

MATHÉMATIQUES

Terminale S

v 10/10

PRIMAIRE
COLLÈGE
LYCÉE
SUPÉRIEUR

complétude 
soutien scolaire

donner envie d'apprendre

Sommaire

Partie A :	Résumés de cours	3
Chapitre I :	Limites et continuité de fonctions	4
I.	Limites et comportements asymptotiques	4
II.	Continuité	12
Chapitre II :	Dérivation et étude de fonctions	15
I.	Dérivation	15
II.	Etude de fonctions	19
Chapitre III :	Exponentielle, logarithme, puissance	22
I.	Fonction exponentielle	22
II.	Fonction logarithme	24
III.	Fonction puissance	26
IV.	Croissance comparée	27
Chapitre IV :	Intégrales, primitives, équations différentielles	29
I.	Intégrales	29
II.	Primitives	32
III.	Calcul d'intégrales	34
IV.	Equations différentielles	35
Chapitre V :	Suites numériques	37
I.	Généralités	37
II.	Raisonnement par récurrence	39
III.	Limites et convergence	39
Chapitre VI :	Dénombrements, probabilités et lois de probabilité	44
I.	Dénombrements	44
II.	Probabilités	49
III.	Lois de probabilité	53
Chapitre VII :	Les nombres complexes	55
I.	Présentation des nombres complexes	55
II.	Module d'un nombre complexe	57
III.	Equation du second degré	60
IV.	Nombres complexes et géométrie plane	61
Chapitre VIII :	Géométrie dans l'espace	64
I.	Produit scalaire dans l'espace	64
II.	Barycentre	67
III.	Droites de l'espace	68
IV.	Plans de l'espace	69
Chapitre IX :	Arithmétique (spécialité)	71
I.	Divisibilité dans \mathbb{Z}	71
II.	Les congruences	72
III.	Les nombres premiers	72
IV.	PGCD et PPCM	74
Chapitre X :	Sections planes de surfaces (spécialité)	76

I. Cylindre de révolution	76
II. Cône de révolution	78
III. Surface d'équation $z = x^2 + y^2$	79
IV. Surface d'équation $z = x y$	80
Chapitre XI : Similitudes planes (specialité)	82
I. Généralités	82
II. Similitudes	83
III. Similitude directe ou indirecte	84
Partie B : Enoncés des exercices	87
Chapitre I : Limites et continuité de fonctions	88
Chapitre II : Dérivation et étude de fonctions	91
Chapitre III : Exponentielle, logarithme, puissance	96
Chapitre IV : Intégrales, primitives, équations différentielles	100
Chapitre V : Suites numériques	107
Chapitre VI : Dénombrements, probabilités et lois de probabilité	113
Chapitre VII : Les nombres complexes	119
Chapitre VIII : Géométrie dans l'espace	124
Chapitre IX : Arithmétique (spécialité)	129
Chapitre X : Sections planes de surfaces (spécialité)	133
Chapitre XI : Isométries planes (spécialité)	136
Préparation au Bac	141
Partie C : Correction des exercices	145
Chapitre I : Limites et continuité de fonctions	146
Chapitre II : Dérivation et étude de fonctions	146
Chapitre III : Exponentielle, logarithme et puissance	147
Chapitre IV : Intégrales, primitives, équations différentielles	148
Chapitre V : Suites numériques	149
Chapitre VI : Dénombrements, probabilités et lois de probabilité	150
Chapitre VII : Nombres complexes	151
Chapitre VIII : Géométrie dans l'espace	151
Chapitre IX : Arithmétique (spécialité)	152
Chapitre X : Sections planes de surfaces (spécialité)	153
Chapitre XI : Similitudes planes (spécialité)	153

Partie A : RESUMES DE COURS

I. LIMITES ET COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

1° Limite en l'infini

a - Limite infinie en l'infini

Si, quand x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), $f(x)$ devient toujours plus grand en valeur absolue, on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers plus (ou moins) l'infini, est plus (ou moins) l'infini.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Exemples : $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = -x$, $f(x) = -x^3$.

b - Limite finie en l'infini

Si, quand x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), $f(x)$ devient de plus en plus proche d'un réel L , on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers plus (ou moins) l'infini est L .

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.

2° Limite en un point

a - Limite infinie en a

Si, quand x tend vers a , $f(x)$ devient toujours plus grand en valeur absolue, on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a , est plus (ou moins) l'infini.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Exemples : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $a = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 0$.

b - Limite finie en a

Si, quand x tend vers a , $f(x)$ devient de plus en plus proche d'un réel L , on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a , est L .

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Exemple : $f(x) = 2x + 1$ en $a = 1$.

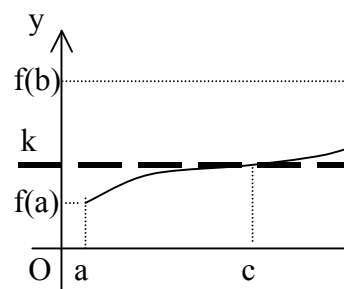
- Certaines fonctions n'admettent pas de limite. Par exemple les fonctions $x \rightarrow \cos x$ et $x \rightarrow \sin x$ n'admettent pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.
- Pour qu'une fonction f admette une limite en un réel a , il faut que f soit définie en a ou bien que a soit une borne de l'intervalle de définition de f .
- Pour qu'une fonction f admette une limite à l'infini, il faut nécessairement que f soit définie au moins sur un intervalle du type $[m ; +\infty[$ ou $] -\infty ; m]$ (m un réel).

3° Limites des fonctions usuelles

a - Fonctions usuelles

Les résultats suivants sont très souvent utilisés :

Si	$f(x) = x$ $f(x) = x^2$ $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ $f(x) = \sqrt{x}$	alors	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
Si	$f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	alors	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
Si	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$	alors	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$



4° Opérations algébriques sur les limites

Les limites peuvent être additionnées, multipliées ou divisées entre elles la plupart du temps sans problèmes.


Dans les paragraphes suivants, on considère deux fonctions f et g ayant respectivement une limite finie L et L' ou une limite infinie ($\pm \infty$) en a (où a est soit un réel, soit $\pm \infty$).

Le terme « *indéterminée* » signifie qu'il n'y a pas de règle générale permettant de conclure. Il convient alors de déterminer cette limite d'une autre façon, le plus souvent en tentant d'exprimer la fonction sous une autre forme. On dit que c'est une forme indéterminée.

a - Addition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de $f + g$ en ce même point ou à l'infini.


+		Lim g		
		L	$+\infty$	$-\infty$
Lim f	L'	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<i>indéterminée</i>
	$-\infty$	$-\infty$	<i>indéterminée</i>	$-\infty$



b - Multipliation

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de $f \times g$ en ce même point ou à l'infini.

×		Lim g			
		L	0	$+\infty$	$-\infty$
Lim f	L'	$L L'$	0	$+\infty$ si $L' > 0$ $-\infty$ si $L' < 0$	$-\infty$ si $L' > 0$ $+\infty$ si $L' < 0$
	0	0	0	<i>indéterminée</i>	<i>indéterminée</i>
	$+\infty$	$+\infty$ si $L > 0$ $-\infty$ si $L < 0$	<i>indéterminée</i>	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$ si $L > 0$ $+\infty$ si $L < 0$	<i>indéterminée</i>	$-\infty$	$+\infty$



c - Quotient

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de $\frac{f}{g}$ en ce même point ou à l'infini.

$\frac{\div}{\cdot}$		Lim f			
		$L \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
Lim g	$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$ si $L' > 0$ $-\infty$ si $L' < 0$	$-\infty$ si $L' > 0$ $+\infty$ si $L' < 0$
	0	$\pm\infty$	<i>indéterminée</i>	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$+\infty$	0	0	<i>indéterminée</i>	<i>indéterminée</i>
	$-\infty$	0	0	<i>indéterminée</i>	<i>indéterminée</i>



d - Formes indéterminées

Les formes indéterminées sont au nombre de 4 : « $+\infty - \infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $0 \times \infty$ ».



- Ils ne faut pas les confondre avec d'autres formes qui sont tout à fait connues telles que : « $\infty \times \infty = \infty$ », « $\frac{0}{\infty} = 0$ » et « $\frac{\infty}{0} = \infty$ ».
- Dans le cas d'indéterminations du type « $+\infty - \infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ », il faut dans la plupart des cas mettre le terme dominant en facteur.

Exemples : Les fonctions polynômes ou les fonctions rationnelles. On peut ainsi démontrer qu'en $\pm\infty$, **la fonction polynôme** a même limite que son terme de plus haut degré et **la fonction rationnelle** a même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

- Pour lever l'indétermination d'une expression (somme ou soustraction) contenant une racine carrée $\sqrt{\quad}$, il suffit dans la plupart des cas de multiplier par l'expression conjuguée.

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1) \times (\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

5° Théorèmes de comparaison

Les théorèmes suivants permettent de trouver la limite d'une fonction f (en un point a ou en $\pm \infty$) par comparaison à d'autres fonctions u, v, w, \dots dont on connaît la limite.

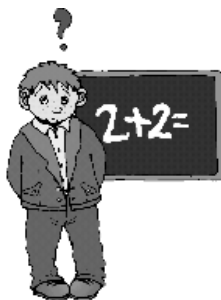
On désigne par ℓ un réel.

a - Théorème des gendarmes

- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour x proche de a et si u et v admettent la même limite ℓ en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

De même :

- Si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ pour x proche de a et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.



Exemple : Limite en $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

Pour tout x réel : $-1 \leq \cos x \leq 1$ d'où : $\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b - Comparaison à l'infini

- Si $u(x) \leq f(x)$ pour x proche de a et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq u(x)$ pour x proche de a et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

6° Limite d'une fonction composée

Soient a, b et ℓ désignant des réels ou $\pm \infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$.



Exemple : Etude de la limite en 0 de la fonction $f : x \rightarrow \frac{\sin(2x)}{x}$.

Pour tout x non nul, f s'écrit : $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} = 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x}$.

On applique le théorème : $\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$,

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

7° Limites à gauche et à droite

a - Définition et notation

On dit que f admet ℓ (fini ou infini) comme **limite à gauche** en a (a réel), si la restriction de $f(x)$ à $] -\infty ; a]$ ou $] -\infty ; a [$ admet ℓ comme limite en a . On note : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \leq a}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$.

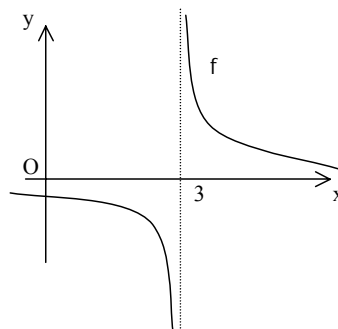
On définit de même la **limite à droite** et on note : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \geq a}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$.

Exemple :

La fonction f définie pour $x \neq 3$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \text{ n'a pas de limite en } 3.$$

On dit que f admet $-\infty$ comme limite à gauche et $+\infty$ comme limite à droite.



b - Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soient a un élément de I ou une borne de I et ℓ désignant un réel ou $\pm\infty$.

Si f est telle que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$, alors f admet ℓ comme limite en a .

8° Asymptote à une courbe et branche parabolique

On considère une fonction f définie sur un intervalle I . Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a - Asymptote à une courbe

 Asymptote verticale

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (a réel), alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f .

Exemple : Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, alors $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à C_f au voisinage de $+\infty$.

Asymptote horizontale

Dans le cas où la fonction admet une limite finie L quand x tend vers l'infini, on observe que la courbe représentative de la fonction se rapproche toujours davantage d'une droite horizontale sans jamais la toucher. **On dit que la courbe de la fonction admet une asymptote horizontale.**

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ (ℓ réel), alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à C_f .

Exemple : Si $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. La droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$. On remarquera qu'elle est aussi asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$.

Asymptote oblique

Soient a et b deux réels. Si $f(x) = ax + b + \phi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f .

Exemple : Soit $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x} = 2x + 1 + \frac{1}{x}$. On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Donc la droite d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à C_f .

b - Branche parabolique

Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, trois cas peuvent se présenter :

Branche parabolique de direction (Oy)


Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique de direction (Oy).

Exemple : la fonction $x \rightarrow x^2 - \frac{1}{x}$

Branche parabolique de direction (Ox)

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique de direction (Ox)

Exemple : la fonction $x \rightarrow 3\sqrt{x} + 1$

 Branche parabolique de direction $y = ax$

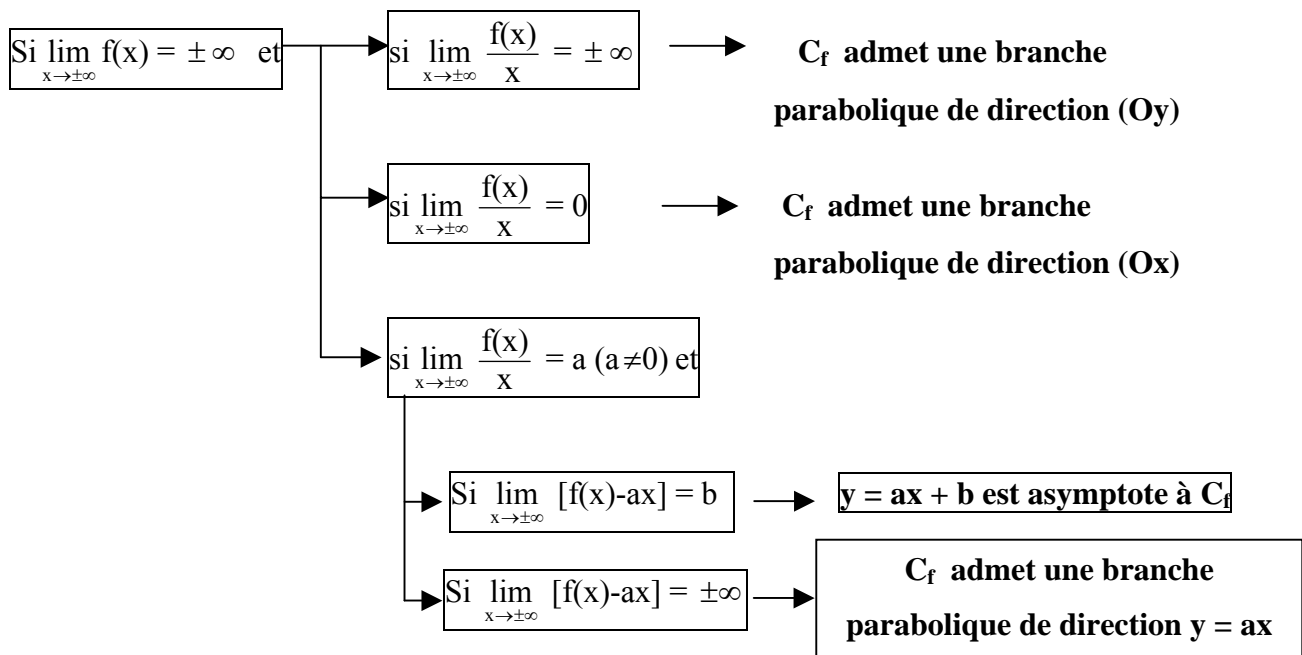
Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (a réel non nul) et si la courbe C_f n'admet pas d'asymptote, alors C_f admet une branche parabolique de direction $y = ax$.

Exemple : la fonction $x \rightarrow 2x + \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction $y = 2x$.

c - En conclusion

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ (a réel) \rightarrow $x = a$ asymptote verticale à C_f

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ (l réel) \rightarrow $y = l$ est une asymptote horizontale à C_f



d - Position de la courbe par rapport à l'asymptote

Soient C_f la représentation graphique d'une fonction f d'équation $f(x)$ et C_g la représentation graphique d'une fonction g d'équation $g(x)$.

Pour étudier la position de la courbe C_f par rapport à C_g (au dessus ou au dessous), il suffit d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$. On notera que une des deux courbes peut être asymptote de l'autre.

- Si $f(x) - g(x) \geq 0$ alors C_f se trouve **au dessus de** C_g sur l'intervalle donné.
- Si $f(x) - g(x) \leq 0$ alors C_f se trouve **au dessous de** C_g sur l'intervalle donné.
- Si $f(x) = g(x)$ alors C_f est **confondue** avec C_g sur l'intervalle donné.

II. CONTINUITÉ

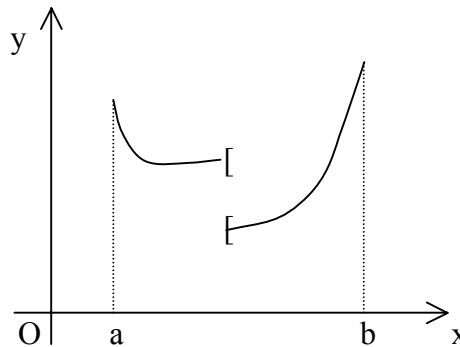
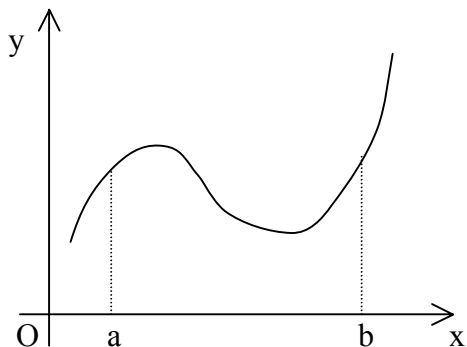
1° Définition d'une fonction continue

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a .

