imaginer avoir concentré toute la matière du système, dans le cas où, pour une étude simplifiée, ce système devrait être réduit à un point. Dans le cas d'un solide homogène, le centre de masse est situé au centre géométrique du solide.

2. Référentiels

- Un objet peut être en mouvement par rapport à un observateur et immobile par rapport à un autre. Pour définir le mouvement d'un objet, il est nécessaire de préciser le référentiel d'étude et le repère de temps.
- Un référentiel est le solide ou tout point du solide par rapport auquel on décrit le mouvement d'un mobile. Exemple : le référentiel terrestre (la Terre, le sol, le laboratoire...).
- À ce référentiel, on associe en général un repère d'espace comportant 1, 2 ou 3 vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un point origine O lié au référentiel.
- Pour définir la position d'un objet dans le temps, il est nécessaire de définir un repère de temps. Ce repère est constitué d'un instant ou d'une date origine t_0 (début de l'expérience ou de l'observation par exemple) et d'une unité de durée. Dans le système international (S.I.), l'unité de temps est la **seconde** (s).
- Tout point M de l'espace est alors repéré, à une date t , par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} .$$

- Dans un repère orthonormé, la distance (OM) est alors égale à :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Dans le système international (SI), elle s'exprime en **mètre (m)**.

3. Vecteur vitesse

● Entre les instants t et $t + \Delta t$, le mobile se déplace de M en M' suivant un vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$ qui correspond à une variation du vecteur position :

$$\Delta \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}.$$

● La vitesse instantanée est définie comme étant le **taux de variation de la position par rapport au temps**, pour une durée Δt la plus petite possible :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.$$

● Le vecteur vitesse est égal à la dérivée du vecteur position par rapport au temps ; il est tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement. Dans un

repère fixe $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}$.

● La valeur de la vitesse est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$.

Dans le système international, elle s'exprime en **mètre par seconde (m.s⁻¹)**.

Exemple d'application

On photographie la chute d'une goutte d'eau suivant la verticale, à intervalles de temps réguliers $\tau = 20$ ms. Les distances parcourues par la goutte d'eau depuis son départ sont indiquées dans le tableau suivant :

t (ms)	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	7τ	8τ
d (cm)	0	0,2	0,8	1,8	3,1	4,9	7,1	9,6	12,5

1. Quelle est la vitesse instantanée à la date $t_2 = 2\tau$? à la date $t_6 = 6\tau$?
2. Quelle est la nature du mouvement ?

Corrigé commenté

Indication : à partir de l'enregistrement des positions successives d'un mobile, on détermine expérimentalement sa vitesse instantanée comme étant une vitesse moyenne calculée pendant une durée τ la plus petite possible.

1. La vitesse instantanée à la date t_2 est pratiquement égale à la vitesse moyenne calculée entre t_1 et t_3 , soit :

$$v_2 = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_3 - d_1}{t_3 - t_1} = \frac{d_3 - d_1}{2\tau}. \text{ AN: } v_2 = \frac{1,8 - 0,2}{2 \times 20 \cdot 10^{-3}} = 40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

De même: $v_6 = \frac{d_7 - d_5}{2\tau}$. AN: $v_6 = \frac{9,6 - 4,9}{2 \times 20 \cdot 10^{-3}} = 117,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Le mouvement est rectiligne (la trajectoire est une droite verticale) et accéléré (la valeur de la vitesse instantanée est croissante).

2 Première et troisième lois de Newton

1. Forces

- On appelle force toute action mécanique d'un corps sur un autre capable de produire des effets sur le mouvement ou la forme de ce dernier corps.
- Si une force est exercée par un autre point ou objet du système lui-même, il s'agit d'une force intérieure. Si une force est exercée par un objet ou un point extérieur au système, il s'agit d'une **force extérieure**.
- Parmi les forces extérieures, on peut distinguer :
 - les forces de contact : le corps qui subit la force est en contact avec celui qui la crée (réaction d'un support, forces de frottement, tension d'un fil...).
 - Les forces de contact peuvent être localisées en un point ou réparties sur la surface de contact ;
 - les forces à distance : les deux corps ne sont pas nécessairement au contact l'un de l'autre : forces de gravitation, forces électriques et forces électromagnétiques. Chacune de ces forces est répartie sur l'ensemble du corps, mais elles sont chacune modélisées par une force unique qui s'exerce toujours sur le centre de masse.

2. Systèmes matériels particuliers

- Un système isolé est un système qui n'est soumis à aucune force extérieure.
- Un système pseudo-isolé est un système qui est soumis à des forces extérieures qui se compensent globalement : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

3. Première loi de Newton (ou principe de l'inertie)

- Lorsqu'un solide est isolé ou pseudo-isolé, il existe toujours un point particulier G du solide, appelé centre d'inertie, qui peut :
 - soit être au repos, s'il est initialement au repos $\vec{V}_G(t) = \vec{0}$;
 - soit être animé d'un mouvement rectiligne uniforme : $\vec{V}_G(t) = \vec{c}$.
- Que le système soit déformable ou indéformable, qu'il soit formé d'une ou de plusieurs parties, le centre d'inertie (C.I.) d'un système est toujours confondu avec le centre de masse (appelé aussi centre de gravité).
- Ce principe n'est valable que dans certains référentiels appelés référentiels galiléens. La Terre (ou le laboratoire) peut être considérée comme un référentiel galiléen. Tout référentiel animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen.

4. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

● Lorsqu'un solide S_1 exerce sur un solide S_2 une force $\vec{F}_{1/2}$ (action), alors le solide S_2 exerce sur le solide S_1 une force $F_{2/1}$ (réaction) telle que :

$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}.$$

● Dans tout référentiel, les corps étant immobiles ou animés de mouvements quelconques, ces deux forces ont même intensité, même droite d'action mais elles sont de sens contraires.

Exemple d'application

Une voiture tracte, à vitesse constante et en ligne droite, une caravane sur une route en pente.

On définit successivement plusieurs systèmes :

- la voiture ;
- l'attelage (voiture + caravane).

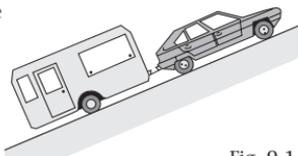


Fig. 9-1

Faire dans chacun des cas le bilan des forces intérieures et extérieures au système en précisant s'il s'agit de forces à distance ou de contact, localisées ou réparties.

Corrigé commenté

Indication : pensez au principe des actions réciproques ; à toute force exercée par un objet A sur un objet B correspond une force opposée exercée par B sur A.

a. Le système choisi {la voiture} est soumis aux forces suivantes :

- le poids de la voiture : force **extérieure**, à distance ;
- les réactions du sol sur les roues : forces **extérieures** de contact, réparties ;
- la réaction de la caravane sur la voiture : force **extérieure** de contact, localisée ;
- la force de frottement de l'air sur la voiture : force **extérieure** de contact, répartie.

b. Les forces auxquelles est soumis le système choisi {l'attelage} constitué d'une voiture et d'une caravane sont :

- le poids du système [voiture + caravane] : force **extérieure**, à distance ;
- les réactions du sol sur les roues du système [voiture + caravane] : forces **extérieures** de contact, réparties ;
- la force de frottement de l'air sur le système [voiture + caravane] : force **extérieure** de contact, répartie.
- la force exercée par la voiture sur la caravane et la force exercée par la caravane sur la voiture sont deux forces **intérieures** : elles sont opposées d'après le principe des actions réciproques.

3 Exemples de forces

1. Le poids \vec{P} d'un corps

● La Terre exerce sur tout objet une force de pesanteur appelée poids de l'objet, noté \vec{P} . Ses caractéristiques sont :

- direction : verticale
- sens : vers le bas
- valeur : $P = mg$
- point d'application : centre d'inertie de l'objet.



Fig. 9-2

● g intensité de la pesanteur est fonction du lieu et de l'altitude à la surface de la Terre ; en moyenne $g = 9,8 \text{ N.kg}^{-1}$.

2. La réaction \vec{R}_N d'un support sur un solide

- Cette force de contact, répartie sur la surface de contact, est exercée par un support sur l'objet.
- Son point d'application est le centre de la surface de contact (si la répartition est uniforme).
- Sa direction est normale (orthogonale) à la surface de contact ; son sens est vers le haut.

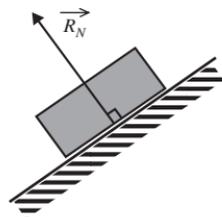
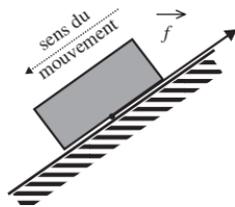


Fig. 9-3

3. Forces de frottement \vec{f}

- Ce sont des forces réparties, exercées par tout corps en contact avec le système étudié.
- Leur point d'application est le centre de la surface de contact (si la répartition est uniforme).
- Leur direction est celle du déplacement, mais son sens est inverse de celui du déplacement si le système étudié est en mouvement.
- Leur valeur dépend de la nature des surfaces en contact, de la vitesse, de la forme du mobile...

Fig. 9-4 :
cas d'un frottement solide

Remarque : la réaction totale d'un support sur un solide est : $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$.

4. Force de rappel \vec{F}_R exercée par un ressort sur un solide

Les caractéristiques de cette force sont :

- direction : celle du ressort
- sens : vers le milieu du ressort
- valeur : $F_R = k(\ell - \ell_0) = k \cdot \Delta\ell$,

où k représente le coefficient de raideur du ressort (en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) et $\Delta\ell$, son allongement.

- point d'application : point d'attache.