- f est **continue en un point a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- f est **continue sur l'intervalle I** si f est continue en tout point a de I .

Graphiquement, dire que f est continue sur I signifie que sa représentation graphique ne présente aucun point de rupture sur I : on peut la tracer « sans lever le crayon ».

Exemples :



Cette fonction est continue sur $[a; b]$

Cette fonction n'est pas continue sur $[a; b]$

Propriétés :

- Toute fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur \mathbb{R} .
- La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

2° Opérations sur les fonctions continues

Si u et v sont continues sur I , alors $u + v$, $u \times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur I .

$\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.

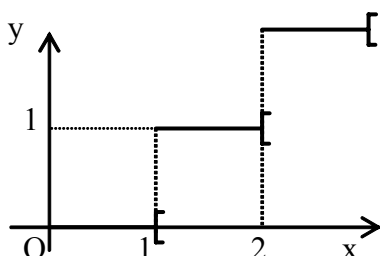
Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue en a .

3° Exemple de fonction non continue : la fonction partie entière

La partie entière de x , notée $E(x)$ est définie de la façon suivante :

Si $x \in [n; n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, alors $E(x) = n$.

Représentation graphique :

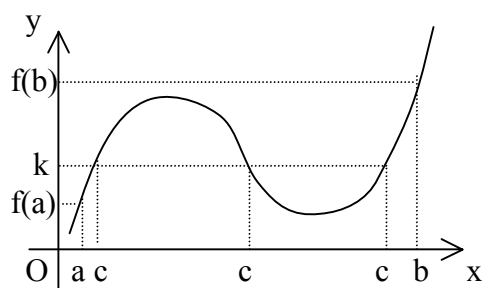


La fonction $E(x)$ est continue sur l'intervalle $[0,1[$, mais n'est pas continue sur l'intervalle $[0,2[$.

4° Théorème des valeurs intermédiaires

a - Énoncé

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Soient a et b deux réels dans I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

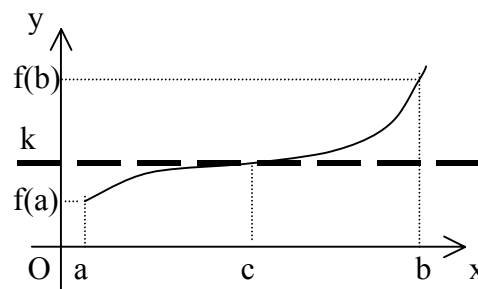


Ce théorème est utilisé pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type : $f(x) = k$.

b - Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue **strictement monotone** sur $[a ; b]$ (c'est à dire si $f'(x) > 0$ pour tout x de $[a ; b]$ ou si $f'(x) < 0$ pour tout x de $[a ; b]$), alors :

- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution c dans $[a ; b]$.
- L'image de $[a ; b]$ par f est l'intervalle $[f(a) ; f(b)]$. La fonction f réalise en fait une bijection de $[a ; b]$ sur $[f(a) ; f(b)]$ si f est croissante (ou $[f(b) ; f(a)]$ si f est décroissante) .



Remarque : On admet que ce théorème se prolonge au cas où f est définie sur un intervalle ouvert $]a ; b[$ (a et b finis ou infinis) ou semi-ouvert $]a ; b]$ ou $[a ; b[$, dans le cas où les limites de f aux bornes de l'intervalle sont connues.



Ce théorème est utilisé pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.

On peut ensuite calculer une valeur approchée de l'équation $f(x) = k$ par dichotomie ou balayage avec la calculatrice.

Théorème de la bijection réciproque:

Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur un intervalle $J = f(I)$. La bijection réciproque f^{-1} est aussi continue sur J et est monotone et de même sens de variation que f .

De plus, les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

Chapitre II : DERIVATION ET ETUDE DE FONCTIONS

I. DERIVATION

1° Nombre dérivé et fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un point de I .

a - Fonction dérivable

On dit que f est **dérivable en x_0** si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

La fonction : $h \rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ tend vers un réel L quand h tend vers 0 .

La fonction : $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers un réel L quand x tend vers x_0 .

Si la fonction f est dérivable en tout point x_0 de l'intervalle I , on dit que la fonction f est dérivable sur I .

b - Nombre dérivé

Le réel L défini au paragraphe précédent est appelé le **nombre dérivé de la fonction f en a** et est noté : $f'(x_0)$. On note ainsi :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lorsque les expressions de f sont différentes suivant que $x \geq x_0$ ou $x \leq x_0$, on cherche les **limites de** $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0 en restant positif et lorsque h tend vers 0 en restant négatif. Ces limites, lorsqu'elles existent et sont finies, sont appelées respectivement **nombre dérivés à droite et à gauche** au point x_0 . Si en un point x_0 le nombre dérivé à droite est différent du nombre dérivé à gauche, la fonction n'est pas dérivable en ce point.

Exemple : La fonction valeur absolue d'équation $f(x) = |x|$ est définie sur \mathbb{R} . On a $f(x) = -x$ sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$ et $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$. On obtient par calcul de limites : $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = +1$. Ainsi la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 .

c - Fonction dérivée

On définit sur I la fonction $f' : x \rightarrow f'(x)$. Cette fonction f' est appelée **la fonction dérivée de la fonction f sur I** .

2° Dérivées de fonctions usuelles

Le tableau donne la dérivée des fonctions les plus courantes :

Fonction	Dérivable sur I	Fonction dérivée
$f(x) = k$ <i>k constante réelle</i>	$I =]-\infty ; +\infty [$	$f'(x) = 0$
$f(x) = a x + b$ <i>a et b constants</i>	$I =]-\infty ; +\infty [$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$ <i>n entier relatif</i>	$I =]-\infty ; +\infty [$ si $n \geq 0$ $I =]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$ si $n < 0$	$f'(x) = n x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$I =]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$I =] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin(x)$	$I =]-\infty ; +\infty [$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$I =]-\infty ; +\infty [$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan x$	$I = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{N} \right\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

3° Dérivées et opérations

Dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables.

Opération	Fonction	Dérivée
Somme de fonctions	$u + v$	$u' + v'$
Produit par a réel	$a \times u$	$a \times u'$
Fonction à la puissance n	u^n ($n \in \mathbb{Z}$)	$n u' u^{n-1}$ (pour $u(x) \neq 0$ lorsque $n < 0$)
Produit de fonctions	$u v$	$u' v + u v'$
Inverse d'une fonction	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
Quotient de fonctions	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Racine carrée	\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (pour $u(x) > 0$)

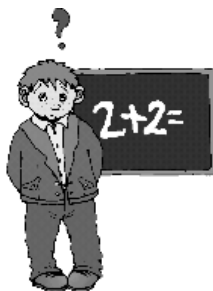
4° Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J . Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I , $v(x)$ appartient à J .

La fonction $f : x \rightarrow u(v(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I on a :

$$f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$$

Ce théorème permet de calculer la dérivée d'une fonction $x \rightarrow u(v(x))$ quand on sait calculer les dérivées de u et de v .



Exemple : Fonction dérivée de $u : x \rightarrow \cos(x^2)$.

La fonction $x \rightarrow x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $f'(x) = 2x$.

La fonction $x \rightarrow \cos x$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $f'(x) = -\sin x$.

La fonction $u = g \circ f$ est donc dérivable sur \mathbb{R} , de fonction dérivée :

$$u'(x) = g' \circ f(x) \times f'(x) = -\sin(x^2) \times 2x = -2x \sin(x^2)$$

5° Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

f' est la fonction dérivée première de f . On peut aussi la noter : $\frac{df}{dx}$ ou $f^{(1)}$.

Si f' est dérivable sur un intervalle I , alors f'' est la fonction dérivée seconde de f . On peut aussi la noter : $\frac{d^2 f}{dx^2}$ ou $f^{(2)}$.

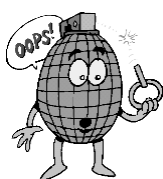
Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur intervalle I , alors $f^{(n)}$ est la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ de f . On peut aussi la noter : $\frac{d^n f}{dx^n}$.

6° Dérivabilité et continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a .

Si f est **dérivable en a** alors f est **continue en a** .

Si f est **dérivable sur I** alors f est **continue sur I** .



ATTENTION : La réciproque est fautive. La continuité d'une fonction n'implique pas sa dérivabilité.

Exemple :

La fonction valeur absolue est continue en 0 mais non dérivable en 0.

7° Tangente à une courbe

Soit a un point de D domaine de définition de la fonction f . On suppose que f admet le nombre dérivé $f'(a)$ au point a .

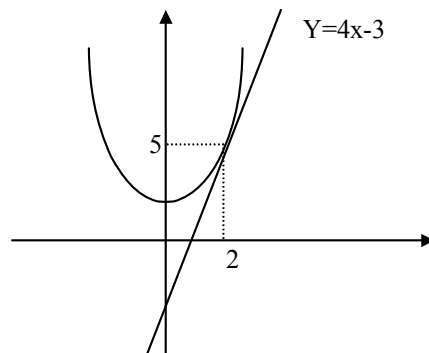
On appelle **tangente au point $A(a, f(a))$ de la courbe C_f** (représentation graphique de la fonction f) la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Son équation est : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$



Exemple :

La fonction $x \rightarrow x^2 + 1$ admet la droite d'équation $y = 4x - 3$ comme tangente au point d'abscisse $x = 2$.



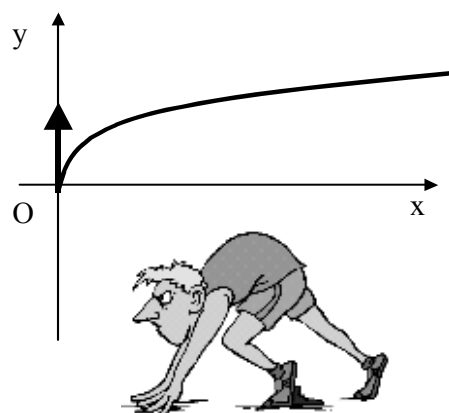
Remarques :

- Si f n'admet qu'un nombre dérivé à droite $f'_d(a)$ en a , C_f admet alors une **demi-tangente à droite au point $A(a, f(a))$** d'équation : $y - f(a) = f'_d(a) \times (x - a)$ pour $x \geq a$.
- Si f n'admet qu'un nombre dérivé à gauche $f'_g(a)$ en a , C_f admet alors une **demi-tangente à gauche au point $A(a, f(a))$** d'équation : $y - f(a) = f'_g(a) \times (x - a)$ pour $x \leq a$.
- Si f n'est pas dérivable en a et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm \infty$ alors C_f admet **au point $A(a, f(a))$ une tangente verticale.**

Exemple :

La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 mais

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$ donc sa représentation graphique admet une tangente verticale qui est l'axe des ordonnées.



8° Approximation affine

Si f est dérivable en a , on peut écrire $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$, où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

On dit que $f(a) + hf'(a)$ est une approximation affine locale de $f(a+h)$. De plus, il s'agit de la meilleure approximation de ce genre.

Localement, on peut remplacer la fonction f par la fonction affine représentée par la tangente (T), c'est à dire qu'on peut remplacer $f(a+h)$ par $f(a) + hf'(a)$ lorsque h est voisin de zéro.

II. ETUDE DE FONCTIONS

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction f définie sur un ensemble de \mathbb{R} noté D_f . On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1° Domaine de définition

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Une fonction de I dans \mathbb{R} associe à tout réel x un réel unique, noté $f(x)$, **image** de x par f . x est **antécédent** de $f(x)$.

Souvent I n'est pas donné explicitement, et seule l'expression de $f(x)$ est disponible. On cherche alors pour quelles valeurs de x cette expression a un sens (dénominateurs non nuls, quantités sous les racines positives...).

L'ensemble de ces valeurs, pour lesquelles on peut calculer $f(x)$, est appelé **domaine de définition de f** , et est noté D_f .

2° Parité, Périodicité

f est paire	\Leftrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } x \text{ dans } D_f, -x \text{ est dans } D_f \\ \text{et } f(-x) = f(x) \end{array} \right.$
f est impaire	\Leftrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } x \text{ dans } D_f, -x \text{ est dans } D_f \\ \text{et } f(-x) = -f(x) \end{array} \right.$
f est périodique de période T	\Leftrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } x \text{ dans } D_f, x+T \text{ est dans } D_f \\ \text{et } f(x+T) = f(x) \end{array} \right.$

Si f est **paire**, sa courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Si f est **impaire**, sa courbe est **symétrique par rapport à l'origine** du repère.

Si f est **périodique** de période T , sa **courbe est invariante par toute translation** de vecteur $(kT, 0)$ où k est un entier relatif.

De plus, si une fonction est paire ou impaire, on peut limiter l'étude à \mathbb{R}^+ , le reste se déduisant par symétrie. Et si elle est périodique de période T , on peut se limiter à un intervalle quelconque de largeur T .

3° Sens de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur un **intervalle** I .

$f'(x) = 0$ pour tout x de I	\Leftrightarrow	f constante sur I .
$f'(x) \geq 0$ pour tout x de I	\Leftrightarrow	f croissante sur I .
$f'(x) \leq 0$ pour tout x de I	\Leftrightarrow	f décroissante sur I .

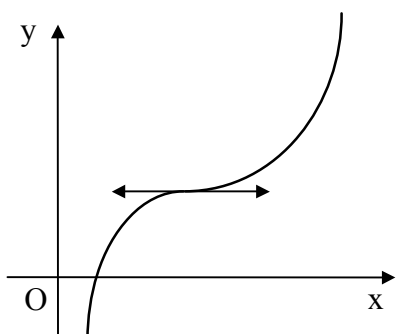
Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I alors f est strictement croissante sur I .
Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I alors f est strictement décroissante sur I .
(vrai aussi si $f'(x)$ s'annule en un nombre fini de points de I)

4° Extremum

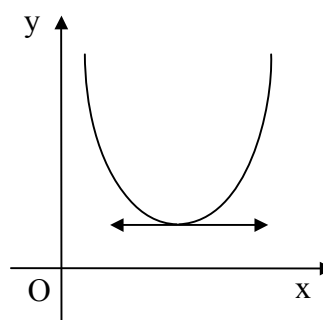
Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en x_0 élément de I , alors f admet un extremum en x_0 .
--

Dans tous les cas, si $f'(x_0) = 0$, la courbe représentative de la fonction admet une **tangente horizontale**.

$f'(x) = 0$ mais pas d'extremum :



$f'(x) = 0$ et minimum :



5° Représentation graphique

On appelle représentation graphique de f dans un repère donné, l'ensemble C des points $M(x, y)$ tels que :

Cette courbe permet d'avoir instantanément sous les yeux le comportement général de f (positive, négative, croissante, décroissante, nombre et valeur approximative des solutions des équations $f(x) = m \dots$).

6° Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f , les énoncés des exercices vous guideront pour effectuer les étapes suivantes (certaines pouvant ne pas être traitées) :



- 1- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2- Etudier la parité et la périodicité de la fonction f , le cas échéant, réduire le domaine d'étude de la fonction et en déduire des propriétés géométriques de C_f .
- 3- Calculer la dérivée de f sur les intervalles où elle existe. Déterminer le signe de la dérivée.
- 4- Etablir le tableau de variation de f . Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
- 5- Si l'énoncé le demande, étudier les éventuelles asymptotes et branches paraboliques de f .
- 6- Tracer la courbe représentative de f à l'aide de quelques points et tangentes remarquables, utiliser les éventuelles propriétés géométriques vues aux étapes 2 et 5.

Remarque : Ceci est un plan d'étude indicatif. Les exercices d'étude d'une fonction ne respectent pas toujours ces étapes. Il vous faut dans tous les cas respecter les consignes de l'exercice et répondre uniquement aux questions posées.

Chapitre III : EXPONENTIELLE, LOGARITHME, PUISSANCE

I. FONCTION EXPONENTIELLE

1° Fonction exponentielle de base e

a - Définition

On appelle **exponentielle de base e** la fonction définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} telle que :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note $f(x) = \exp(x)$

b - Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle : Pour tous réels a et b, on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

Conséquences :

$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^a)^n = e^{a \cdot n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(e^a)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{a}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

c - Etude de la fonction exponentielle

La fonction exp est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $(\exp(x))' = \exp(x)$

De plus, $\exp(x) > 0$ pour tout x donc la fonction exp est **continue** et **strictement croissante** sur \mathbb{R} . Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$.

$$\exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b \quad \text{et} \quad \exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b.$$

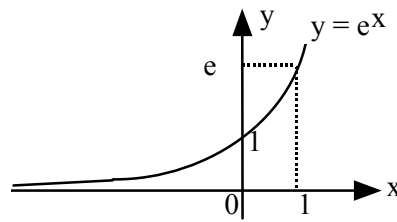
L'image de 1 par la fonction exponentielle est unique et est noté e ($\exp(1) = e^1 = e$). Ce **nombre e** est un nombre irrationnel proche de 2,718 appelé nombre de Néper.

On adopte alors la notation **$\exp(x) = e^x$** .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		+		
exp				



d - Formes indéterminées

Il y a trois formules de formes indéterminées à connaître :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



e - Fonction e^u , où u est une fonction

Si u est une fonction dérivable et strictement positive :

$$\boxed{(\exp u)' = u' \cdot \exp u}$$

2° Fonction exponentielle de base a

On appelle **exponentielle de base a** ($a > 0$) la fonction, notée a^x , définie sur \mathbb{R} par :

$$a^x = e^{x \ln(a)} \quad (a^x \text{ se lit « a puissance x »}).$$

Cette définition est cohérente avec les notations « puissance » qui ont été introduites pour la fonction exponentielle de base e.

De plus, la fonction exponentielle de base a, $a > 0$, donne un sens à des expressions telles que :

$$2^{1,8}, 5^{-\sqrt{2}}, \pi^e, 2^\pi, \dots$$

Les règles de calcul connues dans le cas d'exposants entiers s'étendent aux exposants réels non entiers.

Soient les réels $a > 0$, $a' > 0$, b et b' :

$$(a^b)^{b'} = a^{b \cdot b'}$$

$$\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$$

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$$

$$(a \cdot a')^b = a^b \cdot a'^b$$

$$a^b \cdot a^{b'} = a^{b+b'}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

Remarque : La racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre correspond à une puissance réelle (voir paragraphe III pour la définition de la fonction puissance).

En effet : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

II. FONCTION LOGARITHME

1° Fonction logarithme népérien

a - Définition

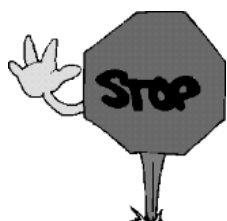
On sait que la fonction exponentielle réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$.

Autrement dit, pour tout $k \in]0; +\infty[$, l'équation $e^x = k$ admet une solution unique dans \mathbb{R} .

Cette solution est appelée logarithme népérien de k , et noté $\ln(k)$. Autrement dit :

La fonction **logarithme népérien**, notée **ln** est la fonction qui à tout réel $x > 0$ associe le réel $\ln(x)$ dont l'exponentielle est x . Elle est donc définie sur $]0; +\infty[$.

$\ln(1)=0$ car $e^0=1$ et $\ln(e)=1$ car $e^1=e$.



La fonction **logarithme népérien** est définie sur $]0; +\infty[$. Il ne faut pas prendre le logarithme d'un nombre sans vérifier au préalable qu'il est **strictement positif**.

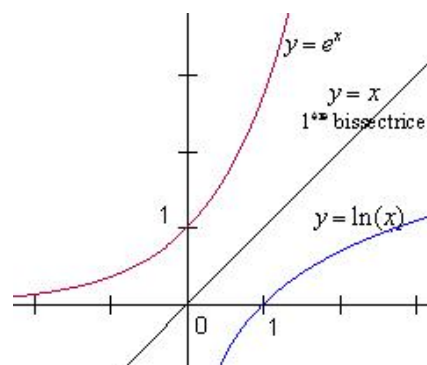
b - Liens avec la fonction exponentielle

On a l'équivalence :

$$\begin{cases} y = e^x \\ y > 0, x \text{ réel} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0, x \text{ réel} \end{cases}$$

Autrement dit, les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions $f: x \mapsto \ln(x)$ et $g: x \mapsto e^x$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$ (première bissectrice).

On dit que la fonction \ln est la **bijection réciproque** définie sur $]0; +\infty[$ de la fonction \exp .



c - Propriétés algébriques

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et pour tout entier relatif p , on a :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^p) = p \times \ln(a) \qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

Equation fonctionnelle : Pour tous réels a et b , on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

d - Etude du logarithme népérien

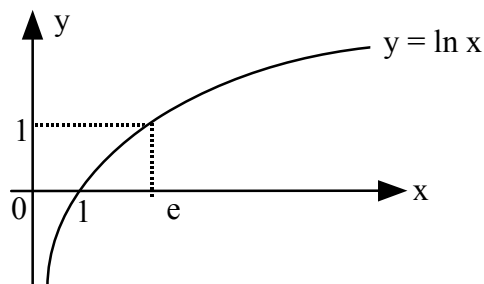
La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, de fonction dérivée $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ donc la fonction \ln est **continue** et **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

$$\ln(x) < 0 \text{ si } x < 1 \quad \text{et} \quad \ln(x) > 0 \text{ si } x > 1$$

$$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b \quad \text{et} \quad \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



e - Formes indéterminées

Il y a trois formules de formes indéterminées à connaître :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$



f - Fonction $\ln(u)$, où u est une fonction

Si u est une fonction dérivable et strictement positive alors :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

2° Fonction logarithme de base a

On appelle **logarithme de base a** ($a > 0$ et $a \neq 1$) la fonction Log_a , définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Comme $\ln(e) = 1$, le logarithme népérien est donc le logarithme de base e. Les propriétés de \log_a sont les suivantes :

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x \ln(a)} \quad \text{pour } x > 0$$



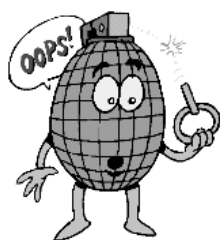
La fonction log vue en physique ou en chimie correspond à la fonction logarithme de base 10 (ou décimal) soit \log_{10} .

III. FONCTION PUISSANCE

1° Définition

On appelle fonction **puissance a** la fonction $x \rightarrow x^a = e^{a \ln(x)}$ (a non nul), définie (et continue) sur $]0; +\infty[$.

ERREUR A NE PAS COMMETTRE



Il ne faut pas confondre :

Fonction exponentielle de base a
 $a^x = e^{x \ln(a)}$

et

Fonction puissance a
 $x^a = e^{a \ln(x)}$

2° Propriétés algébriques

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et pour tous réels a et b, on a :

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$\left(x^a\right)^b = x^{ab}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x y)^a = x^a y^a$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

3° Etude des fonctions puissances

a - Sens de variation

La fonction puissance $x \rightarrow x^a$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ de dérivée la fonction $x \rightarrow a x^{a-1}$

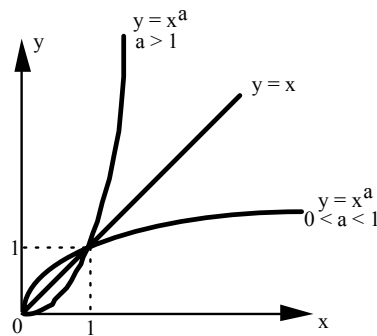
Si $a > 0$, alors f est **strictement croissante** et a pour limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$$

Si $a < 0$, alors f est **strictement décroissante** et a pour limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$$

b - Courbes représentatives pour $a > 0$



IV. CROISSANCE COMPAREE

1° Résultat fondamental

En ce qui concerne la croissance comparée en $+\infty$ des fonctions logarithme, exponentielle et puissance, le théorème suivant permet de retrouver tous les cas.

$$\text{Pour tout entier } n \geq 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

2° Interprétation du théorème

Les fonctions exponentielles « l'emportent » sur les fonctions puissances et les fonctions puissances « l'emportent » sur les fonctions logarithmes.

$$\ll e^x \gg \text{ l'emporte sur } \ll x^n \gg \text{ qui l'emporte sur } \ll \ln(x) \gg$$

3° Applications

Voici quelques résultats utiles issus du théorème précédent :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \ln(x) = 0, \quad \alpha > 0$$

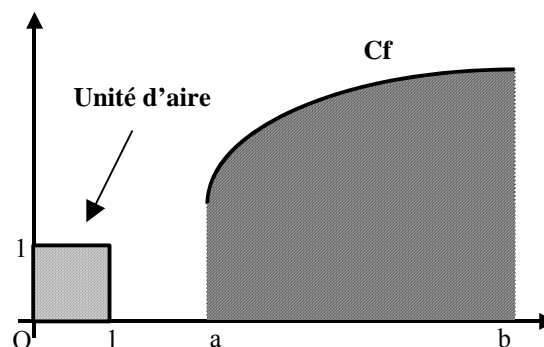
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0, \quad \alpha > 0$$

I. INTEGRALES

1° Fonction continue positive

a - Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \leq b$. Dans un repère orthonormal, l'**intégrale de a à b** de la fonction f correspond à l'aire (en unité d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



L'**intégrale (ou somme) de a à b de f** est notée : $\int_a^b f(x)dx$.

b - Exemple de calcul d'une aire

Si le repère est orthogonal avec comme unités graphiques 2 cm en abscisses et 3 cm en ordonnées, l'unité d'aire fait : $2 \times 3 \text{ cm}^2$.

Soit la fonction f continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \leq b$. L'aire A de la surface du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \left(\int_a^b f(x)dx \right) \times (2 \times 3 \text{ cm}^2) = (6 \int_a^b f(x)dx) \text{ cm}^2$$

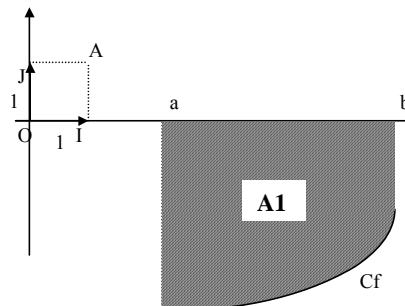
2° Fonction continue de signe quelconque

a - Fonction de signe négatif

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \leq b$.

On appelle intégrale de a à b le réel :

$$\int_a^b f(x)dx = - \text{Aire du domaine } A1.$$

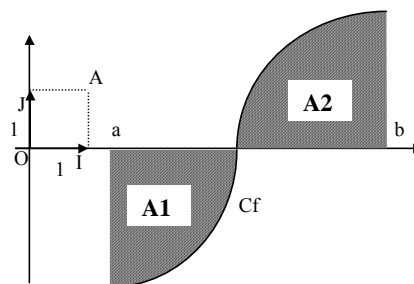


b - Fonction de signe quelconque

Soit f une fonction continue et de signe quelconque sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \leq b$.

On appelle intégrale de a à b le réel :

$$\int_a^b f(x)dx = - \text{Aire du domaine } A1 + \text{Aire du domaine } A2.$$



c - Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$.

Il existe un réel c entre a et b tel que : $\int_a^b f(x)dx = (b - a) \times f(c)$.

On appelle **valeur moyenne de f sur $[a,b]$** le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

3° Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Soient a , b et c trois réels de I .

a - Variables muettes

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$. Les lettres x , t et u sont des variables muettes.

b - Propriétés algébriques

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Si f est **paire**, alors :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx .$$

Si f est **impaire**, alors :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 .$$

Si f est **périodique de période T** sur \mathbb{R} , alors :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx .$$

c - Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

d - Linéarité de l'intégrale

Soient α et β deux réels.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

e - Positivité de l'intégrale

Si pour tout x de $[a, b]$: $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

f - Intégration d'une inégalité

Si pour tout x de $[a, b]$: $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

4° Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soient a et b deux réels de I .

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de $[a, b]$, on ait :

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{alors} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

S'il existe un réel M tel que pour tout x de $[a, b]$, on ait :

$$|f(x)| \leq M \quad \text{alors} \quad \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M \times (b-a)$$

II. PRIMITIVES

1° Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x de I :

$$F'(x) = f(x).$$

Exemple : Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \rightarrow x^3$ est la fonction $F : x \rightarrow \frac{1}{4}x^4$.

2° Théorèmes

Soit f une fonction dérivable sur I admettant F comme primitive sur I , alors **f admet une infinité de primitives.**

Les autres primitives de f sur I sont définies par **$G : x \rightarrow F(x) + k$** où k est une constante réelle.

Soient f une fonction admettant des primitives sur I , x_0 un élément de I et y_0 un réel. Il existe une **unique primitive F de f sur I telle que : $F(x_0) = y_0$.**

3° Primitives d'une fonction continue

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et soit a un réel de I . Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f telle que $F(a) = 0$.

4° Primitives de fonctions usuelles

Soit k un réel.

Fonction	Primitives	Commentaires
a (a constante réelle)	$ax + k$	sur \mathbb{R}
x^n (n entier relatif, $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	sur \mathbb{R} si $n \in \mathbb{N}$ sur $] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$ si $n < -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$	sur $] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	sur $] 0 ; +\infty [$
$\sin x$	$-\cos x + k$	sur \mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x + k$	sur \mathbb{R}
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + k$	sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + q\pi \right\}$, q entier relatif
e^x	$e^x + k$	sur \mathbb{R}

5° Opérations algébriques

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Fonction	Une primitive	Commentaires
au' (a réel)	au	
$u' + v'$	$u + v$	
$u'u^n$ (n entier relatif, $n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	sur tout intervalle où $u(x) \neq 0$ si $n < -1$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$ si $u(x) > 0$ $\ln(-u)$ si $u(x) < 0$	
$u' e^u$	e^u	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	sur tout intervalle où $u(x) > 0$
$u'(ax+b)$ $a \neq 0$	$\frac{u(ax+b)}{a}$	
$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u$	

III. CALCUL D'INTEGRALES

1° Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b . Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \text{ (notation) où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

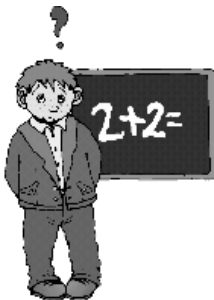
Exemple : $\int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$

2° Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$, admettant des dérivées f' et g' continues.

$$\int_a^b f(x) \times g'(x)dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \times g(x)dx$$

Exemple : Calcul de $I = \int_1^2 xe^x dx$



Posons $f(x) = x$ d'où $f'(x) = 1$
 $g'(x) = e^x$ $g(x) = e^x$

Les fonctions f' et g' sont continues. On fait donc une intégration par parties :

$$\int_1^2 xe^x dx = [xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - [e^x]_1^2 = e^2.$$

3° Calcul d'aires

Soient f et g deux fonctions continues sur I . Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

Si $f \geq g$ sur I alors l'aire A (en unités d'aire) de la surface du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f , la courbe représentative de la fonction g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))dx \right) \text{ en unités d'aire.}$$

IV. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1° Equation différentielle $y' = ay$ (a réel)

a - Définition

Une fonction solution sur un intervalle I de \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = ay$ est une fonction f , dérivable sur I telle que pour tout x de I : $f'(x) = af(x)$.

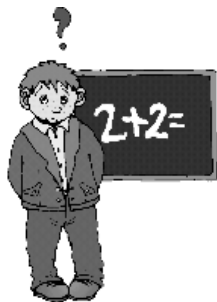
b - Fonctions solutions

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné) sont les fonctions : $x \rightarrow Ce^{ax}$ (où C est une constante réelle).

c - Unicité de la solution

Il existe une **unique solution** de l'équation différentielle $y' = ay$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0, y_0 réels donnés). L'unique solution est la fonction : $x \rightarrow y_0 e^{a(x-x_0)}$.

d - Exemple



Trouver la solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 2$.

On écrit d'abord l'équation sous la forme $y' = -2y$. Les solutions dans \mathbb{R} sont donc les fonctions $f_C(x) = Ce^{-2x}$ où C est un réel.

On sait qu'il existe une unique solution telle que : $f(0) = 2$.

Ainsi : $2 = Ce^0$ d'où $C = 2$.

En conclusion, la solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 2$ est d'équation : $f(x) = 2e^{-2x}$.

2° Equation différentielle $y' = ay + b$ (a et b réels)

a - Définition

Une fonction solution sur un intervalle I de \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est une fonction f , dérivable sur I telle que pour tout x de I : $f'(x) = af(x) + b$.

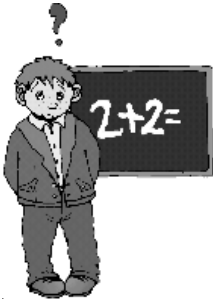
b - Fonctions solutions

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b réels donnés) sont les fonctions : $x \rightarrow Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ (où C est une constante réelle).

c - Unicité de la solution

Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0, y_0 réels donnés).

d - Exemple



Trouver la solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 2$ telle que $f(0) = 2$.

On écrit d'abord l'équation sous la forme $y' = -2y + 2$. Les solutions dans \mathbb{R} sont donc les fonctions $f_C(x) = C e^{-2x} + 1$ où C est un réel.

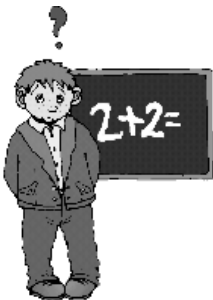
On sait qu'il existe une unique solution telle que : $f(0) = 2$.

Ainsi : $2 = C e^0 + 1$ d'où $C = 1$.

En conclusion, la solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 2$ telle que $f(0) = 2$ est d'équation : $f(x) = e^{-2x} + 1$

3° Equation différentielle du type $y' - ay = g(x)$

Bien que non au programme, ce type d'équation différentielle peut être étudié dans un exercice. Des indications sont alors données pour pouvoir résoudre l'exercice. On traite dans ce paragraphe un exemple.



Résolution de (E_1) : $y' - 2y = e^x$.

On vérifie que la fonction $h : x \rightarrow -e^x$ est solution de (E_1) :
 $h'(x) - 2h(x) = e^x$.