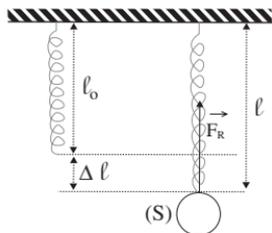


Fig. 9-5

Exemple d'application

On veut fabriquer un dynamomètre avec un ressort de masse négligeable. Pour l'étalonner, on l'accroche à une potence et on suspend à son autre extrémité des masses marquées connues. On obtient les allongements suivants :

m (en g)	0	50	100	150	200	300	400	500
$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ (en cm)	0,0	0,3	0,9	2,2	3,4	5,9	8,3	10,8

Calculer le coefficient de raideur du ressort utilisé, après avoir précisé le domaine où le dynamomètre est utilisable.

Corrigé commenté

Indication : deux grandeurs sont proportionnelles lorsque la représentation de l'une en fonction de l'autre donne une droite (fonction linéaire) ou que le rapport de ces deux grandeurs est constant.

Chaque masse marquée accrochée au ressort est soumise à deux forces : son poids \vec{P} et la force de rappel \vec{F}_R exercée par le ressort.

À l'équilibre, ces deux forces se compensent :

$$\vec{P} + \vec{F}_R = \vec{0}, \text{ soit } F_R = P = mg.$$

Pour F_R , on obtient les valeurs suivantes en Newtons : 0 ; 0,49 ; 0,98 ; 1,47 ; 1,96 ; 2,94 ; 3,92 ; 4,9.

Les rapports $F_R/\Delta\ell$ sont égaux pour $F_R > 1$ N. Le dynamomètre est donc utilisable pour les valeurs de F_R entre 1 N et 5 N.

Le coefficient de proportionnalité du rapport $F_R/\Delta\ell$ représente le coefficient de raideur du ressort. Il est égal à :

$$k = \frac{F_R(B) - F_R(A)}{\Delta\ell(B) - \Delta\ell(A)}. \text{ AN : } k = \frac{4,6 - 2,6}{10 - 5} = 0,4 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1} = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

4 Deuxième loi de Newton

1. Variations du vecteur vitesse

● Dans le cas où les forces extérieures appliquées à un système ne se compensent pas ($\sum \vec{F}_{\text{ext}} \neq \vec{0}$), alors le système voit son état de repos ou de mouvement modifié.

Il y a une modification du vecteur vitesse de son centre d'inertie.

2. Vecteur accélération

● L'accélération représente le taux de variation de la vitesse par rapport au temps, pour une durée Δt la plus petite possible. Le vecteur accélération est égal à la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}\right)}{dt}.$$

● Le repère étant fixe, les vecteurs unitaires \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont des vecteurs constants dans le temps et par suite, on a : $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$.

L'expression du vecteur accélération est donc : $\vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}$.

d'où : $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$; $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$; $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}$.

● La valeur de l'accélération est : $\|\vec{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$. Son unité dans le système international est le mètre par seconde au carré ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$).

3. Les différents types de mouvements

● Étudier les variations de $\|\vec{v}\|$ en fonction du temps revient à considérer

celles de $\|\vec{v}\|^2 = v^2$. Or : $\frac{d(\vec{v})^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}$.

● On en déduit :

– si $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$, alors $\|\vec{v}\|$ augmente : le mouvement est **accélééré** ;

– si $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$, alors $\|\vec{v}\|$ diminue : le mouvement est **retardé** ;

– si $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$, alors $\|\vec{v}\| = \text{cte}$: le mouvement est **uniforme**.

4. Deuxième loi de Newton appliquée au centre d'inertie

● Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide de masse m constante est reliée à l'accélération de son centre d'inertie par la relation : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G$.

Remarque : si $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$, alors $\vec{a}_G = \vec{0}$, ce qui entraîne que $\vec{V}_G = \vec{c}^{\text{te}}$. Le principe de l'inertie est un cas particulier du théorème du centre d'inertie.

Exemple d'application

Les positions d'une balle lancée en l'air sont repérées dans un plan vertical (Ox ; Oz). Une analyse informatique des positions de la balle au cours du temps nous donne les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 5,2t \\ z(t) = -5t^2 + 3t + 1,8. \end{cases}$$

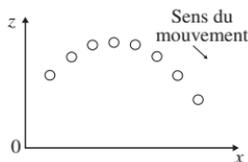


Fig. 9-7

Les distances sont en mètres, les dates en secondes. On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur accélération dans le repère (Ox ; Oz).
- En déduire, à partir du vecteur accélération, que la balle a un mouvement de chute libre.

Corrigé commenté

Indication : un objet a un mouvement de chute libre s'il n'est soumis qu'à une seule force : son poids.

- Les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération sont obtenues par dérivations successives des coordonnées du vecteur position par rapport au temps. On a donc :

$$\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 5,2 \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -10t + 3 \end{cases} \quad (1) \quad \text{et} \quad \vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \\ \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\dot{z}}{dt} = -10 \end{cases} \quad (2).$$

- D'après (2), on constate que : $\vec{a} = \vec{g} \begin{cases} 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$.

Or dans le référentiel terrestre supposé galiléen et d'après la deuxième loi de Newton, la balle n'est soumise qu'à une seule force, son poids. On a : $m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} = \vec{P}$: la balle a un mouvement de chute libre.

1 Chute libre verticale

1. Mouvement de chute libre

- C'est le mouvement d'un objet soumis uniquement à son poids.

2. Expression de l'accélération

- En se plaçant dans un référentiel terrestre supposé galiléen et en considérant un solide soumis à son seul poids \vec{P} , d'après la deuxième loi de Newton, on a :

$$m \cdot \vec{a}_G = \vec{P} = m \cdot \vec{g}, \quad \text{soit } \boxed{\vec{a}_G = \vec{g}} \quad (1).$$

- L'accélération du centre d'inertie du solide est égale au champ de pesanteur. Elle ne dépend ni de la masse du solide ni de sa vitesse initiale, c'est-à-dire de la manière dont il est lancé.

3. Chute libre sans vitesse initiale

- Choisissons un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'axe vertical est orienté vers le haut et dont l'origine O est la position initiale. L'origine des dates est choisie à l'instant où le solide est lâché.

- Le champ de pesanteur étant considéré comme uniforme (identique en tout point de la région considérée) dans le repère choisi, on pose les conditions initiales suivantes :

$$\vec{OG}(t=0) \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{v}(t=0) \begin{cases} v_{ox} = 0 \\ v_{oy} = 0 \\ v_{oz} = 0 \end{cases}$$

Comme $\vec{g} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a d'après (1) : $\vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 0 \\ a_y = \ddot{y} = 0 \\ a_z = \ddot{z} = -g \end{cases}$

Par intégrations successives du vecteur accélération et en tenant compte des conditions initiales, on obtient :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \dot{x} = 0 \\ v_y = \dot{y} = 0 \\ v_z = \dot{z} = -gt \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{OG} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

- Le centre d'inertie G d'un solide en chute libre, abandonné sans vitesse initiale, est animé d'un mouvement :

- rectiligne vertical (car $x = 0$ et $y = 0$) ;
- uniformément accéléré (car $\vec{a} \cdot \vec{v} = (-g) \cdot (-gt) = g^2 \cdot t > 0$ où $t > 0$).
- La valeur de la vitesse croît d'une façon linéaire avec la durée de la chute :

$$v = |v_z| = g \cdot t \quad (2).$$

La hauteur de la chute est liée à la durée par la relation : $h = |z| = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (3).

En éliminant t entre les relations (2) et (3), nous obtenons la relation caractérisant une chute libre : $v^2 = 2 \cdot g \cdot h$.

Exemple d'application

Pour mesurer la profondeur h d'un puits, on laisse tomber du haut du puits une pierre de masse $m = 2$ kg, sans vitesse initiale.

On mesure la durée qui sépare le lâcher de la pierre et la perception de son émis lors de son impact sur l'eau : $\Delta t = 1,5$ s. *Données* : le son se propage dans l'air à la vitesse : $v_s = 340$ m.s⁻¹ ; on prendra $g = 10$ N.kg⁻¹.

Quelle est la profondeur du puits ?

Corrigé commenté

Indication : il faut du temps à la pierre pour atteindre le fond, et il faut du temps au son de l'impact pour remonter jusqu'à l'expérimentateur.

Soit Δt_1 , la durée nécessaire pour que la pierre atteigne le fond du puits.

Soit h , la profondeur du puits : $h = \frac{1}{2} g (\Delta t_1)^2$, soit : $\Delta t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$ (1).

Soit Δt_2 , la durée nécessaire pour que le son remonte : $\Delta t_2 = \frac{h}{v_s}$ (2).

La durée totale de l'expérience est : $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, soit $\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + \frac{h}{v_s}$ (3).

On pose $X = \sqrt{h}$, avec X positif, ce qui donne dans la relation (3) :

$\Delta t v_s = v_s \sqrt{\frac{2}{g}} X + X^2$ et par suite $X^2 + \left(v_s \sqrt{\frac{2}{g}}\right) \cdot X - \Delta t v_s = 0$ (4).

On résout cette équation du second degré : $\Delta = v_s^2 \frac{2}{g} + 4 \Delta t v_s = 25160$.

L'équation (4) a deux solutions : l'une positive X_1 et l'autre négative X_2 .