On a trouvé une solution particulière h de (E_1) .

Soit f une solution de (E_1) . Donc, pour tout réel x , on a :
 $f'(x) - 2f(x) = e^x$ et $h'(x) - 2h(x) = e^x$.

On remarque que :

$$\begin{aligned} f'(x) - 2f(x) = h'(x) - 2h(x) &\Leftrightarrow f'(x) - h'(x) - 2[f(x) - h(x)] = 0 \\ &\Leftrightarrow f - h \text{ est solution de } y' - 2y = 0 \end{aligned}$$

Si f est solution de (E_1) , on a vérifié que $f - h$ est solution de l'équation sans second membre $y' - 2y = 0$.

Or, les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{2x}$ (C constante réelle).
Donc les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \rightarrow Ce^{2x} - e^x$ (C réel).

Solutions de (E_1) = (Solution équation sans second membre) + (Solution particulière).

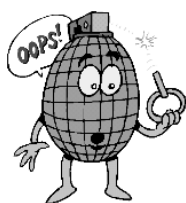
Si on cherche les solutions telles que $f(0) = 1$, on résout l'équation $1 = C e^0 - e^0$ d'où $C = 2$.

Donc la solution de (E_1) telle que $f(0) = 1$ est la fonction : $x \rightarrow 2e^{2x} - e^x$.

I. GENERALITES

1° Suite de nombres

Intuitivement, une suite de nombres réels est une **liste ordonnée** de nombres. Cela signifie que, parmi ces nombres il y a un premier terme, puis un deuxième, un troisième etc...



Généralement, on note u_0 le premier terme de la suite, puis u_1 le deuxième, u_2 le troisième... **Le $n^{\text{ième}}$ terme est donc u_{n-1} .**

Si le premier terme est u_1 , le $n^{\text{ième}}$ terme sera donc u_n .

Une suite est notée conventionnellement (u_n) . Construire une suite (u_n) , c'est associer à chaque entier naturel n un nombre réel noté u_n . Ce nombre est appelé **terme d'indice n de la suite (u_n) ou se lit « u indice n »**.

2° Modes de définition d'une suite

a - Suites définies explicitement

Une suite est définie explicitement si pour un n donné, on peut donner clairement la valeur de u_n .

Exemples :

- La suite (u_n) définie par : $u_n = f(n)$ avec f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 3$.
- La suite (v_n) définie par : $v_n = (-1)^n$
- La suite (I_n) définie par : $I_n = \int_a^b f_n(t)dt$ avec f_n la fonction définie par $f_n(x) = x^n$.

Ces suites définies à l'aide d'intégrales ne sont pas explicitement au programme mais un bon nombre d'exercices donnés au baccalauréat y font référence.

b - Suites définies par récurrence

Une suite est dite définie par récurrence lorsque chaque terme est calculé en fonction du ou des précédents. Il faut alors définir le ou les premiers termes et une formule permettant de calculer un terme en fonction des précédents.

Exemples :
$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 3 \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1} \end{array} \right.$$

3° Suites arithmétiques et géométriques

Parmi l'infinité des suites que l'on peut construire, nous nous intéressons particulièrement aux suites arithmétiques et géométriques.

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Formule explicite	$u_n = r \times n + u_0$	$u_n = u_0 \times q^n$
Relation entre u_n et u_p (n et p entiers)	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de N termes consécutifs	$N \times \frac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$	$1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{(1 - q^N)}{(1 - q)}$ ($q \neq 1$)

4° Sens de variation

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

a - Suites monotones

(u_n) est **monotone** si elle est **croissante** ou si elle est **décroissante**.

Si pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \text{alors } (u_n) \text{ est } \mathbf{croissante}.$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \text{alors } (u_n) \text{ est } \mathbf{décroissante}.$$

$$u_{n+1} = u_n \quad \text{alors } (u_n) \text{ est } \mathbf{constante} \text{ ou } \mathbf{stationnaire}.$$

b - Suites strictement monotones

(u_n) est **strictement monotone** si elle est strictement **croissante** ou **décroissante**.

Si pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \text{alors } (u_n) \text{ est } \mathbf{strictement croissante}.$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \quad \text{alors } (u_n) \text{ est } \mathbf{strictement décroissante}.$$

c - Suites périodiques, majorées, minorées et bornées

S'il existe des réels M , m et p ($p > 0$) tels que pour tout entier n :

$$u_{n+p} = u_n \quad \text{alors } (u_n) \text{ est } \mathbf{périodique de période } p.$$

$$u_n \leq M \quad \text{alors } (u_n) \text{ est } \mathbf{majorée} \text{ (} M \text{ est un majorant)}.$$

$$u_n \geq m \quad \text{alors } (u_n) \text{ est } \mathbf{minorée} \text{ (} M \text{ est un minorant)}.$$

$$m \leq u_n \leq M \quad \text{alors } (u_n) \text{ est } \mathbf{bornée} \text{ (majorée et minorée)}.$$

II. RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

1° Principe

Le raisonnement par récurrence est un procédé utile pour démontrer qu'une propriété P est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.

Le procédé se décompose en trois étapes :

- 1- **Vérifier** que la propriété P est vraie pour l'entier n_0 .
- 2- **Supposer** que P est vraie pour un entier n tel que $n \geq n_0$ et démontrer alors que la propriété P est vraie pour l'entier $n_0 + 1$.
- 3- **Conclure** que P est vraie pour tout entier supérieur ou égal à un entier naturel n_0 .

2° Exemple

Montrer que la propriété $P(n): 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

1- Etudions si P(1) est vraie : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc **P(1) est vraie**.

2- Supposons que P(n) soit vraie pour **un entier n**, $n \geq 1$.

On démontre que pour l'entier **suivant n + 1**, la propriété est encore vraie :

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

3- Conclusion : la propriété P(n) est vraie **pour tout entier n** supérieur ou égal à 1.

III. LIMITES ET CONVERGENCE

1° Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels et a un nombre réel.

On dit que (u_n) **converge vers la limite réelle a** si tout intervalle ouvert de centre a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

La suite (u_n) **a pour limite** $+\infty$ (ou $-\infty$) si tout intervalle ouvert du type $]a; +\infty[$ (ou $] -\infty; a[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ **ou** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

La suite **diverge** si elle ne converge pas. Dans ce cas, elle peut soit avoir une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$), soit ne pas avoir de limite.

Par exemple, la suite $(-1)^n$ n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$, donc elle diverge.

2° Opérations et théorèmes de comparaison

a - Opérations sur les limites

Les théorèmes sur la limite d'une somme $(u_n + v_n)$, d'un produit $(u_n \times v_n)$ et d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ de suites sont les mêmes que les théorèmes sur les limites de fonctions. On peut se référer au chapitre I de ce polycopié.

b - Théorèmes de comparaison

Soient (u_n) , (v_n) , (x_n) et (y_n) quatre suites de nombres réels.

Si à partir d'un certain rang ...	Et si ...	Alors ...
$u_n \leq x_n$	(u_n) tend vers $+\infty$	(x_n) tend vers $+\infty$
$x_n \leq u_n$	(u_n) tend vers $-\infty$	(x_n) tend vers $-\infty$
$ x_n - \ell \leq u_n$	(u_n) tend vers 0	(x_n) tend vers ℓ
$u_n \leq x_n \leq v_n$	(u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ	(x_n) converge vers ℓ (théorème des gendarmes)
$x_n \leq y_n$	(x_n) et (y_n) sont convergentes	$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

3° Suites arithmétiques et géométriques

a - Suites arithmétiques

Soit la suite arithmétique (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n + r$.

- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.

b - Suites géométriques

Soit q un nombre réel. Soit une suite géométrique (u_n) définie par : $u_n = q^n$.

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors (u_n) a pour limite 1.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors (q^n) est divergente et n'a pas de limite.



4° Suites monotones

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

5° Suites de type $u_n = f(n)$

Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$, a réel.

Si f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$, alors la suite (u_n) admet la même limite.

Exemple : $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Pour tout entier n non nul, on a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.



Toutes les formules de limites pour des fonctions vues dans les chapitres précédents sont ainsi valables pour les suites.

Exemples :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty, a \text{ nombre réel tel que } a > 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty, \alpha \text{ nombre réel tel que } \alpha > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty, a > 1 \text{ et } \alpha > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\ln n} = +\infty, \alpha > 0.$$

6° Suites de type $u_n = f(v_n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et soit (u_n) une suite de points de I .

Si la suite (u_n) admet une limite a (finie ou infinie) et si la fonction f admet en a une limite ℓ (finie ou infinie) alors la suite $(f(u_n))$ admet ℓ pour limite.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(u_n)) = \ell$.

Exemple : Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \sqrt{\frac{5n+3}{2n-9}}$. v_n est définie pour $n \geq 5$.

Posons : $u_n = \frac{5n+3}{2n-9}$, $n \geq 5$; on a donc $v_n = \sqrt{u_n}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Donc,

l'image (v_n) de la suite (u_n) par la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ converge vers $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

7° Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que $f(I) \subset I$ (on dit que I est stable par f). Soit a un nombre réel de I . On construit ainsi une suite (u_n) de points de I que l'on note de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a, a \in I & \text{(condition initiale)} \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier } n & \text{(relation de récurrence)} \end{cases}$$

Théorème :

Soit (u_n) une suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Si f est continue sur I et si (u_n) converge vers $l \in I$, alors l est un point fixe de f (c'est-à-dire $f(l)=l$).

Ce théorème nous dit que si (u_n) converge, alors nécessairement elle converge vers un point fixe de f . Pour trouver la limite d'une telle suite, on cherchera donc les points fixes de f .

Proposition :

Si f est croissante de I sur I , alors (u_n) est monotone.

Exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}, n \text{ entier naturel} \end{cases}$$

Tracer la courbe représentative de f

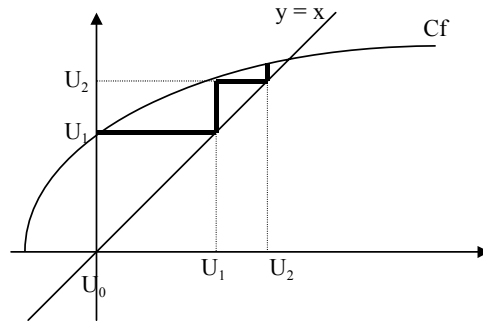
Soit la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{1+x}$.

f est définie sur $[0; +\infty[$ (on a bien : $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$).

On trace C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Placer les points u_n

Si u_n est porté sur l'axe des abscisses, la courbe C_f permet d'obtenir la valeur $f(u_n)$, c'est à dire u_{n+1} sur l'axe des ordonnées. Pour poursuivre le processus, il faut « reporter » u_{n+1} sur l'axe des abscisses, pour cela on utilise la droite d'équation $y = x$.



📁 Interprétation graphique

On observe sur la figure que les points $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$ se rapprochent du point d'intersection de C et de la droite d'équation $y = x$. On conjecture que la limite de cette suite est le point d'intersection de C et de la droite d'équation $y = x$.

Pour tout réel $x \geq -1$, $\sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow (1+x = x^2 \text{ et } x \geq 0) \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

L'intersection de C et de la droite d'équation $y = x$ est le point $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

On conjecture donc que la limite de (u_n) est $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \dots$ Ce qui pourra être prouvé par la suite.

8° Suites Adjacentes

a - Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $\lim (v_n - u_n) = 0$.

b - Théorème

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite L.
De plus, pour tout n : $u_n \leq L \leq v_n$.

Chapitre VI : DENOMBREMENTS, PROBABILITES ET LOIS DE PROBABILITE

I. DENOMBREMENTS

1° Généralités

a - Parties d'un ensemble

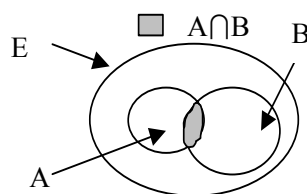
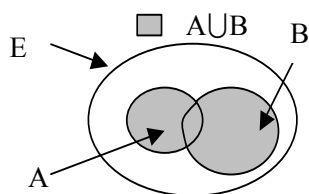
Soit E un ensemble.

Soit A une partie de E .

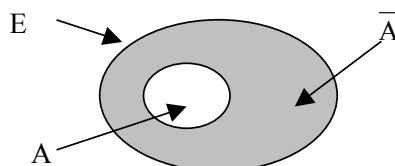
- Le **nombre d'éléments de A** est appelé le **cardinal** de A, noté **Card (A)**.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément est l'ensemble vide, noté \emptyset .

Soient A et B deux ensembles de E .

- L'ensemble formé des éléments qui sont soit dans A, soit dans B est noté $A \cup B$. On dit que c'est la **réunion** de A et B.
- L'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans A et dans B est noté $A \cap B$. On dit que c'est l'**intersection** de A et B.
- Si tous les éléments de A sont des éléments de B, on note $A \subset B$. On dit que **A est inclus dans B**.
- Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.



- L'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A est noté \bar{A} . C'est le **complémentaire** de l'ensemble A dans E. On a : $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.



Soient A_1, \dots, A_p des ensembles de E .

- A_1, \dots, A_p constituent une **partition** de E si ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion est égale à E.

b - Principe de la somme

Si A_1, \dots, A_p constituent une **partition** d'un ensemble fini E , alors :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_p)$$

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E :

➤ Si **A et B sont disjoints** alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

➤ Si **A et B sont quelconques** :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

c - Principe du produit

On appelle produit cartésien des ensembles A et B , l'ensemble noté $A \times B$ formé de tous les couples (a, b) où a appartient à A et b appartient à B .

Si A et B sont deux ensembles finis alors : $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

Cette définition se généralise au cas de n ensembles en remplaçant les couples par des familles ordonnées de n éléments.

2° Les différents types de dénombrements

Soit E un ensemble non vide qui contient n éléments ($n \geq 1$) et soit p un entier ($p \geq 1$).

Une suite ordonnée de p éléments est appelée liste de p éléments de E .

a - Permutation d'un ensemble

On appelle **permutation** d'un ensemble E à n éléments toute liste de n éléments de E deux à deux distincts.

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) est défini par $n!$ (se lit

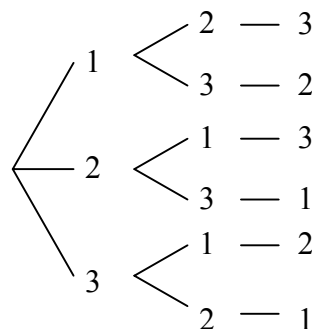
« factorielle n ») : $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

Par convention : $0! = 1$.



Exemple : Les permutations de l'ensemble $E = \{1; 2; 3\}$ sont : $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ et $(3,2,1)$ soit 6 possibilités qui correspond bien à : $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Méthode : Pour trouver les possibilités, on peut le représenter à l'aide d'un « arbre » :



Modèle : L'ordre intervient, il n'y a **pas de répétitions**, cela peut correspondre à un modèle de « **tirage sans remise de n éléments parmi n** ».

b - Liste sans répétitions de p éléments de E

Une liste sans répétitions de p éléments de E (avec $1 \leq p \leq n$) est une liste de p éléments de E deux à deux distincts.

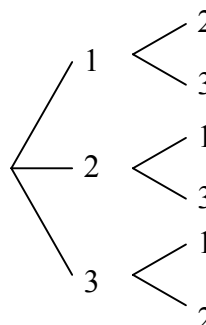
Le nombre de liste sans répétitions de p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à :
 $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$ (soit p facteurs).



Exemple : Les listes sans répétitions de 2 éléments de l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3\}$ sont : (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1) et (3,2) soit 6 possibilités, ce qui correspond bien à : $3 \times 2 = 6$.

Méthode : Pour trouver les possibilités, on peut les représenter à l'aide d'un « arbre » :

Modèle : L'ordre intervient, il n'y a pas de répétitions, cela peut correspondre à un modèle de « tirages sans remise de p éléments parmi n ».



c - Liste avec répétitions de p éléments de E

Une liste avec répétitions de p éléments de E est une liste de p éléments de E, non nécessairement distincts.

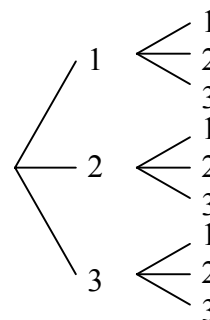
Le nombre de listes avec répétitions de p éléments de E est n^p .



Exemple : Les liste avec répétition de 2 éléments de l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3\}$ sont (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2) et (3,3) soit 9 possibilités, ce qui correspond bien à : $3^2 = 9$.

Méthode : Pour trouver les possibilités, on peut les représenter à l'aide d'un « arbre » :

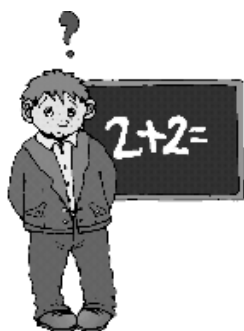
Modèle : L'ordre intervient, il y a des répétitions possibles, cela peut correspondre à un modèle de « tirage avec remise ».



d - Combinaison de p éléments de E

On appelle **combinaison** de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments (avec $1 \leq p \leq n$).