C'est la solution positive qui permet de trouver h :

$$h = X_1^2 = \frac{\left(-\left(v_s \sqrt{\frac{2}{g}}\right) + \sqrt{\Delta}\right)^2}{2} \quad \text{AN : } h = \frac{\left(-\left(340 \times \sqrt{\frac{2}{10}}\right) + \sqrt{25160}\right)^2}{2} \approx 10,8 \text{ m.}$$

2 Chute verticale avec frottement

1. Les forces en présence

- Un objet qui tombe dans l'atmosphère est soumis à trois forces :
 - son poids \vec{P} , vertical, vers le bas, de valeur $P = mg$ (constante pour un champ de pesanteur uniforme) ;
 - la poussée d'Archimède \vec{P}_A due à l'air, verticale, vers le haut, de valeur (constante au cours du temps) égale au poids du volume d'air déplacé. $P_A = m_{air} \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$ où V représente le volume de l'objet et ρ représente la masse volumique de l'air ;
 - une force de frottement fluide \vec{f} verticale, de sens opposé au mouvement et dont la valeur croît avec la vitesse d'une façon linéaire.

2. Application de la deuxième loi de Newton à un mouvement de chute verticale

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- Le système étudié est un solide lâché, à $t = 0$, sans vitesse initiale, d'un point O origine du repère et soumis aux trois forces \vec{P} , \vec{P}_A et \vec{f} .
- Appliquons au système étudié la 2^e loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G \quad (4)$$

- Au fur et à mesure de la chute, la vitesse augmente et l'intensité de la force \vec{f} augmente contrairement aux deux autres forces. Pour une certaine vitesse appelée vitesse limite v_{lim} , l'intensité de la force \vec{f} atteint un maximum tel que : $f = P + P_A$.

On a alors $\vec{f} = -(\vec{P} + \vec{P}_A)$, d'où $\vec{a}_G = 0$: le mouvement est alors uniforme.

3. Équation différentielle du mouvement

- Ces forces étant verticales, elles n'ont chacune qu'une composante verticale :

$$P_Z = -m \cdot g ; P_{AZ} = + m_{air} \cdot g ; f_Z = -\lambda \cdot v_Z.$$

- On en déduit, d'après (4), que l'accélération n'a qu'une composante verticale telle que :

$$m \cdot a_Z = -\lambda \cdot v_Z + m_{air} \cdot g - m \cdot g \quad (5).$$

- D'après la définition de l'accélération et en posant : $v = v_Z (< 0)$,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda}{m} v + \left(\frac{m_{\text{air}}}{m} - 1 \right) g \quad (6).$$

C'est l'équation différentielle du mouvement.



Fig. 10-1

4. Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

- D'après la notion de dérivée, $\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, soit en première approximation : $\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}$ pour Δt le plus petit possible.

- En appliquant cette relation à l'équation (6), nous obtenons une suite de valeurs de la vitesse à intervalles de temps réguliers Δt (c'est-à-dire aux dates : $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$), à partir de $v_0 = 0$.

$$v_1 - v_0 = \left[-\frac{\lambda}{m} \cdot v_0 + \left(\frac{m_{\text{air}}}{m} - 1 \right) \cdot g \right] \Delta t, \text{ soit avec } v_0 = 0, v_1 = \left(\frac{m_{\text{air}}}{m} - 1 \right) \cdot g \cdot \Delta t.$$

À partir de v_1 , on peut établir de la même manière les valeurs $v_2, v_3 \dots$

- Cette méthode numérique itérative permet de tracer point par point la courbe représentative de la fonction $v(t)$.

Exemple d'application

En utilisant la méthode d'Euler avec un pas de $\Delta t = 0,5$ s, trouver la vitesse limite de la chute d'une balle de masse $m = 500$ g et de volume $V = 1 \text{ dm}^3$ lâchée sans vitesse initiale dans l'air de masse volumique $\rho = 1,29 \text{ g.dm}^{-3}$. On considère $g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$. Le coefficient de frottement vaut ici $\lambda = 0,5 \text{ N.s.m}^{-1}$.

Corrigé commenté

Indication : tracez $v = f(t)$: la courbe tend asymptotiquement vers v_{limite} .

L'application du théorème du centre d'inertie aboutit à l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda}{m} v + \left(\frac{m_{\text{air}}}{m} - 1 \right) g, \text{ où } m_{\text{air}} \text{ est la masse du volume } V \text{ d'air.}$$

D'après la méthode d'Euler, on obtient : $v_{i+1} = \left[-\frac{\lambda}{m} \cdot v_i + \left(\frac{m_{\text{air}}}{m} - 1 \right) \cdot g \right] \Delta t + v_i$, soit numériquement $v_{i+1} = 0,5 \cdot v_i - 4,99$.

Comme $v_0 = 0$, on peut trouver v_1 . Connaissant v_1 , on trouve v_2, \dots

v est négatif car l'axe vertical est orienté vers le haut et la balle descend.

On calcule les valeurs v_i pour pour différents instants t_i . A partir de $t_{5,5}$, la valeur de la vitesse est constante : $v_{\text{limite}} = -9,97 \text{ m.s}^{-1}$.

3 Mouvement plan d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

1. Équations horaires paramétriques

● Nous reprenons l'étude du solide soumis à son seul poids, mais avec une vitesse initiale non nulle. En se plaçant dans un référentiel terrestre supposé galiléen, d'après la deuxième loi de Newton, on a :

$$m \cdot \vec{a}_G = \vec{P} = m \cdot \vec{g}, \quad \text{soit } \boxed{\vec{a}_G = \vec{g}}.$$

● Choisissons un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que la position initiale soit sur l'axe Oz et le vecteur vitesse initial soit dans le plan vertical $(O; \vec{i}, \vec{k})$. Nous considérons les conditions initiales :

$$\vec{OG}(t=0) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{v}(t=0) \begin{cases} v_{0x} = +v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = +v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Comme les coordonnées de \vec{g} sont : $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases}$, on a : $\vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 0 \\ a_y = \ddot{y} = 0 \\ a_z = \ddot{z} = -g \end{cases}$

● Par intégrations successives de l'accélération et en tenant compte des conditions initiales, on a :

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x = \dot{x} = +v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y = \dot{y} = 0 \\ v_z = \dot{z} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{OG}(t) \begin{cases} x = +v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t & (7) \\ y = 0 & (8) \\ z = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + z_0 & (9) \end{cases}$$

● Quelle que soit la date t , on a $y = 0$: la trajectoire est donc décrite dans le plan (Ox, Oz) .

2. Équation de la trajectoire

● D'après (7), on a : $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$.

En injectant cette relation dans (9), on en déduit l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} (x)^2 + \tan \alpha (x) + z_0} \quad (10).$$

● La trajectoire est plane et parabolique.

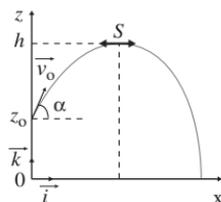


Fig. 10-2

3. Flèche de la trajectoire

● La flèche est l'altitude maximale h atteinte par le mobile, c'est-à-dire l'ordonnée z_S du sommet S . En ce point, la tangente à la trajectoire et donc le vecteur vitesse sont horizontaux, d'où :

$$v_z(S) = -gt_S + v_0 \sin \alpha = 0, \text{ soit } t_S = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}.$$

● D'après (9), on a alors : $h = z(S) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g^2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} + z_0$,

$$\text{soit } h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} + z_0.$$

Exemple d'application

Un joueur de tennis tente de lobber son adversaire situé à 7 mètres de lui. Il frappe la balle alors que celle-ci se trouve à 36 cm du sol. La balle part avec un vecteur vitesse \vec{v}_0 incliné d'un angle $\alpha = 40^\circ$ par rapport au sol. On négligera les frottements avec l'air. La balle est assimilée à son centre d'inertie G et on démontre que le mouvement de celui-ci, dans un repère (Ox, Oz) semblable à la figure 10-2, est donné par : $\vec{OG}(t) = +v_0 \cos \alpha t \vec{i} + \left(-\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t + z_0\right) \vec{k}$ (E).

1. Le sommet S de la trajectoire étant atteint au niveau de l'adversaire, en déduire la valeur de la vitesse initiale v_0 .

2. En sautant, l'adversaire peut atteindre avec sa raquette une hauteur maximale de 2,70 m. Peut-il intercepter la balle ?

Corrigé commenté

1. **Indication** : le sommet S de la trajectoire est à la verticale de l'adversaire ($x_S = 7$ m).

Au sommet de la trajectoire, à la date t_S , la vitesse est horizontale :

$$v_z(S) = -g t_S + v_0 \sin \alpha = 0, \text{ soit } t_S = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

$$\text{Or d'après (E) : } x_S = (v_0 \cos \alpha) t_S = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

$$\text{soit : } v_0 = \sqrt{\frac{2g x_S}{\sin 2\alpha}}. \quad \text{AN : } v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 9,8 \times 7}{\sin(2 \times 40)}} \approx 11,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. **Indication** : pour que l'adversaire intercepte la balle, il faut que $z_S \leq 2,70$ m.

D'après (E), l'ordonnée du sommet S de la trajectoire est :

$$h = z(S) = -\frac{1}{2} g t_S^2 + v_0 \sin \alpha t_S + z_0, \text{ soit : } h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + z_0.$$

$$\text{AN : } h = \frac{11,8^2 \cdot \sin^2 40}{2 \times 9,8} + 0,36 = 3,30 \text{ m}.$$

Les conditions initiales sont telles que l'adversaire ne peut donc pas intercepter la balle.

4 Le mouvement des planètes : les trois lois de Képler

Le mouvement des planètes s'étudie dans le repère héliocentrique dont l'origine est le centre d'inertie du Soleil et dont les trois axes sont dirigés vers trois « étoiles fixes ». Il est considéré comme galiléen.

1. Première loi de Képler

- Dans un repère héliocentrique, les centres des planètes décrivent des ellipses dont le centre du Soleil est l'un des foyers.
- La figure 10-3 vous montre l'ellipse de foyers S (centre du Soleil) et F_2 décrite par le centre de la planète P .

2. Deuxième loi de Képler (loi des aires)

- Le rayon Planète-Soleil « balaie » des aires proportionnelles aux durées mises pour les « balayer ».
- On remarque, figure 10-3, que les aires A_1 , A_2 et A_3 sont « balayées » par le rayon PS pendant la même durée : elles sont donc égales.
- On en déduit, intuitivement, que les arcs parcourus sont tels que : $\ell_1 > \ell_2 > \ell_3$.

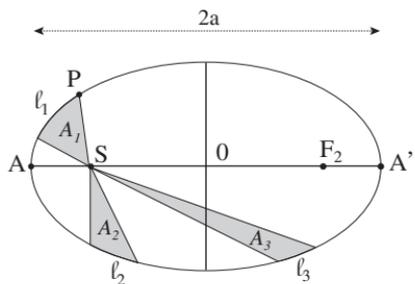


Fig. 10-3

- La planète a donc sa plus grande vitesse, sur son orbite, aux alentours du point A qui est le plus proche du Soleil ; au contraire, la vitesse la plus faible est atteinte en A' , point le plus éloigné du Soleil.
- Si on assimile l'orbite planétaire à un cercle de centre O , on en déduit que la planète se déplace à vitesse constante : le mouvement est alors considéré comme circulaire uniforme.

3. Troisième loi de Képler

- Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du grand axe de l'orbite.

- T étant la période (temps nécessaire pour effectuer une révolution sur l'orbite) et $2a = AA'$ le grand axe, on écrit :

$$T^2 = k(2a)^3 \quad \text{ou} \quad \frac{T^2}{a^3} = \text{Cste.}$$

- Cette constante k' est la même pour toutes les planètes du système solaire, ce qui a des applications importantes en astronomie.

Pour deux planètes P et P' du système solaire, on peut écrire :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3}, \quad \text{soit} \quad a' = a \left(\frac{T}{T'} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Cela permet de déterminer la valeur de a' et donc la trajectoire de la planète P' .

Exemple d'application

Vénus gravite autour du Soleil sur une orbite considérée comme circulaire. La distance r_v de la planète Vénus au Soleil est de 0,72 u.a.

En vous appuyant sur les données suivantes, calculer sa période T_v de révolution dans le référentiel héliocentrique.

Données : période de révolution de la Terre autour du Soleil : $T_T = 365,25$ jours ; distance Terre-Soleil : $r_T = 1$ u.a. = $149,6 \cdot 10^6$ km.

Corrigé commenté

Indication : sachez que le demi-grand axe (a) d'une trajectoire elliptique équivaut au rayon (r) d'une trajectoire circulaire.

La troisième loi de Képler, appliquée à une planète de trajectoire circulaire, permet d'écrire :

$$\frac{T^2}{r^3} = k$$

k étant une constante identique pour toutes les planètes du système solaire, on en déduit :

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_v^2}{r_v^3}, \quad \text{soit} \quad T_v = \sqrt{\frac{r_v^3}{r_T^3}} \cdot T_T^2 \quad \text{et par suite} \quad T_v = \sqrt{\left(\frac{r_v}{r_T}\right)^3} \cdot T_T.$$

Remarque : pour l'application numérique, il est inutile de convertir les distances en unités du système international puisqu'il s'agit d'en faire le rapport (grandeur sans dimension). On laissera donc ces distances en unité astronomique.

$$\text{AN : } T_v = \sqrt{\left(\frac{0,723}{1}\right)^3} \cdot 365,25 \approx 224,54 \text{ jours.}$$

5 Le mouvement des satellites

1. Force de gravitation

● Dans un repère géocentrique supposé galiléen, un satellite subit une force de gravitation de la part de la Terre :

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \cdot \vec{i} \quad (12)$$

où $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I.

● En assimilant la force de gravitation à une force de pesanteur et le champ de gravitation au champ de pesanteur, on a : $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$.

On en déduit, d'après (12) : $\vec{g} = -\frac{G \cdot M_T}{r^2} \cdot \vec{i}$ (13).

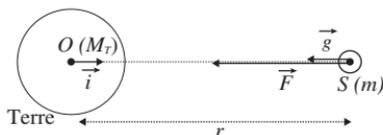


Fig. 10-4

2. Satellite à trajectoire circulaire

● D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, soit $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$, d'où $\vec{g} = \vec{a}$.

● Nous admettrons que le centre de la trajectoire d'un satellite en orbite circulaire est confondu avec le centre de la Terre.

● Dans la base de Frénet (\vec{u}, \vec{n}) liée au satellite (\vec{u} , vecteur unitaire tangent en S à la trajectoire et dans le sens du mouvement ; \vec{n} , vecteur unitaire orthogonal à \vec{u} et orienté vers l'intérieur de la concavité), les coordonnées des vecteurs \vec{F} et \vec{a} sont :

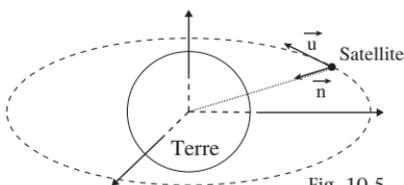


Fig. 10-5

$$\vec{F} \begin{cases} F_t = 0 \\ F_n = m \cdot g \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \vec{a} \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = g \end{cases} \quad (14). \quad \text{Or, on démontre que :} \quad \vec{a} \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{R} \end{cases} \quad (15)$$

avec a_t , accélération tangentielle et a_n , accélération normale.

On en déduit que : $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$. La valeur de la vitesse du satellite est donc constante : un satellite à trajectoire circulaire a un mouvement uniforme.

Remarque : l'accélération étant radiale centripète, on démontre que la trajectoire d'un satellite est située dans un plan passant par le centre O de la Terre.

3. Calcul de la vitesse d'un satellite à trajectoire circulaire

- Comme $a_n = g$, on a $\frac{v^2}{r} = g$, d'où $v = \sqrt{g \cdot r}$. Soit : $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$.
- La vitesse du satellite n'est fonction que de sa distance au centre de la Terre, c'est-à-dire de son altitude.

4. Calcul de la période de révolution d'un satellite à trajectoire circulaire

- La période de révolution correspond à la durée d'un tour, soit :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{G \cdot M_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_T}}$$
. On en déduit : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$.
- Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est donc constant et indépendant de la masse du satellite : il ne dépend que de la masse responsable de l'attraction gravitationnelle (3^e loi de Képler).

Exemple d'application

Le développement des télécommunications nécessite la présence de satellites-relais immobiles par rapport à la Terre, appelés satellites géostationnaires.

Quelle est l'altitude d'un tel satellite ?

Corrigé commenté

Indication : la période de révolution T d'un tel satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même, soit $T = 86\,164$ s (1 jour sidéral).

Par définition du champ, d'après (13), on pose :

$$g = \frac{G \cdot M_T}{r^2}, \text{ soit } g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \text{ et donc } G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2, \text{ avec } R_T \text{ rayon de la Terre.}$$

D'après la 3^e loi de Képler et en posant $r = R_T + h$ où h est l'altitude du satellite, on en déduit :

$$\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T} = \frac{4\pi^2}{g_0 \cdot R_T^2}. \text{ On a donc : } h = \left(T^2 \cdot g_0 \cdot \frac{R_T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R_T = 35\,880 \text{ km.}$$

1 Notion d'oscillateur mécanique

1. Définition

● On appelle oscillateur (ou système oscillant) un système pouvant évoluer, du fait de ses caractéristiques propres, de façon périodique et alternative autour d'une position d'équilibre (ex : suspension de voiture, balançoire...).

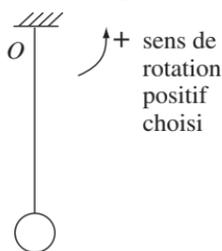
2. Caractérisation des oscillateurs mécaniques

● La grandeur oscillante intervenant dans les équations est ici l'écart à l'équilibre. C'est une grandeur algébrique. Cet écart est en général repéré :
 – soit par l'abscisse rectiligne $x(t)$ dans le cas d'une oscillation rectiligne (système solide-ressort) ;
 – soit par l'abscisse angulaire $\theta(t)$ dans le cas d'une oscillation circulaire (système pendulaire).

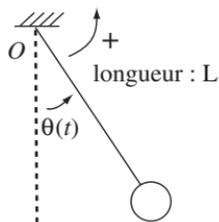
● La valeur positive extrême (ou maximale) prise par $x(t)$ et $\theta(t)$ définit l'amplitude de l'oscillation.

3. Le pendule simple

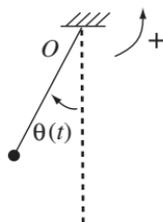
● Un pendule simple est un oscillateur élémentaire. C'est un modèle idéalisé du pendule pesant dans lequel la masse suspendue peut être considérée comme ponctuelle.



Pendule pesant à l'équilibre : les forces se compensent.



Pendule pesant à l'abscisse angulaire $\theta(t) > 0$: les forces ne se compensent plus.



Pendule simple à l'abscisse angulaire $\theta(t) < 0$.

Fig. 11-1

● Lorsqu'on écarte un pendule pesant ou un pendule simple de sa position d'équilibre d'une abscisse angulaire θ_0 et qu'on l'abandonne à lui-même, on constate que, pour des valeurs de θ_0 n'excédant pas une dizaine de degrés, celui-ci effectue des oscillations libres dont la période T est

indépendante de θ_0 . On dit que le pendule simple et le pendule pesant vérifient la loi d'**isochronisme des petites oscillations**.