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et est défini par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p(p-1)\dots 2 \times 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$


Exemple : Les combinaisons de 2 éléments de l'ensemble $E = \{1; 2; 3\}$ sont : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{3, 2\}$ soit 3 possibilités qui correspondent bien à : $\frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$.

Modèle : L'ordre n'intervient pas, cela peut correspondre à un modèle de « **tirages simultanés** ». Comme l'ordre n'intervient pas, il ne faut pas compter deux fois les mêmes termes. Par exemple, les couples $(1, 2)$ et $(2, 1)$ représentent la même paire $\{1, 2\}$.

3° Coefficients binomiaux et formule du binôme

a - Définition

Les coefficients binomiaux correspondent au nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments. Ils sont notés $\binom{n}{p}$ et sont définis par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p(p-1)\dots 2 \times 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On peut donc déduire du paragraphe précédant les formules suivantes :

$\binom{n}{0} = 1$, car il y a une seule partie à 0 élément, c'est l'ensemble vide.
 $\binom{n}{n} = 1$, car E est la seule partie à n éléments.
 $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, car il y a autant de parties de E à p éléments que de parties de E à n-p éléments. Chaque partie A de p éléments correspond à une partie \bar{A} de n-p éléments.

b - Relation de Pascal

Pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$, on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

La relation de Pascal permet de calculer $\binom{n}{p}$ à partir de $\binom{n-1}{p}$ et de $\binom{n-1}{p-1}$. On peut donc calculer tous les nombres $\binom{n}{p}$ dans le tableau ci-dessous. On remplit de 1 la première colonne et la diagonale, chaque chiffre se déduit de la ligne précédente en additionnant deux chiffres de la ligne précédente (celui au dessus et celui à gauche au dessus). Par exemple, à la ligne de rang 4, $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$ et de nouveau $4 = 1 + 3$.

Ce tableau s'appelle **le triangle de Pascal**.

	0	1	2	3	4	5	p	n
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
n	1	n	$\binom{n}{p}$...	1

c - Formule du binôme

Soit a et b deux nombres complexes et n un entier, $n \geq 1$.

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$



Application :

Sur les lignes de rang 2, 3 et 4 du triangle de pascal, on lit les coefficients du développement de :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Et ainsi de suite pour tous les coefficients du développement de $(a + b)^n$.

II. PROBABILITES

1° Généralités

a - Evénements

Pour une expérience donnée, nous désignerons par E l'ensemble de toutes les issues possibles, appelées **événements élémentaires**. Cet ensemble est souvent appelé « ensemble des possibles ».

Si E est un ensemble d'événements élémentaires, alors :

- Un **événement** A est une partie de E.
- L'**événement** contraire de A, noté \bar{A} , est la partie complémentaire de A dans E.
- Un **événement impossible** est un événement qui n'appartient pas à E (exemple : tirer un 7 au dé).
- On parle d'**événements incompatibles** s'ils ne peuvent pas avoir lieu en même temps.



Exemple :

On jette un dé à six face. L'ensemble des possibles est

$$E = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}.$$

Soit A l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 ».

$$A = \{ 5 ; 6 \}$$

Le contraire de A est $\bar{A} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$.

b - Définition des probabilités

Si à chaque événement A on associe un nombre noté $p(A)$ ayant les 3 propriétés suivantes, alors ces nombres sont appelés des **probabilités** :

P1 : Pour tout événement A, sa probabilité est comprise entre 0 et 1.

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

P2 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

P3 : La somme des probabilités de deux éléments contraires est égale à 1 : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.



c - Propriétés des probabilités

Si E est l'ensemble des événements élémentaires : $p(E) = 1$.

Soit \emptyset l'ensemble vide : $p(\emptyset) = 0$.

Soit deux événements A et B quelconques : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

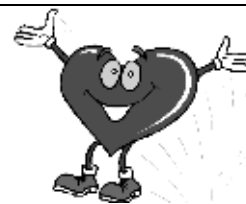
Pour deux événements incompatibles, on a : $p(A \cap B) = 0$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

d - Equiprobabilité

Pour une situation donnée, il y a **équiprobabilité** si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas, pour un événement A quelconque, on a :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de E}}$$



Exemple : On lance un dé. Quelle est la probabilité de tomber sur le chiffre 1 ?

$$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \text{ donc } p(A) = \frac{1}{6}.$$

2° Variables aléatoires

a - Définitions

Pour une expérience donnée, on appelle E l'ensemble fini de toutes les issues possibles .

On appelle **variable aléatoire réelle X** une fonction définie sur l'univers des possibles E à valeurs réelles.

L'**univers image** de E par la variable X est l'ensemble : $X(E) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. Les x_i sont les valeurs que peut prendre la variable X.

La **loi de probabilité** de la variable X est la fonction qui à chaque x_i de X associe sa probabilité $P(X = x_i)$ ou p_i .

Exemple : X peut représenter le nombre de 5 apparaissant à chaque tirage de 6 dés. Il peut y avoir : 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 nombres 5 qui apparaissent donc $X(E) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Définir la loi de probabilité, c'est donner $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$, $P(X=4)$, $P(X=5)$ et $P(X=6)$. Par exemple, $P(X=1)$ correspond à la probabilité qu'apparaisse un seul 5 lors d'un tirage de 6 dés.

b - Espérance mathématique

Soit X la variable aléatoire de valeurs x_1, \dots, x_n ayant comme probabilités p_1, \dots, p_n .

L'**espérance mathématique** de X est le réel $E(X)$ tel que :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

$E(X)$ est la moyenne des valeurs x_i , pondérées par les valeurs p_i .



Remarque :

Dans le domaine des jeux, $E(X)$ correspond au gain moyen que l'on peut espérer gagner (d'où le terme « espérance »).

Si $E(X) = 0$ alors le jeu est équitable.

Si $E(X) > 0$ alors le jeu nous est favorable.

Si $E(X) < 0$ alors le jeu nous est défavorable.

c - Variance et écart type

La **variance mathématique** de la variable aléatoire X est le réel V(X) donnée par la formule suivante :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n (p_i x_i^2) - E(X)^2$$



L'**écart-type** est la racine carrée de la variance.

On le note σ : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

On peut calculer plus rapidement la variance grâce à la formule suivante :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

d - Propriétés de l'espérance, de la variance et de l'écart type

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur la même situation

Soient a et b des réels.

$$E(X + b) = E(X) + b$$

$$E(aX) = a E(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + b) = V(X)$$

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(X + b) = \sigma(X)$$

$$\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

3° Probabilités conditionnelles

a - Définition

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire avec $p(B) \neq 0$.

On définit la **probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé**, notée $p_B(A)$ ou $p(A/B)$, par la relation : $p_B(A) = p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

b - Arbre pondéré

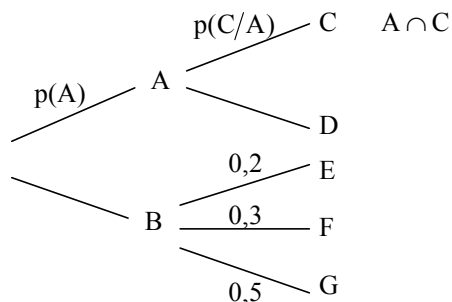
On peut représenter une situation par un arbre pondéré. La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

Règle des nœuds : la somme des probabilités affectées aux branches qui partent d'un même nœud est égale à 1.

Exemple :

En suivant le chemin qui mène à C, on retrouve la formule : $p(A \cap C) = p(A) \times p(C/A)$.

Sur les branches qui mènent de B à E, F et G, on a bien : $0,2 + 0,3 + 0,5 = 1$.



c - Formule des probabilités totales

Si B_1, B_2, \dots, B_n forment une partition de E , alors quel que soit l'événement A , $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ forment une partition de A . Ainsi :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n)$$

L'intérêt de cette remarque réside dans le fait que les probabilités $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ peuvent être calculées grâce aux probabilités conditionnelles :

$$p(A \cap B_1) = p_{B_1}(A) \times p(B_1).$$

La **formule des probabilités totales** s'écrit ainsi :

$$p(A) = p_{B_1}(A) \times p(B_1) + p_{B_2}(A) \times p(B_2) + \dots + p_{B_n}(A) \times p(B_n)$$

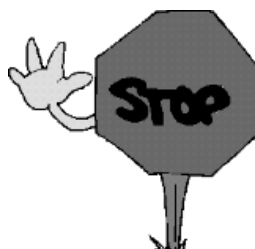
4° Indépendance

a - Événements indépendants

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
On peut aussi dire : $p(A) = p_B(A)$ et $p(B) = p_A(B)$.

ATTENTION !

Ne pas confondre événements *indépendants* ($p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$) et événements *incompatibles* ($p(A \cap B) = 0$).



b - Variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

X prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n et Y les valeurs y_1, y_2, \dots, y_m .

On peut définir une **loi de probabilité du couple** (X, Y) en donnant la probabilité $p_{i,j}$ de chaque événement $[(X=x_i) \text{ et } (Y=y_j)]$.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tous i et j ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$), les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants c'est à dire : $p_{i,j} = p_i \times p_j$.

c - Expériences aléatoires indépendantes

On notera que des **expériences aléatoires répétées identiques sont indépendantes**. Par exemple, si on note le résultat de plusieurs lancers de dé, chaque tirage est indépendant des autres. De même lors d'un tirage avec remise dans une urne.

Par ailleurs, **deux variables aléatoires liées à deux expériences différentes** sont indépendantes.

III. LOIS DE PROBABILITE

1° Lois discrètes

a - Epreuve de Bernoulli

Une épreuve aléatoire possédant deux issues S et E de probabilité p et q telles que : $q = 1-p$, est une **épreuve de Bernoulli**.

Exemple : Prenons un dé non pipé, lancé cinq fois de suite. Appelons « succès » l'événement noté S : « le six sort ».

Le lancer de dé peut être considéré comme une expérience aléatoire ayant deux issues : « succès S »

de probabilité $p = \frac{1}{6}$ et « échec E » de probabilité $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Une telle épreuve est appelée épreuve de Bernoulli.

b - Loi de Bernoulli

Soit une épreuve de Bernoulli d'issues S (comme succès) de probabilité p et E (comme échec) de probabilité q.

La loi de Bernoulli de paramètre p est la loi de probabilité de la variable aléatoire X à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que : $X = \begin{cases} 1 & \text{si l'issue est S} \\ 0 & \text{si l'issue est E} \end{cases}$. On a ainsi : $p(X=1) = p$ et $p(X=0) = q$.

Par ailleurs : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$.

c - Loi Binomiale

On obtient un **schéma de Bernoulli** en répétant de façon indépendante n épreuves de Bernoulli d'issues S de probabilité p et E de probabilité q (avec $p + q = 1$).

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité de la variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ telle que X soit le nombre d'issues S (nombre de succès) réalisées lors du schéma.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée B(n,p), alors :

- Pour tout k appartenant à $\{0,1,2,\dots,n\}$: $p(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
- L'espérance et la variance sont alors : $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Exemple : La probabilité d'avoir 3 succès sur 8 expériences est : $p(X=3) = \binom{8}{3} p^3 q^5$.

2° Lois de probabilité continues

Dans le paragraphe précédent, on parlait de **loi de probabilité discrète** car la variable aléatoire X ne pouvait prendre qu'un **nombre fini de valeurs** : $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Dans ce paragraphe, nous parlons de **loi de probabilité continue** car la variable aléatoire **X** peut prendre toutes les valeurs appartenant à **un intervalle** (borné ou non) de \mathbb{R} .

Exemple : La variable aléatoire qui donne la durée de vie d'un objet (ampoule, composant électronique,...).

a - Densité d'une loi de probabilité

Pour décrire une loi de probabilité discrète, il suffisait de donner la probabilité p_i de chaque événement ($X = x_i$). Pour une loi de probabilité continue, on ne peut pas faire de même car il faudrait définir une infinité de probabilités.

On appelle **densité d'une loi de probabilité P**, une fonction f définie, continue, positive sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} telle que : $\int_a^b f(t)dt = 1$.

Pour tout intervalle $[\alpha ; \beta]$ contenu dans $[a, b]$, **la probabilité de l'intervalle $[\alpha ; \beta]$** est la probabilité que $x \in [\alpha ; \beta]$ et est définie par : $P([\alpha ; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$.

b - Loi uniforme

Une loi de probabilité P est **une loi uniforme** sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} si sa densité **f est une fonction constante** sur $[a, b]$.

On montre aisément que cette fonction constante est la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Pour tout intervalle $[\alpha ; \beta]$ contenu dans $[a, b]$, la probabilité de l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ est définie par : $P([\alpha ; \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$.

c - Loi exponentielle

Une loi de probabilité P est **une loi exponentielle de paramètre le réel λ** si sa densité **f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$** par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Pour tout intervalle $[\alpha ; \beta]$ contenu dans $[0 ; +\infty[$, la probabilité de l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ est définie par : $P([\alpha, \beta]) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

I. PRESENTATION DES NOMBRES COMPLEXES

1° Définitions

a - Ensemble \mathbb{C}

Il existe un ensemble \mathbb{C} contenant \mathbb{R} et vérifiant les propriétés suivantes :

- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de \mathbb{R} avec les mêmes règles de calcul.
- Il existe un élément i de \mathbb{C} tel que : $i^2 = -1$.
- Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ où a et b sont des réels

b - Ecriture algébrique

L'écriture algébrique d'un nombre complexe z est : $z = a + ib$ où a et b sont des réels.

- a s'appelle la **partie réelle** de z , notée $\text{Re}(z)$.
- b s'appelle la **partie imaginaire** de z , notée $\text{Im}(z)$.
- Si $b = 0$, z est un nombre réel.
- Si $a = 0$, z est appelé imaginaire pur.

2° Représentation géométrique

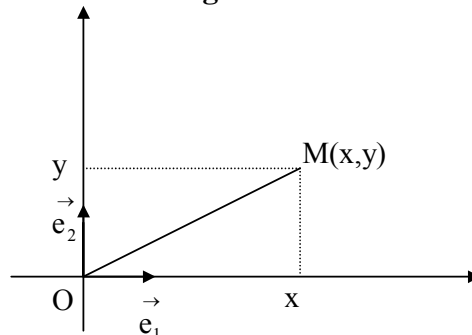
Le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est appelé plan complexe.

$z = x + iy$ (x et y réels) est représenté par le point $M(x,y)$.

On dit que M est l'**image** de z et que z est l'**affiche** du point M .

L'axe des **abscisses** est appelé l'axe des **réels**

L'axe des **ordonnées** est appelé l'axe des **imaginaires**.



3° Règles de calcul

a - Egalité de deux nombres complexes

Soient $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ deux nombres complexes.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelles et la même partie imaginaire.

b - Somme et produit

Soient $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ deux nombres complexes :

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + a') + i(b + b') \\ z \times z' &= (aa' - bb') + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

c - Inverse

Tout nombre complexe non nul $z = a + i b$ (a et b réels) admet un **inverse** z' (c'est à dire un nombre complexe z' tel que $zz' = 1$), noté $\frac{1}{z}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

d - Quotient

Soient $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ deux nombres complexes avec z' non nul. On peut définir le quotient par :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 + b'^2}$$

ce qui équivaut à la multiplication d'un complexe z par l'inverse d'un autre complexe z' .

4° Conjugaison

a - Conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe, $z = a + i b$ (a et b réels).

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe, noté \bar{z} tel que :

$$\bar{z} = a - i b$$

Exemple : Le conjugué de $z = 2 + 3 i$ est $\bar{z} = 2 - 3 i$.

b - Propriétés

Soient $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ deux nombres complexes :

Deux nombres complexes égaux ont le même conjugué : $z = z' \Leftrightarrow \bar{z} = \bar{z}'$

Le conjugué de \bar{z} est z : $\overline{(\bar{z})} = z$

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

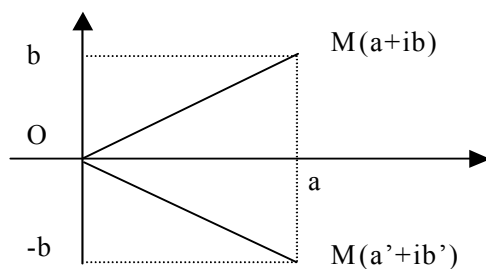
Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués :

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$

On a : $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.
 z imaginaire pur $\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$ z réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

c - Interprétation géométrique



Le point M' d'affixe $z' = a' + i b'$ est le symétrique du point M d'affixe $z = a + i b$ par rapport à l'axe des abscisses.
Par ailleurs $OM = OM'$.

II. MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1° Coordonnées polaires (Rappels)

a - Définition

Les **coordonnées polaires** d'un point M (distinct de l'origine) du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sont définies par le couple (r, θ) tel que :

$$r = OM \quad \text{et} \quad \theta = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})$$

b - Relations entre coordonnées polaires et cartésiennes

Soit un point M (distinct de l'origine) de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ) . Les coordonnées polaires et cartésiennes du point M sont liées par les relations suivantes :

$$x = r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2° Module d'un nombre complexe

a - Définition

Soit $z = a + i b$ (a et b réels) un nombre complexe.