● Selon l'importance des frottements de l'amortissement, il y a plusieurs régimes **libres** possibles une fois que le pendule est abandonné à lui-même :

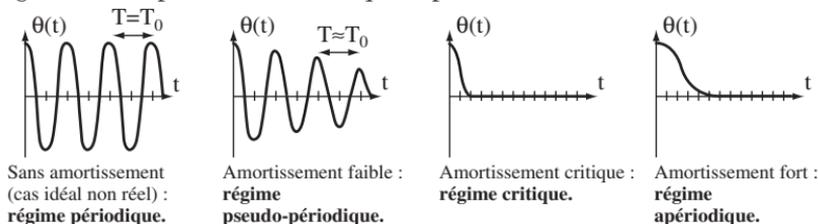


Fig. 11-2

● Dans le cas du pendule simple sans frottement, la période des oscillations T_0 est appelée **période propre**. L'expérience montre qu'elle ne dépend que de la masse du pendule et de la longueur du fil : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$,

où L est la longueur du fil (en mètre) et g est l'intensité de pesanteur.

● Avec frottements, la période T de l'oscillation est inférieure à T_0 . Mais si l'amortissement est faible, on peut considérer que $T \approx T_0$.

Exemple d'application

Un pendule simple est constitué d'une petite bille d'acier de masse $m = 50$ g suspendue à un fil de longueur $L = 2$ m. On l'écarte de 4° de sa position d'équilibre puis on le lâche.

1. Les frottements étant supposés faibles, calculer la période de l'oscillation.
 2. Montrer que la période a bien la dimension d'un temps.
 3. Que vaudrait la période de l'oscillation si on avait écarté le pendule de 8° ?
- Données : $g = 9,81$ N.kg⁻¹

Corrigé commenté

1. Dans ce cas, la période est : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$. AN : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{9,81}} \approx 2,84$ s.
2. **Indication** : Pour l'analyse dimensionnelle, souvenez-vous que $1 \text{ N.kg}^{-1} = 1 \text{ m.s}^{-2}$.

$[T_0] = \sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{\frac{L}{\frac{L}{T^2}}} = \sqrt{T^2} = T$: la période a bien la dimension d'un temps.

3. La période ne changerait pas car, pour ces faibles amplitudes, il y a isochronisme des oscillations.

2 Le pendule élastique

1. Dispositif expérimental

- Un solide (S) de masse m pouvant coulisser sur un rail horizontal est fixé à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable à spires non jointives. L'autre extrémité du ressort est accrochée à un point fixe.
- On repère la position de (S) par l'abscisse $x(t)$ de son centre de gravité, choisie nulle lorsque le système est au repos. Ainsi $x(t)$ est directement l'écart à l'équilibre.

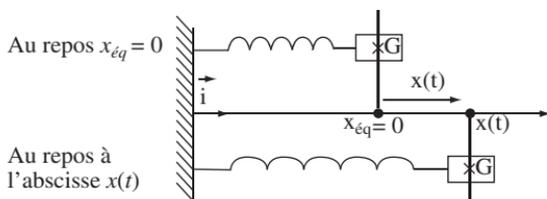


Fig. 11-3

L'écart à l'équilibre est :
 $x(t) - x_{\text{éq}} = x(t) - 0 = x(t)$.
 Ici le ressort est étiré
 donc $x(t) > 0$.

- Le bilan des forces extérieures appliquées au système (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen après l'avoir écarté de sa position d'équilibre de x_0 puis lâché sans vitesse initiale est :

$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, le poids de (S) ; \vec{R}_N , la réaction normale du rail supportant (S) ; \vec{f} , la force équivalente réunissant les forces de frottement avec le rail et avec l'air ; $\vec{F}_r = -k x \vec{i}$, la force de rappel du ressort (k est la constante de raideur du ressort exprimée en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$).

- La résultante des forces est : $\sum(\text{forces}) = (\vec{P} + \vec{R}_N) + \vec{f} + \vec{F}_r = \vec{0} + \vec{f} + \vec{F}_r = \vec{f} - k x \vec{i}$.

2. Équation différentielle

- Appliquons le théorème du centre d'inertie au système (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$ (1).

Ces forces étant colinéaires, on projette (1) selon l'axe Ox uniquement.

On obtient : $f - k x = m \ddot{x}$, soit : $\ddot{x} + \frac{k}{m} x - f = 0$ (2).

- De même que pour le pendule simple et selon l'intensité des frottements, on peut envisager plusieurs régimes libres : régime aperiodique, régime critique, régime pseudo-périodique, régime périodique. On vérifie également l'isochronisme des petites oscillations.

3. Solution analytique de l'équation différentielle pour $f = 0$

• Dans le cas où les frottements sont négligeables, l'équation (2) se réduit à $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (3) : c'est une équation différentielle du second ordre.

• La solution de cette équation est l'équation horaire d'un mouvement **libre non amorti**. Elle est de la forme : $x(t) = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$ (4),

où $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ est la **période propre** de l'oscillateur, où x_m est l'**amplitude** de l'oscillation et où ϕ_0 la **phase à l'origine des dates** (déterminables par les conditions initiales).

La condition initiale $v(0) = 0$ impose ici $\phi_0 = 0$ radian.

La condition initiale $x(0) = x_0$ impose ici $x_m = x_0$.

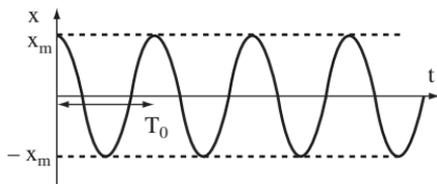


Fig. 11-4

Exemple d'application

On écarte le pendule élastique défini précédemment de $x_0 = 10$ cm vers la droite avant de le lâcher sans vitesse initiale. Les frottements sont négligés.
Données : $m = 100$ g ; $k = 50$ N.m⁻¹.

- Déterminer complètement l'expression de $x(t)$.
- Montrer que la période propre T_0 a bien la même dimension qu'un temps.

Corrigé commenté

1. **Conseil** : exprimez clairement les conditions initiales $x(0)$ et $v(0)$.

Rappel : la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps.

On a : $x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right)$, avec $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. AN : $T_0 = 0,28$ s.

La première condition initiale est $v(0) = 0 = \dot{x}(0)$. En dérivant $x(t)$ et en tenant compte de cette condition, on obtient : $\phi_0 = 0$.

La deuxième condition initiale est $x(0) = x_0 = 0,10$ m, soit $x_m = 0,1$ m tous calculs faits.

On détermine donc : $x(t) = 0,1 \cdot \cos(22,4 t)$.

2. $[T_0] = \left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = \sqrt{\frac{M}{k}}$. Or, comme $F = k \cdot x$, on a $[k] = \left[\frac{F}{x}\right] = \left[\frac{m \cdot a}{L}\right] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L} = M \cdot T^{-2}$.

On a donc : $[T_0] = \sqrt{\frac{M}{M \cdot T^{-2}}} = T$: T_0 est bien homogène à un temps.

3 Le phénomène de résonance

1. Excitation d'un système « solide-ressort »

● Considérons à nouveau le dispositif de la partie 2 en accrochant cette fois le point A du ressort à la périphérie d'un disque dont la fréquence de rotation est contrôlable. Ceci constitue un dispositif d'excitation. Le mouvement de G n'est plus libre : on parle d'**oscillations forcées**.

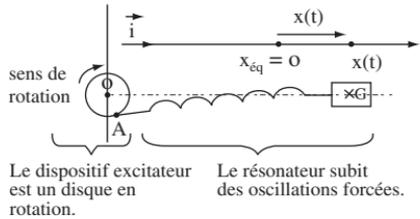


Fig. 11-5

● On s'arrange en général pour que OA soit négligeable devant AG afin de pouvoir considérer, dans l'étude, que le ressort reste horizontal. Ainsi, le disque tournant à la fréquence N (période T) impose un mouvement horizontal de G à la même fréquence (et donc de même période T).

2. Excitation d'un pendule simple

- Considérons à nouveau le pendule simple de la partie 1. Il est tenu cette fois en O par un opérateur pouvant imposer un petit mouvement de balancier de période T au pendule.
- Dans cette situation, on dit que le **pendule est excité**. C'est l'opérateur qui constitue l'excitateur.

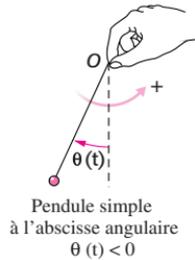


Fig. 11-6

3. Résonance

- Dans le cas « solide-ressort » comme dans celui du pendule simple, le dispositif excité reproduit un mouvement plus ou moins amplifié de l'excitateur en fonction de la fréquence d'excitation.
- Lorsqu'il n'y a pas de frottements, le mouvement de (S) est le plus ample pour une période d'excitation égale à la période propre du système. On dit alors qu'il y a **résonance**.

Sans frottements, il y a résonance pour $T = T_0$.
Avec des frottements faibles, la résonance a lieu pour $T \approx T_0$.

● Si les frottements sont faibles, l'amplitude à la résonance est importante mais uniquement pour des excitations de période T très proches de T_0 : on parle de résonance **aiguë**.

Exemple : un microphone très sensible à une zone étroite de fréquence de son constitue un résonateur à résonance aiguë ; un micro de chanteur par exemple est relativement sélectif.

● Si au contraire l'amortissement est fort, l'amplitude à la résonance n'est pas très grande. La résonance s'observe aussi pour des excitations dont les périodes T font partie d'un voisinage plus large de T_0 : on parle de résonance **floue**.

Exemple : un haut-parleur de chaîne Hi-Fi doit être capable de restituer des sons de fréquences diverses ; il constitue un résonateur à résonance floue.

Exemple d'application

On considère un pendule simple de masse m et de longueur L , excité avec une période T comme l'indique la figure 11-6. L'amplitude des oscillations est notée θ_m . Les frottements sont faibles. Comparer les amplitudes du pendule θ_{m1} , θ_{m2} et θ_{m3} pour des périodes d'excitation de valeurs respectives $T_1 = 1,9$ s, $T_2 = 2,0$ s et $T_3 = 10$ s.

Données : $m = 50$ g ; $L = 1,0$ m ; $g = 9,81$ N.kg⁻¹.

Corrigé commenté

Indication : calculez la période propre de l'oscillateur.

La période propre T_0 de cet oscillateur est définie par : $T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$.

On calcule : $T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{9,81}} = 2,0$ s .

Une excitation de période T_2 est telle que $T_2 = T_0$. C'est pour cette période d'excitation qu'il y a résonance : θ_{m2} est donc la plus grande. Une excitation de période T_1 ne correspond pas à la résonance car $T_1 \neq T_0$, d'où $\theta_{m1} < \theta_{m2}$. Cependant, comme T_1 n'est que très légèrement inférieure à la période propre, on peut dire que θ_{m1} a sensiblement la même valeur que θ_{m2} .

Pour l'excitation de période T_3 , on est très loin de la résonance car T_3 est cinq fois supérieur à T_0 . θ_{m3} est la plus petite des trois.

Au final, on a : $\theta_{m3} < \theta_{m1} < \theta_{m2}$.

1 Travail d'une force

1. Introduction

- On sait qu'une force appliquée à un système (S) est capable de modifier son mouvement (direction, sens et/ou valeur de la vitesse). Une force est donc capable d'augmenter ou de diminuer l'énergie cinétique de (S) dont l'expression est : $E_c = \frac{1}{2} m v_G^2$ pour un solide en translation de centre de gravité G.
- On peut donc considérer qu'une force est un convertisseur d'énergie. Elle permet de convertir une forme d'énergie en une autre, l'une des deux étant sous forme d'énergie cinétique et l'autre dépendant de la nature de la force.
- La quantité d'énergie que la force convertit en énergie cinétique est appelée travail de la force, noté $W(\vec{F})$ et s'exprimant en joule (J). C'est une grandeur algébrique, son signe indique le sens du transfert de l'énergie :
 - si $W(\vec{F}) > 0$, l'énergie cinétique du système augmente : on dit que la force est motrice ;
 - si $W(\vec{F}) < 0$, son énergie cinétique diminue, la force est résistante.

2. Travail élémentaire

- En classe de première, pour une force constante en direction, sens et valeur sur un déplacement rectiligne AB , on définit le travail de cette force par la relation : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$.
- Si le déplacement n'est pas rectiligne et si la force n'est pas constante, on décompose le trajet du point d'application en sections infiniment petites sur lesquelles on peut considérer la force \vec{F} constante et le vecteur déplacement $d\vec{l}$ rectiligne.
- Lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ du point d'application d'une force \vec{F} , le travail élémentaire dW vaut : $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot dl \cdot \cos \alpha$.

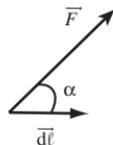


Fig. 12-1

3. Travail total

- Pour trouver le travail total de A à B, on fait la somme de tous les travaux élémentaires. Comme il y a une infinité de déplacements élémentaires pour aller de A à B, la somme de ces travaux n'est pas une somme discrète ($\sum dW$) mais une somme continue : il s'agit d'une somme au sens intégrale ($\int dW$).

$$\bullet W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = dW_1 + dW_2 + \dots + dW_n \\ = \vec{F}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{\ell}_n.$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

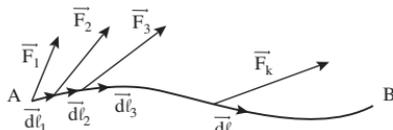


Fig. 12-2

4. Travail d'une action sur un ressort

• Calculons le travail de la tension \vec{T} exercée par un opérateur sur un ressort horizontal lors d'un déplacement de A à B du point d'application de \vec{T} .

On a : $\vec{T} = + k \cdot x \cdot \vec{i}$ et $d\vec{\ell} = dx \cdot \vec{i}$.

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) = \int_A^B d\vec{\ell} = \int_A^B (k \cdot x \cdot \vec{i}) \cdot (dx \cdot \vec{i}),$$

$$\text{soit : } W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) = \int_A^B (k \cdot x \cdot dx) \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i}) = \int_A^B (k \cdot x \cdot dx) = \left[\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \right]_A^B.$$

• On obtient : $W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_B^2 - x_A^2)$. Cette expression est valable pour A et B du même côté de O.

• C'est aussi, par définition de l'intégrale, l'aire sous la courbe $T = f(x)$ de x_A à x_B :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) = \text{aire (grand triangle)} - \text{aire (petit triangle)} \\ = 1/2 k \cdot x_B^2 - 1/2 k \cdot x_A^2.$$

On retrouve bien la même expression.

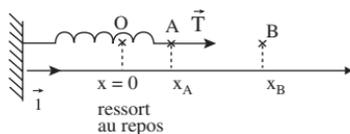


Fig. 12-3

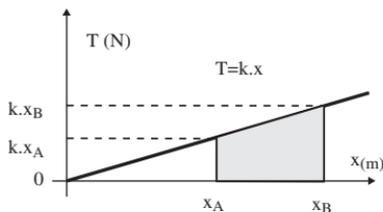


Fig. 12-4

Exemple d'application

Calculer l'énergie qu'il faut fournir à un ressort pour le comprimer de 10 cm à partir de sa position au repos. On donne sa constante de raideur $k = 1\,000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Corrigé commenté

Indication : Faites un calcul d'intégrale.

On reprend la figure 12-3 avec ici $x_A = 0$ et $x_B = -0,1 \text{ m}$. Le travail à fournir est égal au travail de la force à exercer pour le comprimer.

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) = \int_B^A k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_B^2 - x_A^2), \text{ soit : } W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) = \frac{1}{2} \cdot 1\,000 \cdot (-0,1)^2 = 5 \text{ J}.$$

2 Énergie mécanique d'un système « solide-ressort » horizontal

1. Énergie potentielle élastique d'un ressort seul

● La tension \vec{T} exercée par un opérateur qui comprime ou qui étire un ressort à partir de sa position de repos est une force qui convertit l'énergie cinétique fournie par l'opérateur en énergie potentielle élastique (pour le ressort).

● Bien que l'énergie cinétique diminue, le travail de \vec{T} est positif ; il s'agit en effet de l'énergie cinétique possédée par l'opérateur et non celle du système constitué par le ressort.

On a : $\Delta E_{P_{A \rightarrow B}} = W_{A \rightarrow B}(\vec{T})$, soit : $E_{PB} - E_{PA} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_B^2 - x_A^2) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_B^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2$.

L'énergie potentielle élastique d'un ressort est donc : $E_p(x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$.

2. Étude énergétique du système « solide-ressort »

● On étudie le système « solide-ressort » horizontal en négligeant les frottements, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On écarte G de sa position à l'équilibre jusqu'au point G_m tel que $x = x_m > 0$ puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

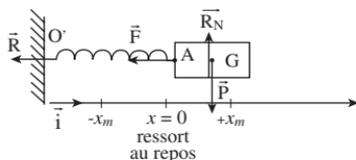


Fig. 12-5

● Les forces appliquées au système sont : le poids du système : (\vec{P}), la réaction normale du support : (\vec{R}_N), la force de réaction exercée par le mur en O' sur le système : (\vec{R}) et la force exercée par le ressort sur la masse en A : ($\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$).

Le poids et la réaction normale du rapport ne travaillent pas puisque ces forces sont orthogonales au déplacement ; \vec{R} ne travaille pas puisque son point d'application est fixe.

Remarque : \vec{F} est une force intérieure au système. D'habitude, le bilan des forces ne fait intervenir que des forces exercées par le milieu extérieur car les systèmes étant en général indéformables, les forces intérieures ne travaillent pas. Ici, le système étant déformable, cette force travaille. Elle convertit de l'énergie cinétique possédée par la masse en énergie potentielle élastique communiquée au ressort).

● On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le premier quart de période du mouvement (G passe de G_m à O). Seule, \vec{F} travaille sur une distance valant $G_m O$.

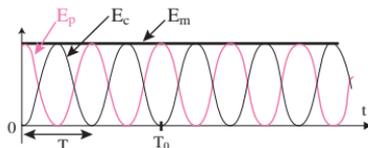
$$\Delta E_c_{G_m \rightarrow O} = W_{G_m \rightarrow O}(\vec{F}) = \int_{G_m}^O \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{G_m}^O (-k \cdot x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_0^2 - x_{G_m}^2)$$

On obtient $\Delta E_c_{G_m \rightarrow O} = \Delta E_p_{G_m \rightarrow O}$, soit : $\Delta E_c_{G_m \rightarrow O} = \Delta E_p_{G_m \rightarrow O} = 0$.

● En introduisant l'expression de l'énergie mécanique $E_m = E_p + E_c$, on peut écrire $\Delta E_m = 0$. **L'énergie mécanique du système se conserve : le système est dit conservatif.**

● Sur ce premier quart de période, toute l'énergie potentielle initiale du ressort est convertie en énergie cinétique pour la masse par la force \vec{F} .

La masse atteint sa vitesse maximale en O , mais le ressort ne possède plus d'énergie potentielle.