On appelle **module** de z le réel positif : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

b - Propriétés

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Si $M(a,b)$ est l'image de z dans le plan complexe d'origine O , alors : $|z| = OM$.

Si A est un point d'affixe z_A et B un point d'affixe z_B , alors $AB = |z_B - z_A|$.

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \\ |z + z'| &\leq |z| + |z'| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ |zz'| &= |z| \times |z'| \\ \left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{|z|} \text{ si } z \neq 0 \end{aligned}$$

3° Argument d'un nombre complexe

a - Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M l'image de z dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On appelle **argument** de z , noté $\text{Arg}(z)$, **toute mesure** de l'angle (\vec{e}_1, \vec{OM}) .

Si θ est un argument de z , tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif. Ceci se traduit par l'écriture suivante :

$$\text{Arg}(z) = \theta \text{ modulo } 2\pi \quad \text{ou} \quad \text{Arg}(z) = \theta + 2k\pi$$

Exemples : $\text{Arg}(1) = 0 + 2k\pi$; $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\text{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

b - Propriétés

Tout réel positif a un argument égal à 0 et tout réel négatif a un argument égal à π .

Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$ et

tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}$.

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls et pour tout entier n :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad (2\pi) \quad \arg(z^n) = n \times \arg(z) \quad (2\pi).$$

Soient a, b et c trois complexes ($c \neq a$ et $c \neq b$), d'images respectives A, B, C, alors :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ modulo } 2\pi$$

4° Forme trigonométrique

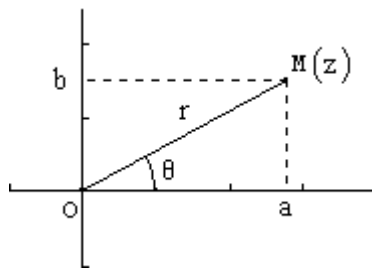
Soit z un nombre complexe non nul.

$$\begin{aligned} \text{Si } r = |z| \text{ et } \alpha = \arg(z) \quad (2\pi) & \quad \text{alors : } z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)). \\ \text{Si } z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)), \text{ avec } r > 0, & \quad \text{alors : } r = |z| \text{ et } \alpha = \arg(z) \quad (2\pi). \end{aligned}$$

L'écriture $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ est la **forme trigonométrique** de z.

L'écriture $z = a + ib$ est la **forme algébrique** de z.

Pour $z \neq 0$, on passe de la forme trigonométrique à la forme algébrique de z de la façon suivante : $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$; $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$



Remarques :

➤ Soient deux nombres complexes $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ et $z' = r'(\cos(\alpha') + i \sin(\alpha'))$.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' \quad (2\pi) \end{cases}$$

➤ Le complexe $z = 0$ est de module nul, mais on ne peut pas définir son argument.

5° Notation exponentielle

a - Complexe de module 1

Le complexe de module 1 dont un argument est α est noté : $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$.

b - Forme générale

Une forme exponentielle d'un nombre complexe z non nul, de module r et d'argument α s'écrit : $z = r e^{i\alpha}$.

Si $z = r e^{i\alpha}$ et $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \alpha$ modulo 2π .

Remarques : $|e^{i\alpha}| = 1$ et $\arg(e^{i\alpha}) = \alpha \pmod{2\pi}$.

c - Propriétés

Les propriétés des modules et des arguments est cohérente avec la notation exponentielle.
En effet, on a :

$$r e^{i\alpha} \times r' e^{i\alpha'} = r r' e^{i(\alpha+\alpha')} \quad ; \quad \frac{r e^{i\alpha}}{r' e^{i\alpha'}} = \frac{r}{r'} \times e^{i(\alpha-\alpha')} \quad ; \quad (r e^{i\alpha})^n = r^n e^{in\alpha}.$$

6° Formules de Moivre et d'Euler

Formules de Moivre

$$\text{Pour tout réel } \alpha \text{ et tout entier } n : \quad \begin{aligned} (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n &= \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) \\ (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha))^n &= \cos(n\alpha) - i \sin(n\alpha) \end{aligned}$$

Formule d'Euler

$$\text{Pour tout réel } \alpha : \quad \cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

III. EQUATION DU SECOND DEGRE

1° Racine carrée d'un réel a

Les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = a$, où a est un réel sont appelés racines carrées de a .

1^{er} cas : $a \geq 0$

L'équation $z^2 = a$ équivaut à $(z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0$.

Donc les racines de a sont les racines réelles : \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

2^{ème} cas : $a < 0$

L'équation $z^2 = a$ équivaut à $(z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0$.

Donc les racines de a sont des nombres complexes imaginaires purs : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

2° Equation du second degré à coefficients réels

L'équation $ax^2 + bx + c$ (a, b, c réels et $a \neq 0$) admet des solutions sur \mathbb{C} .

Soit Δ le discriminant de l'équation. $\Delta = b^2 - 4ac$.

◦ Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution : $x = \frac{-b}{2a}$ (solution réelle).

◦ Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

- réelles si $\Delta > 0$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- complexes conjuguées si $\Delta < 0$: $x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

IV. NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE PLANE

1° Vecteurs

a - Affixe

Soient z_A et z_B l'affixe respective des points A et B. L'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est : $z_B - z_A$.

b - Barycentre

Soient n points pondérés du plan $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$ d'affixes respectives z_1, z_2, \dots, z_n et $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ des réels non nuls. Le barycentre G des points pondérés a alors pour affixe :

$$z_G = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

2° Mesure d'un angle orienté

Soient \vec{AB} et \vec{CD} deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' . Alors :

$$|z| = \|\vec{AB}\| \quad ; \quad \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = (\vec{AB}, \vec{CD}) \pmod{2\pi}$$

$$\frac{z'}{z} \text{ est un réel} \Leftrightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{CD} \text{ colinéaires}$$

$$\frac{z'}{z} \text{ est un imaginaire pur} \Leftrightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{CD} \text{ orthogonaux}$$

3° Ensemble de points

a - Cercle

L'ensemble C des points M d'affixe z tels que $|z - a| = r$, avec r un réel strictement positif et a est un nombre complexe, est le cercle de centre A d'affixe a et de rayon r .

b - Médiatrice

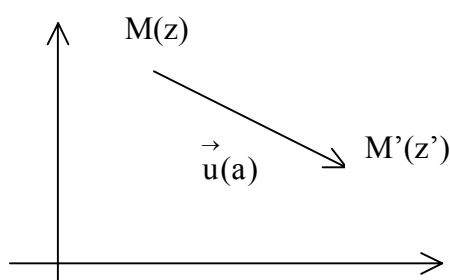
L'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $|z - a| = |z - b|$, avec a et b affixes respectives des points A et B , est la médiatrice du segment $[AB]$.

4° Transformations

a - Translation

La translation de vecteur \vec{u} d'affixe a associe au point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que :

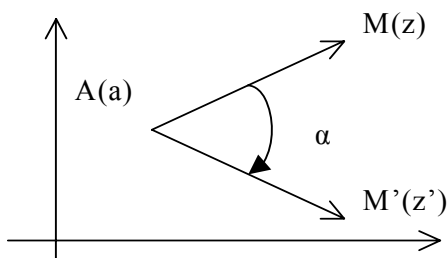
$$z' = z + a$$



b - Rotation

Soit A un point d'affixe a. **La rotation de centre A et d'angle α** associe au point M(z) le point M'(z') tel que :

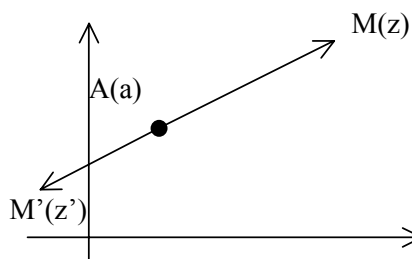
$$z' - a = e^{i\alpha} (z - a)$$



c - Homothétie

Soit A un point d'affixe a. **L'homothétie de centre A et de rapport k (k réel non nul)** associe au point M(z) le point M'(z') tel que :

$$z' - a = k (z - a)$$



I. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1° Produit scalaire dans l'espace

a - Définition

On désigne par E l'espace et par \vec{E} l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Soit \vec{u} un vecteur de l'espace de coordonnées (x,y,z) . On définit la **norme** du vecteur \vec{u} par : $\|\vec{u}\| =$

$$\sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Soient deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} de \vec{E} .

On appelle produit scalaire des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et définit par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

b - Expressions du produit scalaire

- Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} (x, y, z)$ et $\vec{v} (x', y', z')$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z' \quad (\text{Expression analytique})$$

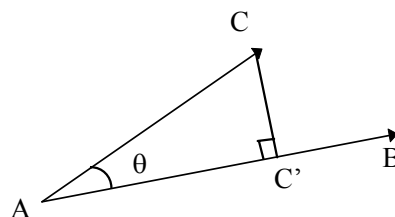
- Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls, le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

avec (\vec{u}, \vec{v}) la mesure de l'angle géométrique associé à \vec{u} et \vec{v} .

- Si $\vec{AC'}$ est le projeté de \vec{AC} sur (AB) alors on a la propriété suivante :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AC'}$$



c - Propriétés

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$$

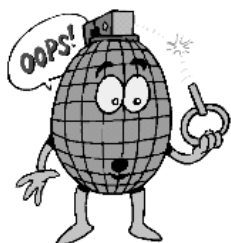
$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\vec{u} \cdot k \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$



ATTENTION :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{ne prouve pas du tout que} \quad \vec{v} = \vec{w}$$

2° Orthogonalité dans l'espace

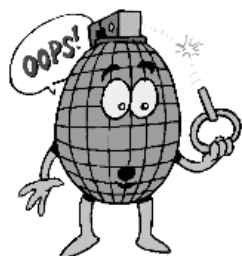
a - Vecteurs orthogonaux

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont **orthogonaux** si leurs directions sont perpendiculaires, ce qui se traduit avec le produit scalaire par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de l'espace de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x x' + y y' + z z' = 0$$



ATTENTION :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{signifie que} \quad \vec{u} = \vec{0}$$

$$\text{ou que} \quad \vec{v} = \vec{0}$$

$$\text{ou que} \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}$$

b - Droites orthogonales

Deux droites de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonales si et seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

c - Vecteur normal à un plan

Un **vecteur normal à un plan P** est un vecteur \vec{n} non nul dont la direction (qui est une droite) est orthogonale au plan P.



d - Droite orthogonale à un plan

Soient une droite D de vecteur directeur \vec{u} et un plan P de vecteurs directeurs \vec{v} et \vec{w} .

La droite D est orthogonale à P si et seulement si pour tout point A et B de P :

$$\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$$

La droite D est orthogonale à P si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

3° Géométrie analytique

a - Expression analytique du produit scalaire

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

b - Equation cartésienne d'un plan

Les plans orthogonaux à un vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ ont une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } d \text{ réel.}$$



Pour trouver une équation du plan P passant par A et de vecteur normal \vec{n} , il suffit d'écrire que :

$$M \in P \text{ si et seulement si } \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0.$$

c - Distance d'un point à un plan

Soient A un point de l'espace et P un plan passant par A et de vecteur normal non nul \vec{n} . Soient M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan P.

$$\text{La distance MH est : } MH = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Dans un repère orthonormé, la distance d du point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) au plan P d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ est égale à :

$$d(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cette distance correspond à la plus petite des distances séparant M des points de P.

II. BARYCENTRE

1° Définition du barycentre

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points pondérés de masse totale $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ non nulle, alors :

- Il existe un unique point G, appelé **barycentre** du système, tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$.
- Pour tout point M, on a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{MG}$.

En prenant $M = G$, on retrouve la formule précédente. Pour $n = 2$ ou $n = 3$, on retrouve la définition du barycentre vue en classe de 1^{ère} S.

2° Théorèmes d'associativité et de multiplication par un réel

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.

Exemple : Soit G le barycentre de (A,1), (B,2), (C,-1) et (D,3) et soit G' le barycentre de (A,1), (B,2) et (C,-1). Par le théorème d'associativité, G est le barycentre de (G',2) et (D,3).

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en multipliant toutes les coefficients de ces points par un même réel non nul.

Exemple : Soit G le barycentre de (A,1), (B,2), (C,-1) et (D,3), G est également le barycentre de (A,2), (B,4), (C,-2) et (D,6).

3° Segment, droite, plan et triangle

Le segment [AB] est l'ensemble des points M qui sont les barycentres de (A, α), (B, β) avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

La droite (AB) est l'ensemble des points M qui sont les barycentres de (A, 1-t), (B, t) où t est un réel quelconque.

La droite (AB) est l'ensemble de tous les barycentres de A et B (avec A et B distincts).

Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe des réels x et y tels que M soit le barycentre de (A, 1-x-y), (B, x), (C, y) (avec A, B, C distincts et non alignés).

Le plan (ABC) est l'ensemble de tous les barycentres de A, B et C.

L'intérieur d'un triangle ABC est l'ensemble des barycentres de A, B et C affectés de coefficients strictement positifs.

III. DROITES DE L'ESPACE

1° Représentation paramétrique

a - Droite

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de la droite Δ qui a pour vecteur directeur non nul $\vec{u}(\alpha, \beta, \lambda)$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$.

Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\lambda \end{cases} \quad (t \text{ réel}).$$

Réciproquement, toute représentation paramétrique de cette forme avec $(\alpha, \beta, \lambda) \neq (0, 0, 0)$ est celle d'une droite.

b - Segment et demi-droite

Soient deux points A et B tels que $\vec{AB} = \vec{u}$. Un point $M(x, y, z)$ appartient au segment $[AB]$ (ou à la demi-droite $[AB)$) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$ avec t appartenant à l'ensemble $[0, 1]$ (ou t appartenant à l'ensemble $[0, +\infty[$). La représentation paramétrique est la même que pour une droite, seul l'intervalle auquel appartient t change.

2° Système d'équations d'une droite

L'intersection de deux plans non parallèles et non confondus est une droite. On peut donc en déduire l'équation d'une droite à partir d'un système de deux équations de plan.

Si les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$
 est une droite.

3° Intersection d'une droite et d'un plan

Soit la droite D de vecteur directeur non nul $\vec{u}(\alpha, \beta, \lambda)$. Soit un plan P d'équation :

$ax + by + cz + d = 0$ et donc de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

La droite D et le plan P ont un seul point en commun si \vec{u} et \vec{n} ne sont pas orthogonaux, c'est à dire si $a\alpha + b\beta + c\lambda \neq 0$. Si \vec{u} et \vec{n} sont orthogonaux, la droite D appartient au plan P ou bien la droite D est parallèle au plan P .

Pour trouver le point d'intersection d'une droite avec un plan, il suffit de déterminer la représentation paramétrique de D et de remplacer les variables x, y et z de l'équation du plan par $x(t), y(t)$ et $z(t)$. On obtient une équation à une seule inconnue et on détermine t . On remplace ensuite t par sa valeur dans $x(t), y(t)$ et $z(t)$. On a ainsi déterminé le point d'intersection.

IV. PLANS DE L'ESPACE

1° Intersection de deux plans

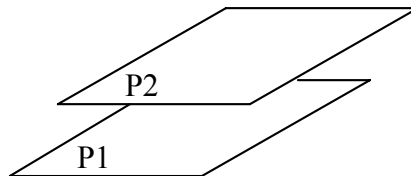
Soient deux plans P_1 et P_2 d'équations : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.
Il y a trois cas possibles dans l'espace :

a - P_1 et P_2 sont confondus

Si P_1 et P_2 sont confondus, les équations de P_1 et P_2 correspondent à une seule et même équation. On peut ne pas le voir au premier coup d'œil mais il suffit de vérifier que les suites de nombres (a_1, b_1, c_1, d_1) et (a_2, b_2, c_2, d_2) sont proportionnelles.

b - P_1 et P_2 sont disjoints

Si P_1 et P_2 sont disjoints, les plans sont parallèles et non confondus. Il suffit de vérifier que les triplets (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont proportionnels, et que d_1 et d_2 ne sont pas proportionnels (ce qui veut dire que les vecteurs normaux sont colinéaires).



c - P_1 et P_2 sont sécants

Si P_1 et P_2 sont sécants, les plans ont une droite en commun.

Dans ce cas, les triplets (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points M

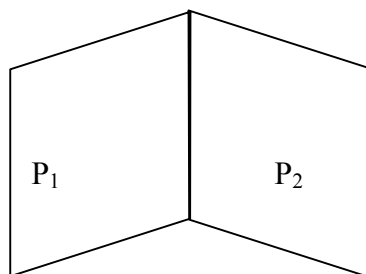
de coordonnées (x, y, z) tels que
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$
 est une droite.

Pour résoudre un tel système, il faut exprimer x et y en fonction de z par substitution.

On remplace ensuite z par t .

Le point M appartenant à la droite D a pour coordonnées $(x(t), y(t), z = t)$.

On obtient ainsi une définition paramétrique de la droite.



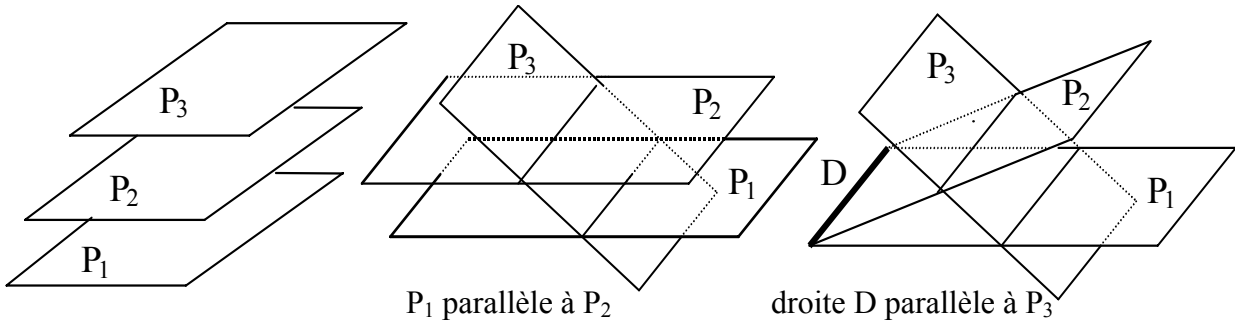
2° Intersection de trois plans

Soient trois plans P_1 , P_2 et P_3 d'équations : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ et $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$. Il y a quatre cas possibles dans l'espace :

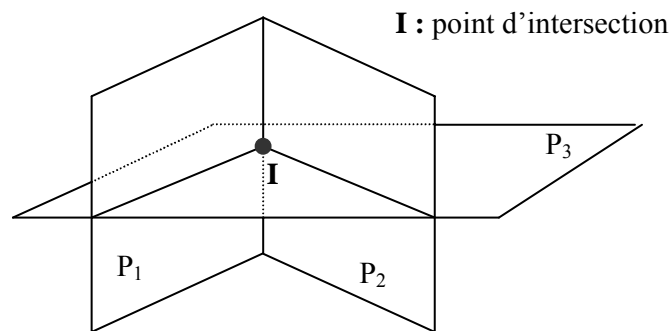
a - Tous les points en commun

Les plans sont confondus : $P_1 = P_2 = P_3$.

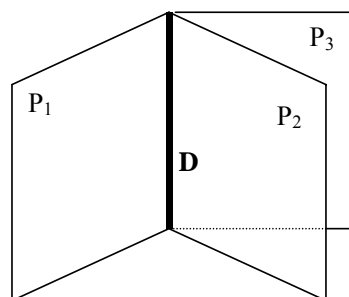
b - Aucun point commun aux trois plans



c - Un seul point commun aux trois plans



d - Une droite commune



D est l'intersection des trois plans.

I. DIVISIBILITE DANS \mathbb{Z}

1° Multiples et diviseurs

Soient a et b deux entiers relatifs.

On dit que a est un **multiple** de b si et seulement si il existe un entier relatif q tel que :
$$a = b \times q .$$

Ensemble des multiples : Soit $a \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des multiples de a est $\{ \dots ; -ka ; \dots ; -2a ; -a ; 0 ; a ; 2a ; \dots ; ka ; \dots \}$, $k \in \mathbb{N}$.

Si ces deux nombres sont non nuls, on dit que **b divise a**, que **b est un diviseur de a**.

2° Propriétés

a - Multiples

Soient a, b et c des entiers relatifs. Si a et b sont des multiples de c alors toutes les combinaisons linéaires $a u + b v$ (avec u et v entiers relatifs) sont des multiples de c.

b - Diviseurs

Soient a, b et c des entiers relatifs.

- ❑ Si a divise b et c alors a divise toutes les combinaisons linéaires $a u + b v$ (avec u et v entiers relatifs) .
- ❑ Si a divise b et si b divise c, alors a divise c.
- ❑ Si a divise b et si b divise a alors $a = b$ ou $a = - b$
- ❑ Si a divise b alors ac divise bc.



3° Division euclidienne

Soient a et b des entiers relatifs avec b non nul.

Il existe un unique couple (q, r) avec q entier relatif et r entier positif tel que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < |b|.$$

Cette opération qui à (a, b) associe (q, r) est la division euclidienne de a par b .

q est appelé le **quotient**

r est appelé le **reste**

b est appelé le **diviseur**

a est appelé le **dividende**

NB : Si on dit que b divise a , alors le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

II. LES CONGRUENCES

1° Entiers congrus modulo n

Soit n un entier ($n \geq 2$).

Deux entiers relatifs a et b sont **congrus modulo n** signifie que a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n , ce qui est équivalent à dire que $a - b$ est divisible par n .

On note : $a \equiv b [n]$ ou $a \equiv b \pmod{n}$.

2° Propriétés

Soit n un entier ($n \geq 2$). Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Si $a \equiv b [n]$ alors $b \equiv a [n]$.

Si $a \equiv b [n]$ et $b \equiv c [n]$ alors $a \equiv c [n]$.

Si $a \equiv b [n]$ et $c \equiv d [n]$ alors $a + c \equiv b + d [n]$ et $a - c \equiv b - d [n]$.

Si $a \equiv b [n]$ et $c \equiv d [n]$ alors $a \cdot c \equiv b \cdot d [n]$.

III. LES NOMBRES PREMIERS

1° Définitions

Un entier naturel n est dit **premier** si $n \geq 2$ et si **ses seuls diviseurs positifs sont 1 et n** .

Soit n un entier avec $n \geq 2$. Deux cas sont possibles :

- ou bien n est premier.

- ou bien, si n n'est pas premier, alors n admet un diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.

2° Propriétés

Il existe une **infinité** de nombres premiers.

Un nombre premier divise un produit de facteurs si et seulement si il divise un des facteurs.

Un nombre premier divise un produit de facteurs premiers si et seulement si il est égal à un de ces facteurs.

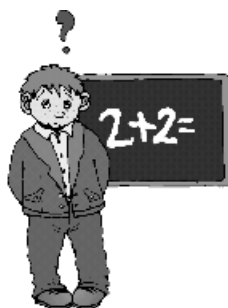
3° Décomposition en produit de nombres premiers

a - Décomposition

Soit n un entier avec $n \geq 2$.

L'entier n se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

On dit que c'est la **décomposition en produit de facteurs premiers de n** .



Exemple :

Décomposition de l'entier 616. On divise successivement les quotient obtenus par des nombres premiers dans l'ordre croissant.

616	2	=	308
308	2	=	154
154	2	=	77
77	7	=	11
11	11	=	1

d'où $616 = 2^3 \times 7 \times 11$.
(Produit de tous les quotients obtenus)

b - Diviseurs

Soit un entier m de décomposition en facteurs premiers : $m = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_n^{a_n}$.

Les diviseurs positifs de m sont les entiers de la forme :

$$p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \dots \times p_n^{b_n} \text{ avec } 0 \leq b_i \leq a_i \text{ pour } i = 1 \text{ à } n.$$

4° Divisibilité dans \mathbb{N}

a - Divisibilité par un nombre premier

Si p est un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p alors, p et a sont premiers entre eux.

b - Le petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p . Alors :

$a^{p-1} - 1$ est divisible par p (ce que l'on peut écrire : $a^{p-1} \equiv 1 [p]$)

De même, soit p un nombre premier et a un entier quelconque. Alors :

$a^p - a$ est divisible par p (ce que l'on peut écrire : $a^p \equiv a [p]$)



IV. PGCD ET PPCM

1° Définitions

Soient a et b deux entiers relatifs.

On appelle **Plus Grand Commun Diviseur** de a et b, le plus grand entier naturel qui divise à la fois a et b. On note : PGCD (a , b) .

On appelle **Plus Petit Commun Multiple** de a et b, le plus petit entier naturel qui est à la fois multiple de a et de b. On note : PPCM (a , b) .

2° Nombres premiers entre eux

Deux entiers naturels non nuls sont dits **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.

Une fraction $\frac{a}{b}$ est dite **irréductible** si a et b sont premiers entre eux.

3° Calcul du PGCD de deux entiers

a - 1^{ère} méthode : Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide utilise des divisions euclidiennes successives.

Exemple :



Déterminons le PGCD de 1800 et 1296.

La première division est : $1800 = 1296 \times 1 + 504$

On indique le quotient 1 au-dessus du diviseur 1296, et le reste 504 en dessous.

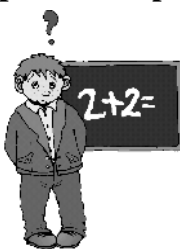
On divise ensuite 1296 par le reste 504. Et ainsi de suite.

Le dernier reste non nul est 72. C'est le PGCD de 1800 et 1296.

Quotient	1	2	1	1	3
1800	1296	504	288	216	72
Reste	504	288	216	72	0

b - 2^{ème} méthode : décomposition en produit de facteurs premiers

On décompose a et b en produits de facteurs premiers. Le PGCD de a et b est alors **le produit des facteurs premiers** figurant dans les deux décompositions, chaque facteur étant **affecté du plus petit des exposants** dans les deux décompositions.



Exemple :

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \quad \text{et} \quad 1296 = 2^4 \times 3^4$$

Le PGCD de 1800 et 1296 est donc $2^3 \times 3^2$, soit 72.

4° Théorème de Bézout

a - Deux entiers relatifs quelconques

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et d leur PGCD.

Il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a \times u + b \times v = d$.

b - Deux entiers relatifs premiers entre eux

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux.

Il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a \times u + b \times v = 1$.

5° Théorème de Gauss

Soient a , b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

6° Propriété du PGCD et du PPCM

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Si $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $m = \text{PPCM}(a, b)$, alors $m \times d = a \times b$.

7° Calcul du PPCM de deux entiers

a - 1^{ère} méthode

On décompose a et b en produit de facteurs premiers. Le PPCM de a et de b est **le produit de tous les facteurs premiers** figurant au moins dans l'une des deux décompositions, chaque facteur premier étant **affecté du plus grand des exposants** des deux décompositions.

Exemple :

Déterminons le PPCM de 1800 et 1296.

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \quad \text{et} \quad 1296 = 2^4 \times 3^4.$$

Le PPCM de 1800 et 1296 est donc $2^4 \times 3^4 \times 5^2$, soit 32400.

b - 2^{ème} méthode

On détermine le PGCD (a, b) et on utilise l'égalité $\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = a \times b$.

Exemple :

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que $\text{PGCD}(1800; 1296) = 72$

$$72 \times \text{PPCM} = 1800 \times 1296 = 2332800.$$

Donc PPCM de 1800 et 1296 est $\frac{2332800}{72} = 32400$.

I. CYLINDRE DE REVOLUTION

1° Généralités sur les sections planes de surfaces

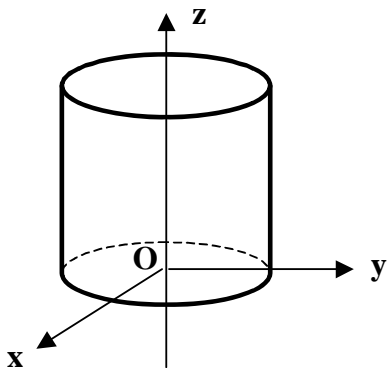
Le programme de Terminale S a pour objectif de définir uniquement la courbe représentative de la section plane d'une surface quelconque (cylindre de révolution, cône de révolution, surface d'équation $z = x^2 + y^2$ et surface d'équation $z = x y \dots$) par un plan parallèle à (xOy) , (yOz) ou (zOx) .

Prenons par exemple une surface S d'équation de la forme $z = f(x, y)$.

La section plane de S par un plan parallèle à (xOy) d'équation $z = a$ (a un réel donné) est la

courbe C_a d'équation :
$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = a \end{cases}$$

2° Description d'un cylindre de révolution



Soit un cylindre de révolution d'axe (Oz) .

La base du cylindre est un cercle de centre O et de rayon R .

Un point $M(x, y, z)$ appartient à ce cylindre si et

seulement si :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z \text{ réel} \end{cases}$$

Le dessin correspond à un cylindre avec z appartenant à un intervalle fermé. Il nous faudrait en réalité imaginer un cylindre infini (z pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle).

3° Section par un plan parallèle à (xOy)

Soit C un cylindre de révolution d'axe (Oz) de base un cercle de centre O et de rayon R .

Soit P un plan parallèle à (xOy) d'équation $z = a$ (a un réel donné).

La section plane du cylindre C par le plan P est **un cercle du plan P centré sur (Oz) et de rayon R .**


Ce cercle a pour équation :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = a \end{cases}$$

4° Section par un plan parallèle à (yOz) ou (zOx)

Soit C un cylindre de révolution d'axe (Oz) de base un cercle de centre O et de rayon R. Ce cylindre étant une surface de révolution autour de l'axe (Oz), les sections par des plans parallèles à (yOz) ou (zOx) sont de la même nature.

Nous allons déterminer dans ce paragraphe, la section du cylindre C par un plan Q parallèle à (zOx) d'équation $y = a$ (a un réel donné).

Trois cas sont à envisager :



Cas 1 : $|a| = R$

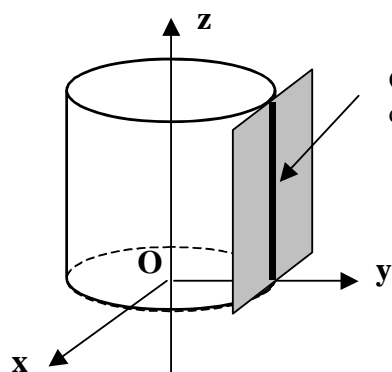
Le plan Q d'équation $y = a$ rencontre le cylindre selon une droite correspondant à une génératrice du cylindre : c'est la droite d'équation $x = 0$ dans Q.

Cas 2 : $|a| < R$

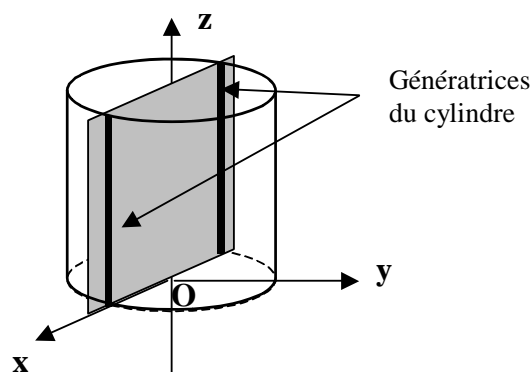
Le plan d'équation $y = a$ rencontre le cylindre selon deux droites correspondant à deux génératrices du cylindre : ce sont les droites d'équations $x = \sqrt{R^2 - a^2}$ et $x = -\sqrt{R^2 - a^2}$ dans le plan Q.

Cas 3 : $|a| > R$

Le plan d'équation $y = a$ ne rencontre pas le cylindre.



Cas 1



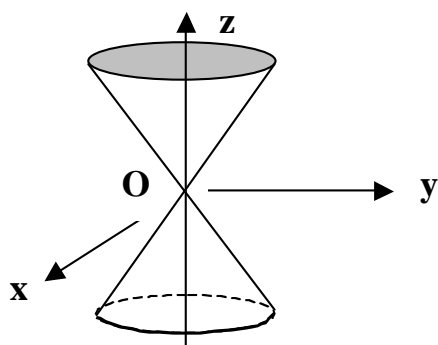
Cas 2

De la même façon, si on s'intéresse à la section du cylindre C par un plan Q' parallèle à (yOz) d'équation $x = k$ (k un réel donné), on a :

- si $|k| > R$: l'ensemble vide.
- si $|k| = R$: la droite d'équation $y = 0$ (dans le plan R).
- si $|k| < R$: les droites d'équations $y = \sqrt{R^2 - k^2}$ et $y = -\sqrt{R^2 - k^2}$ (dans le plan Q').

II. CONE DE REVOLUTION

1° Description d'un cône de révolution



Soit un cône de révolution d'axe (Oz) , de sommet O .
La base circulaire du cylindre est un cercle du plan $z = 1$, de rayon r ($r > 0$), centré en $(0, 0, 1)$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à ce cône si et seulement si :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 z^2 \\ z \text{ réel} \end{cases}$$

2° Section par un plan parallèle à (xOy)

Soit C un cône de révolution d'axe (Oz) , de base un cercle de centre le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et de rayon r ($r > 0$)

Soit P un plan parallèle à (xOy) d'équation $z = a$ (a un réel donné)

La section de C par P est un **cercle du plan P , centré sur (Oz) et de rayon $R = r \times |a|$** .

Ce cercle a pour équation :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 a^2 \\ z = a \end{cases}$$

3° Section par un plan parallèle à (yOz) ou (zOx)

Soit C un cône de révolution d'axe (Oz) , de base un cercle de centre le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et de rayon r ($r > 0$)

Ce cône étant une surface de révolution autour de l'axe (Oz) , les sections par des plans parallèles à (yOz) ou (zOx) sont de la même nature.

Nous allons déterminer dans ce paragraphe, la section du cône C , par un plan P parallèle à (zOx) d'équation $y = a$ (a un réel donné).