Les transferts d'énergie entre les formes cinétique et potentielle sont périodiques de période $T = T_0/2$, où T_0 est la période propre des oscillations.

Fig. 12-6

Puis G passe de O à G_m' tel que $x = -x_m$ (deuxième quart de période), \vec{F} change alors de sens et convertit alors l'énergie cinétique en énergie potentielle... Il y a un transfert mutuel d'énergie cinétique en énergie potentielle élastique au cours de ce mouvement périodique.

Exemple d'application

On écarte de l'équilibre un pendule élastique de masse m et de constante de raideur k d'une amplitude $x_m > 0$ avant de le lâcher sans vitesse. Les frottements sont négligés. D'après le chapitre précédent, son équation horaire est de la forme : $x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right)$.

Déterminer l'expression de $E_c(t)$ possédée par le pendule à un instant t .

Corrigé commenté

Indication : dérivez $x(t)$ pour trouver $v(t)$, puis remplacez l'expression de $v(t)$ dans la formule de l'énergie cinétique.

La dérivée de $x(t)$ par rapport au temps est : $\dot{x}(t) = -X_m \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right)$.

Comme $E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, on a $E_c(t) = \frac{1}{2} m \left[-X_m \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right) \right]^2$.

Avec $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ et $\sin^2(a) = (1 - 2 \cdot \cos(2a))/2$, on calcule :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} k X_m^2 \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right) \right]^2 = \frac{1}{4} \cdot k \cdot X_m^2 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + 2\phi_0\right) \right]$$

3 Énergie d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

1. Travail du poids

● La force gravitationnelle exercée par la terre sur un objet de son voisinage est appelée le « poids de l'objet » : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, où \vec{g} est le vecteur champ de pesanteur. Si les distances parcourues à la surface de la Terre ne dépassent pas quelques kilomètres, \vec{g} peut être considéré comme constant : on dit que le champ de pesanteur est uniforme.

● Lorsque l'objet change d'altitude, son poids travaille. Il convertit alors de l'énergie cinétique en énergie potentielle de pesanteur ou inversement selon qu'il gagne ou perd de l'altitude :

– si l'objet perd de l'altitude, $W(\vec{P}) > 0$: on dit que \vec{P} est moteur,
 – si l'objet monte, $W(\vec{P}) < 0$: on dit que \vec{P} est résistant.

● Lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$, le travail élémentaire du poids est :
 $dW(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{\ell} = m \cdot \vec{g} \cdot (\vec{k} \cdot d\vec{\ell}) = m \cdot \vec{g} \cdot dz$.

De A à B, si \vec{g} est constant, on a :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_A^B dW = \int_A^B (-m \cdot \vec{g} \cdot dz) = [-m \cdot \vec{g} \cdot z]_{z_A}^{z_B},$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = m \vec{g} \cdot (z_A - z_B)$$

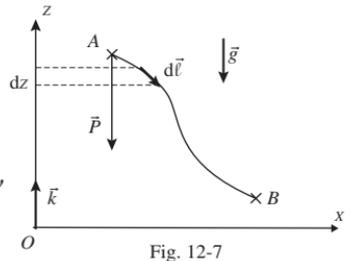


Fig. 12-7

Dans l'exemple de la figure 12-7, on a : $z_B < z_A$, donc $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) > 0$.

● Ce travail est indépendant du chemin suivi entre A et B, il ne dépend que des altitudes de départ et d'arrivée.

2. Énergie potentielle de pesanteur

● $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -m \vec{g} \cdot (z_B - z_A) = -(m \vec{g} z_B - m \vec{g} z_A) = -(E_{PB} - E_{PA}) = -\Delta E_{P A \rightarrow B}$.

● L'énergie potentielle de pesanteur est donc : $E_p(z) = m \cdot \vec{g} \cdot z$, si on la considère comme étant nulle à l'altitude $z = 0$.

3. Énergie mécanique

● On communique à un petit projectile de masse m , une vitesse \vec{v}_0 (voir figure 12-8).

● On étudie le système (masse m dans le champ de pesanteur) dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce système n'est soumis qu'à son poids \vec{P} . Tous les frottements sont négligés.

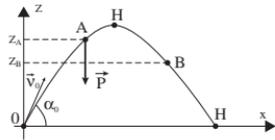


Fig. 12-8

● On applique le théorème de l'énergie cinétique au projectile lors de son mouvement entre A et B :

$$\Delta E_{c\ A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}(\vec{P}), \text{ soit : } \Delta E_{c\ A \rightarrow B} = -mg \cdot (z_B - z_A) = -(mgz_B - mgz_A).$$

On obtient : $\Delta E_{c\ A \rightarrow B} = -\Delta E_{p\ A \rightarrow B}$ et donc : $\Delta E_{c\ A \rightarrow B} + \Delta E_{p\ A \rightarrow B} = 0$ (2).

● En introduisant l'expression de l'énergie mécanique $E_m = E_p + E_c$, on peut écrire : $\Delta E_m = 0$. L'énergie mécanique du système se conserve : **on dit que le système est conservatif.**

● De O jusqu'au sommet de la trajectoire, le poids effectue un travail négatif où l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle de pesanteur. Du sommet de la trajectoire jusqu'à H, le poids effectue un travail positif : c'est l'énergie potentielle de pesanteur qui est convertie en énergie cinétique.

Exemple d'application

On considère le projectile de la figure 12-8.

1. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer z_F .

2. Faire de même en appliquant cette fois le théorème de l'énergie mécanique.

Données : $v_0 = 14 \text{ m.s}^{-1}$; $\alpha_0 = 90^\circ$; $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$.

Corrigé commenté

1. **Indication** : appliquez le théorème de l'énergie cinétique entre O et F.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le théorème de l'énergie cinétique entre O et F au projectile soumis à son seul poids \vec{P} .

$\Delta E_{c\ O \rightarrow F} = W_{O \rightarrow F}(\vec{P})$, soit : $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_F^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot (z_F - z_0)$. En F, la vitesse du projectile est nulle. On a donc : $0 - \frac{1}{2} \cdot v_0^2 = -g \cdot (z_F - 0)$, soit : $z_F = \frac{v_0^2}{2g} = 10 \text{ m}$.

2. **Indication** : appliquez le théorème de l'énergie mécanique entre O et F.

On applique au même système étudié dans le même référentiel le théorème de l'énergie mécanique entre O et F. La seule force qui travaille est le poids ; or elle convertit ici de l'énergie cinétique (mécanique) en énergie potentielle de pesanteur (mécanique aussi!).

On a donc :

$$\Delta E_{m\ O \rightarrow F} = \Delta E_{p\ O \rightarrow F} + \Delta E_{c\ O \rightarrow F} = 0, \text{ soit : } (m \cdot g \cdot z_F - m \cdot g \cdot z_0) + (\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_F^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2) = 0.$$

Tous calculs faits, on trouve : $z_F = \frac{v_0^2}{2g}$, soit : $z_F = \frac{14^2}{2 \times 9,81} \approx 10 \text{ m}$.

1 Comparaison système planétaire - atome

1. Loi de Newton et loi de Coulomb

L'étude de la mécanique newtonienne implique l'existence de l'interaction gravitationnelle et de l'interaction électrostatique.

- Loi de Newton :

Deux corps ponctuels A et B de masse m_A et m_B exercent l'un sur l'autre des forces gravitationnelles de même valeur (exprimée en N) :

$$F = G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{AB^2},$$

où m_A et m_B s'expriment en kg, AB en m et où $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$ (constante de gravitation universelle).

- Ces forces sont toujours attractives :



- Si les deux corps sont à répartition sphérique de masse, la relation reste valable en considérant que A et B sont les centres de gravité des deux corps.

- Loi de Coulomb :

Deux corps ponctuels A et B de charge électrique q_A et q_B exercent l'un sur l'autre des forces électrostatiques de même valeur (exprimée en N) :

$$F' = k \cdot \frac{q_A \cdot q_B}{AB^2},$$

où q_A et q_B s'expriment en C, AB en m et où $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{m}^2$.

- Ces forces sont attractives si q_A et q_B sont de signes contraires.



- Ces forces sont répulsives si q_A et q_B sont de même signe.



2. Similitudes entre les deux lois

- Elles dépendent toutes les deux de $1/AB^2$: leur portée est donc infinie.
- Le rôle joué par la **masse** dans le cas de la force gravitationnelle est joué par la **charge électrique** dans le cas de la force électrostatique.
- Ces deux forces dérivent d'une énergie potentielle.

3. Différences entre les deux interactions

- La valeur de la force de gravitation est très faible devant celle de la force électrostatique. À l'échelle des particules élémentaires chargées, c'est l'interaction électrostatique qui régit les mouvements. À l'échelle astronomique, la matière étant neutre, c'est l'interaction gravitationnelle qui régit les mouvements des satellites et des planètes par exemple.
- Les systèmes gérés par les forces gravitationnelles, tels que les systèmes solaires, sont d'une diversité infinie. En effet, les planètes peuvent avoir des masses et des tailles d'orbite de n'importe quelle valeur : il n'y a pas deux systèmes identiques. À l'inverse, les systèmes soumis aux forces électrostatiques sont tous d'une ressemblance frappante (pas de diversité) : par exemple, tous les atomes d'hydrogène de l'univers à la même température sont indiscernables entre eux !
- Cette dernière différence est fondamentale et permet d'expliquer pourquoi la valeur de l'énergie d'un atome est quantifiée alors que la valeur de l'énergie d'un système planétaire est continue.

Exemple d'application

1. Calculer la valeur F des forces de gravitation qui s'exercent entre deux électrons distants de $d = 1$ pm.
2. Calculer la valeur F' des forces électrostatiques qui s'exercent entre ces deux électrons distants de $d = 1$ pm.
3. Calculer le rapport $r = F'/F$ et conclure.

Données : $m_{e^-} = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $q_{e^-} = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Corrigé commenté

Indication : on rappelle que $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$.

1. Par définition, $F = G \cdot \frac{m_{e^-} \cdot m_{e^-}}{d^2}$. AN : $F \approx 5,5 \cdot 10^{-47}$ N.

2. Par définition, $F' = k \cdot \frac{q_{e^-} \cdot q_{e^-}}{d^2}$. AN : $F' = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-12})^2} \approx 2,3 \cdot 10^{-4}$ N.

3. Comme $r = \frac{F'}{F}$, on a : $r = \frac{2,3 \cdot 10^{-4}}{5,5 \cdot 10^{-47}} \approx 4 \cdot 10^{42}$.

Les forces de gravitation sont négligeables devant les forces électrostatiques.

2 Spectroscopie : observation et interprétation

1. Étude expérimentale des spectres

- Obtention d'un spectre :

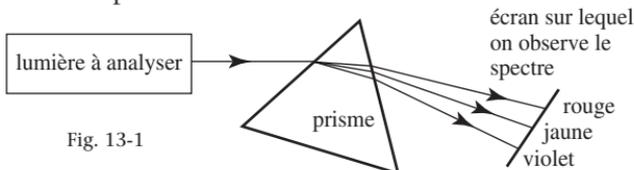


Fig. 13-1

- Un gaz sous haute pression, un liquide ou un solide, lorsqu'on les chauffe, émettent des rayonnements électromagnétiques dont les longueurs d'ondes appartiennent à un intervalle continu.

On parle de **spectre continu d'émission**.

- Par contre, un gaz sous basse pression et à haute température n'émet que certains rayonnements de longueurs d'ondes spécifiques dont l'ensemble est une caractéristique du gaz et constitue en quelque sorte sa signature. On parle de **spectre de raies d'émission**.

- Si on analyse de la lumière blanche passée au travers d'un gaz haute pression, un liquide ou un solide non opaque, on obtient un **spectre d'absorption de bandes** (bandes noires sur un fond composé des couleurs de l'arc-en-ciel) : c'est le complémentaire du spectre d'émission.

- Si enfin on analyse de la lumière blanche passée au travers d'un gaz basse pression à moyenne température, on voit que celui-ci absorbe uniquement les radiations qu'il serait capable d'émettre s'il était chaud. On obtient un **spectre d'absorption de raies** (raies noires sur un fond composé des couleurs de l'arc-en-ciel) : c'est le complémentaire du spectre de raies d'émission.

2. Interprétation de la discontinuité des spectres de raies

- Nous savons que les atomes ne présentent pas une diversité infinie d'états (contrairement aux systèmes planétaires). Ils ne peuvent donc prendre que certaines valeurs d'énergie.

- Pour n'importe quelle valeur d'orbite, un satellite peut être dans un état énergétique stationnaire, c'est-à-dire y rester. En effet, pour chaque énergie potentielle (altitude), il existe une énergie cinétique (vitesse) qui permet

cette stationnarité. Toutes les altitudes, toutes les vitesses et toutes les masses sont envisageables. L'énergie totale des satellites peut donc ainsi prendre n'importe quelle valeur.

● Il n'en va pas de même pour un système (électrons-noyau). Les électrons, en tournant, créent un champ électromagnétique (comme le ferait un courant dans une bobine). L'interaction à prendre en compte n'est donc pas uniquement électrostatique : elle est **électromagnétique**. Une particule chargée, soumise à une accélération, émet de l'énergie ; mais, pour certaines orbites, l'énergie qu'elle envoie à un certain endroit de sa trajectoire est susceptible d'être récupérée à un autre endroit de cette trajectoire quelques instants plus tard. La plupart des mouvements d'un électron autour d'un noyau chargé entraînent donc une perte d'énergie pour le système, sauf pour certaines orbites qui peuvent donc être stationnaires. On parle d'état stationnaire (état dans lequel l'électron peut rester). Tous les autres ne correspondent qu'à des états transitoires : l'électron ne fait qu'y passer à l'occasion d'une perte ou d'un gain d'énergie.

● Les états d'énergie observables dans un atome sont donc quantifiés puisque les autres ne durent jamais assez longtemps pour être observés : on dit que **l'énergie dans un atome est quantifiée**.

● Un atome excité de gaz à basse pression (seul état de la matière où les atomes n'ont aucune interaction entre eux) évacue de l'énergie par à-coups en passant d'une orbite autorisée à l'autre. À chaque fois un rayonnement de longueur d'onde bien précis est émis. Ceci explique l'existence des spectres d'émission de raies.

● De même, si on envoie de la lumière dans un atome peu excité de gaz à basse pression, il n'est susceptible d'absorber que les rayonnements de longueur d'onde apportant l'énergie nécessaire à le faire passer d'un niveau d'énergie au suivant, permettant à un de ses électrons de passer d'une orbite à celle immédiatement supérieure. Ceci explique l'existence des spectres d'absorption de raies et justifie qu'ils soient le complémentaire de ceux d'émission.

3 Variations d'énergie dans un atome

1. Le photon

● Dès 1900, Max Planck postule que l'énergie ne peut s'échanger que par « paquets », ou quanta. À une onde électromagnétique monochromatique de fréquence ν , il associe un quantum d'énergie de valeur : $E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$.

$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck et c , la célérité de la lumière.

● En 1905, Albert Einstein postule que ces quanta d'énergie sont portés par des particules de masse nulle qu'il appelle **photons**. Chaque photon possède donc une énergie $E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$, où ν est la fréquence de l'onde monochromatique associée (en hertz) et λ sa longueur d'onde (en mètre).

2. Postulats de Bohr

● En 1913, Niels Bohr postule que :

- les variations d'énergie de l'atome sont quantifiées ;
- l'atome ne peut exister que dans certains états d'énergie bien identifiés, caractérisés par des niveaux d'énergie ;
- un photon de fréquence $\nu_{n,q}$ est émis lorsque l'atome effectue une transition entre deux niveaux d'énergie de E_n à E_q .

L'énergie du photon est :

$$h \cdot \nu_{n,q} = |E_n - E_q|$$

● L'atome change de niveau d'énergie par à-coups.

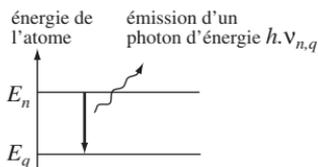


Fig. 13-2

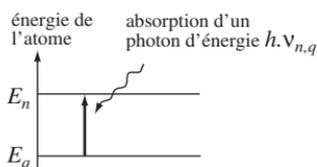


Fig. 13-3

3. Cas de l'atome d'hydrogène

● L'atome d'hydrogène est le plus simple de tous (un seul électron). Il est formé d'un proton autour duquel gravite un électron. Il possède une énergie potentielle E_p qui est choisie conventionnellement nulle lorsque l'électron est à une distance infinie du noyau.

Il possède une énergie cinétique E_c car l'électron est en mouvement. Son énergie totale est $E = (E_p + E_c) \leq 0$.

● On numérote ses niveaux d'énergie par valeurs croissantes E_1, E_2, \dots

Ils sont donnés par la formule générale : $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$, avec E_n en eV

(1eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J) et n le nombre quantique principal, indiquant aussi le numéro de la couche électronique sur laquelle se situe l'électron.

● Si $n = 1$, l'atome est dans son état fondamental : $T = 0$ K, sa structure électronique est K(1).

Si $n > 1$, l'atome est dans un état excité : $T > 0$ K, par exemple sa structure électronique est L(1).

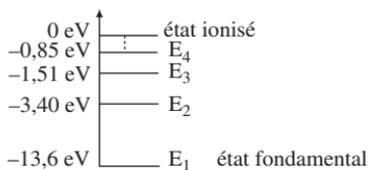


Fig. 13-4

● Un atome excité a tendance à revenir dans son état fondamental en effectuant des transitions par différents niveaux intermédiaires et en émettant à chaque fois un photon d'énergie correspondante.

● Toutes les raies du spectre d'émission d'un atome peuvent être classées en séries. Une série est constituée des raies aboutissant à un même niveau d'énergie (série de Lyman...).

4. Interaction photon-matière

● L'énergie d'ionisation $E_{\text{ionisation}}$ est l'énergie à fournir à un atome dans son état fondamental pour que son électron périphérique arrive à l'infini avec une vitesse nulle. Pour l'hydrogène : $E_{\text{ionisation}} = 13,6$ eV.

● Si on envoie un photon de fréquence $h \cdot \nu$ sur un atome dans son état fondamental, deux cas peuvent se présenter :

a) si $h \cdot \nu < E_{\text{ionisation}}$, alors le photon est absorbé s'il apporte exactement l'énergie correspondant à une transition, sinon il est simplement diffusé ;

b) si $h \cdot \nu \geq E_{\text{ionisation}}$, alors le photon est toujours absorbé, l'atome est ionisé et l'électron périphérique est éjecté avec une énergie cinétique $E_c = E_{\text{ionisation}} - h \cdot \nu$.

5. Généralisation

● Dans les noyaux atomiques l'énergie est aussi quantifiée.

● Alors que les photons intervenant lors des transitions électroniques (accompagnant les réactions chimiques) ont des énergies de l'ordre de l'eV, les photons accompagnant les réactions nucléaires ont des énergies de l'ordre du MeV.