Deux cas sont à envisager :

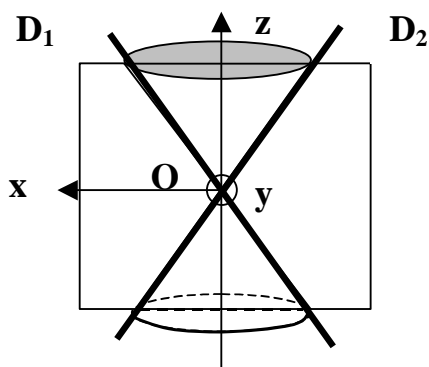
 **Cas 1** : $a = 0$ (le plan est le plan (zOx))

Le plan (zOx) d'équation $y = 0$ rencontre le cône selon la réunion de deux droites D_1 et D_2 (génératrices du cône) d'équations dans la plan (zOx) :

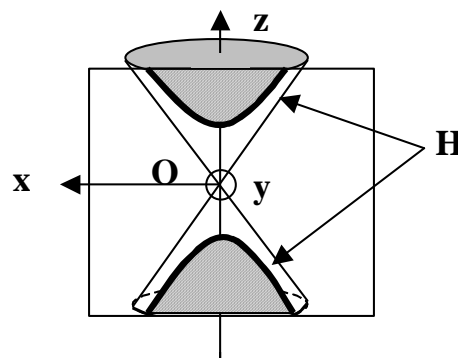
$$D_1 : r z - x = 0 \quad \text{et} \quad D_2 : r z + x = 0 .$$

 **Cas 2** : $a \neq 0$

Le plan d'équation $y = a$ rencontre le cône selon une hyperbole H de sommet le point de coordonnées $(0, a, 0)$ et d'asymptotes parallèles aux droites D_1 et D_2 définies ci-dessus.



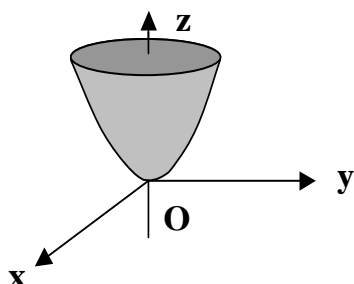
Cas 1



Cas 2

III. SURFACE D'EQUATION $Z = X^2 + Y^2$

1° Description d'une surface d'équation $z = x^2 + y^2$



La surface (S) d'équation $z = x^2 + y^2$ est la surface de révolution obtenue par rotation autour de l'axe (Oz) de la demi-parabole contenue dans le plan (xOz), d'équation $z = x^2$.

La surface (S) est un « paraboloidé ».

2° Section par un plan parallèle à (xOy)

Soit (S) la surface d'équation $z = x^2 + y^2$.

Soit P un plan parallèle à (xOy) d'équation $z = a$ (a un réel donné positif).


Nous allons déterminer dans ce paragraphe la section de la surface (S) par le plan P.

Trois cas sont à envisager :

 **Cas 1** : $a > 0$

La section de (S) par le plan P est **un cercle du plan P, centré sur (Oz) et de rayon $R = \sqrt{a}$** .

Ce cercle a pour équation :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ z = a \end{cases}$$

 **Cas 2** : $a = 0$ (le plan est le plan (zOy))

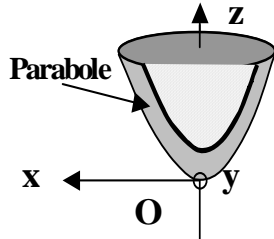
Le plan P rencontre la surface (S) en O, origine du repère.



 **Cas 3** : $a < 0$

Le plan P ne rencontre pas la surface (S) .

3° Section par un plan parallèle à (yOz) ou (zOx)



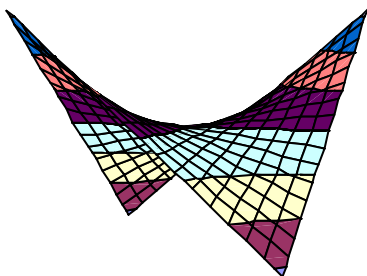
La surface (S) étant de révolution, les sections par des plans parallèles à (yOz) ou (zOx) sont de la même nature.

La section de (S) par un plan P parallèle à (zOx) d'équation $y = a$ est **une parabole contenue dans le plan P** d'équation :

$$\begin{cases} z = x^2 + a^2 \\ y = a \end{cases}$$

IV. SURFACE D'EQUATION $Z = X Y$

1° Dessin de la surface d'équation $z = x y$




Cette surface est appelée « paraboloid hyperbolique » ou « selle de cheval ».

2° Section par un plan parallèle à (xOy)

Soit P le plan d'équation $z = a$ (a réel) et (S) la surface d'équation $z = x y$.

Deux cas sont possibles :

 **Cas 1** : $a = 0$ (le plan est le plan (zOx))

Le plan P est le plan (xOy) et il coupe la surface (S) suivant les **axes de coordonnées (Ox) et (Oy)**.

 **Cas 2** : $a \neq 0$

Le plan P coupe la surface (S) suivant l'**hyperbole équilatère** (asymptotes orthogonales) contenue dans P et d'équation $x y = a$.

3° Section par un plan parallèle à (yOz) ou (zOx)

Soit (S) la surface d'équation $z = x y$.

Section par un plan parallèle à (zOx) d'équation $y = a$.

Le plan parallèle à (zOx) d'équation $y = a$ coupe la surface (S) selon **la droite**

$$\text{d'équation : } \begin{cases} y = a \\ z = ax \end{cases}$$

Section par un plan parallèle à (yOz) d'équation $x = b$.

Le plan parallèle à (yOz) d'équation $x = b$ coupe la surface (S) selon **la droite**

$$\text{d'équation : } \begin{cases} x = b \\ z = by \end{cases}$$

Comment déterminer et construire l'intersection d'un cône (ou d'un cylindre) et d'un plan parallèle aux plans de coordonnées ?

Méthode : Pour déterminer une équation de l'intersection d'un cône (ou d'un cylindre) et d'un plan parallèle aux plans de coordonnées, on écrit un système contenant une équation du cône (ou du cylindre) et une équation du plan.

Les équations des plans sont de la forme :

$z = c$, pour les plans parallèles au plan (xOy) ;

$y = b$, pour les plans parallèles au plan (xOz) ;

$x = a$, pour les plans parallèles au plan (yOz).

Comment déterminer l'intersection d'une surface et d'un plan parallèle aux plans de coordonnées ?

Méthode : Pour déterminer l'équation de l'intersection d'une surface et d'un plan parallèle aux plans de coordonnées, on écrit un système contenant une équation de la surface et une équation du plan.

Les équations des plans sont de la forme :

$z = c$, pour les plans parallèles au plan (xOy) ;

$y = b$, pour les plans parallèles au plan (xOz) ;

$x = a$, pour les plans parallèles au plan (yOz).

On peut, dans un repère convenablement choisi, établir une équation de l'intersection de la surface et du plan, sous forme d'une relation liant les deux coordonnées variables. Eventuellement, il peut s'agir de la courbe d'une fonction.

I. GENERALITES

1° Définition d'une similitude

Une similitude de rapport k (k réel, $k > 0$) est une transformation du plan qui multiplie les distances par k . C'est une transformation du plan qui conserve les rapports de distances.

Pour tous points A et B d'images A' et B' , on a $\frac{A'B'}{AB} = k$.

Exemple : Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport k si k est positif, et de rapport $-k$ si k est négatif.

2° Définition d'une isométrie

Une isométrie est une similitude de rapport 1. C'est donc une transformation qui conserve les distances.

Exemples : Les rotations, les translations, les réflexions sont des isométries car ce sont des transformations qui conservent les distances.

3° Propriétés

Soit s une similitude de rapport k et soient A' , B' et C' les images de A , B et C par s .
Nous avons les propriétés suivantes :

- Une similitude conserve les angles géométriques : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$
- Pour le produit scalaire : $\vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'} = k^2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

4° Composition

La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

La composée de deux similitudes de rapports k et m est une similitude de rapport $k \times m$

La composition de deux similitudes n'est pas commutative en général. Soit s_1 et s_2 deux similitudes. La composée $s_1 \circ s_2$ n'est en général pas égale à la composée $s_2 \circ s_1$.

II. SIMILITUDES

1° Ecritures complexes

a - Similitude

Les similitudes du plan sont les transformations d'écriture complexe :

$$z' = az + b \text{ ou } z' = a\bar{z} + b \text{ (avec } a \text{ et } b \text{ des complexes fixés, et } a \text{ non nul).}$$

Le rapport de la similitude est le module de a .

b - Isométrie

Les isométries du plan sont les transformations d'écriture complexe :

$$z' = e^{i\theta} z + b \text{ ou } z' = e^{i\theta} \bar{z} + b \text{ (avec } b \text{ un nombre complexe, } \theta \text{ un réel).}$$

2° Propriétés géométriques

a - Conservation de la forme géométrique

Une similitude transforme un segment en segment, une droite en une droite, un cercle en un cercle.

Une similitude de rapport k transforme le cercle de centre O de rayon R en un cercle de centre O' (image de O par la similitude) de rayon kR .

b - Conservation de propriétés géométriques

Une similitude conserve l'orthogonalité, le parallélisme, le contact et le barycentre.

c - Aires

Une similitude de rapport k multiplie les aires par k^2 .

3° Décomposition

Une similitude peut s'écrire comme la composée de translations, de rotations, de réflexions et d'homothéties.

4° Similitude fixant deux points distincts

Une similitude s ayant deux points fixes A et B distincts (c'est à dire telle que $s(A) = A$ et $s(B) = B$) est soit l'**identité**, soit la **réflexion d'axe (AB)**.

III. SIMILITUDE DIRECTE OU INDIRECTE

1° Définitions

a - Similitude directe

Les similitudes d'écriture $z' = az + b$ (avec a et b des complexes fixés, a non nul)
conservent les angles orientés et sont appelées **similitudes directes**.

Si $|a| = 1$ alors ce sont des isométries que l'on nomme **déplacements**.

Les translations et les rotations sont les seuls déplacements.

b - Similitude indirecte

Les similitudes d'écriture $z' = a\bar{z} + b$ (avec a et b des complexes fixés, a non nul)
changent les angles orientés en leur opposé et sont appelées **similitudes indirectes**.

Si $|a| = 1$ alors ce sont des isométries que l'on nomme **anti-déplacements**.

Les réflexions sont des anti-déplacements, mais ce ne sont pas les seuls.

c - Caractérisation géométrique des similitudes directes

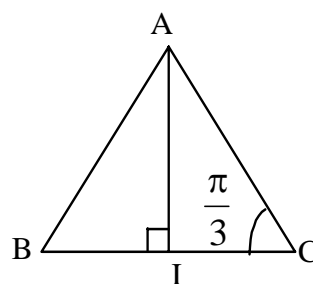
Soient Ω un point du plan, θ et k deux réels, $k > 0$, $a \neq 1$. On appelle **similitude directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k**, l'application du plan dans lui-même qui fixe le point Ω et qui à chaque point M distinct de Ω associe le point M' défini par :

$$(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) = \theta \ [2\pi] \text{ et } \Omega M' = k \Omega M.$$

Exemple : Soit S la similitude directe de centre C, d'angle $\frac{\pi}{3}$,
rapport $\frac{1}{2}$. Soit ABC un triangle équilatéral, soit I le milieu de

[BC]. On a : $(\vec{CA}, \vec{CI}) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$ et $CI = \frac{1}{2} CA$.

Donc, I est l'image de A par S.



de

La similitude directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k ($k > 0$) est la composée de l'homothétie de centre Ω , de rapport k et de la rotation de même centre et d'angle θ .

Réciproquement, la composée de l'homothétie de centre Ω , de rapport k (k réel quelconque) et de la rotation de même centre et d'angle θ est la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ si $k > 0$, ou de rapport $-k$ et d'angle $\theta + \pi$ si $k < 0$.

2° Propriété

Etant donnés quatre point A, B, A', B' tels que A soit distinct de B et A' soit distinct de B'. Il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

3° Forme réduite d'une similitude directe

Soit S la similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes, a non nul :

- Si $a = 1$, alors S est une translation de vecteur d'affixe b .

- Si $a \neq 1$, alors S est la composée de l'homothétie de centre Ω de rapport $k = |a|$, et de la rotation de même centre Ω d'angle $\theta = \text{Arg}(a) [2\pi]$. Ω est le point dont l'affixe est solution de l'équation $z = az + b$ (seul point fixe de S).

L'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k ($k > 0$) est : $z' - w = ke^{i\theta}(z - w)$ où w est l'affixe du point Ω .

Cette écriture s'appelle la **forme réduite de S** , composée d'une rotation et d'une homothétie.




4° Récapitulatif des écritures complexes

Transformation	Ecriture complexe
Translation de vecteur \vec{u}	$z' = z + b$ \vec{u} d'affixe b
Homothétie de centre Ω , de rapport k	$z' - w = k(z - w)$ Ω d'affixe w
Rotation de centre Ω , d'angle θ	$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$ Ω d'affixe w
Similitude directe de centre Ω , d'angle θ , de rapport k ($k > 0$) (composée d'une homothétie et d'une rotation)	$z' - w = ke^{i\theta}(z - w)$ Ω d'affixe w

Soit S une transformation s'écrivant sous la forme complexe : $z' = az + b$ (avec a et b des complexes fixés, a non nul) :

- Si a est un réel avec $a = 1$: S est la translation de vecteur d'affixe b .
- Si a est un réel avec $a \neq 1$: S est l'homothétie de centre Ω d'affixe w (telle que $w = aw + b$) de rapport a .
- Si a est un complexe non réel avec $|a| = 1$: S est la rotation de centre Ω d'affixe w (telle que $w = aw + b$) d'angle $\theta = \text{Arg}(a) [2\pi]$.
- Si a est un complexe non réel avec $|a| \neq 1$: S est la similitude directe de centre Ω d'affixe w (telle que $w = aw + b$) d'angle $\theta = \text{Arg}(a) [2\pi]$ et de rapport $k = |a|$.

Partie B : ÉNONCÉS DES EXERCICES

-  : exercices d'application directe du cours.
-  : exercices demandant un raisonnement plus complexe.
-  : exercices plus difficiles ou plus longs.

Limites de fonctions

EXERCICE 1.1

- 1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$:
- a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$ c) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x$
b) $f(x) = 7x^7 - 2x^4 - x^3 - 1$ d) $f(x) = 1000x^5 - x$
- 2) Étudier les limites de f en les valeurs indiquées, et si f n'est pas définie en ce point, étudier la limite à droite et la limite à gauche :
- a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}$ en $+\infty$, en $-\infty$, en 1 et -2 .
b) $f(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2 .
c) $f(x) = \frac{x + 4}{(x - 4)^2}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 4 .
d) $f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{(1 - x)^2}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1 .

EXERCICE 1.2 (CORRIGÉ)

Déterminer la limite de la fonction f en x_0 :

- 1) $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ en $x_0 = -2$ 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$ en $x_0 = 1$
2) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - 1}{x}$ en $x_0 = 0$ 5) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x + 1}}{x - 1}$ en $x_0 = 1$
3) $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1} - 1}$ en $x_0 = 2$ 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x^2 - x}$ en $x_0 = 0$ et en $x_0 = 1$

EXERCICE 1.3

- 1) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.
2) a) Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$.
b) Écrivez $4x^2 - 4x + 3$ sous forme canonique.
c) Déterminer la limite $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction g définie par :
- $$g(x) = f(x) - \sqrt{(2x - 1)^2} .$$

Théorèmes de comparaison

EXERCICE 1.4

Etudier la limite de f à l'aide des théorèmes de comparaison :

1) $f(x) = \cos(x) - 2x$ en $+\infty$.

2) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ en $+\infty$.

3) $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 .

EXERCICE 1.5

1) Soit f une fonction telle que pour tout $x > 2$, $\frac{4x + \cos(x)}{x} \leq f(x) \leq \frac{4x + 7}{x - 2}$.

Quelle est la limite de la fonction f en $+\infty$?

2) Soit f une fonction telle que $|f(x) - 23| \leq \frac{1}{x + 2}$.

Quelle est la limite de la fonction f en $+\infty$?

EXERCICE 1.6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{E(x)}{x}$ avec E la fonction « partie entière ».

Quelle est la limite de la fonction f en $+\infty$?

Limite d'une fonction composée

EXERCICE 1.7

Déterminer la limite de la fonction f à l'aide du théorème sur la limite de fonctions composées :

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) $f(x) = \left(x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ en $+\infty$.

EXERCICE 1.8

Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$, à l'aide du théorème sur la limite des fonctions composées.

EXERCICE 1.9

A l'aide d'un changement de variable, étudier la limite en 0 de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{\sin(5x)}{x} .$$

Asymptotes

EXERCICE 1.10

Rechercher les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes et étudier la position des courbes par rapport à cette asymptote (sauf si celle-ci est verticale) :

$$1) f(x) = \frac{2}{x-3} \quad 2) f(x) = \frac{3x-4}{2x+1} \quad 3) f(x) = x-3 + \frac{1}{2x} \quad 4) f(x) = 2x + \frac{x}{x^2+2}$$

EXERCICE 1.11 (CORRIGE)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

- 1) Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + 1}$.
- 2) Rechercher les asymptotes à la courbe représentative de la fonction f .

EXERCICE 1.12

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, où a , b et c des réels tels que $a > 0$ et $b^2 - 4ac > 0$.

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a}) = \frac{b}{2\sqrt{a}}$.
- 2) La représentation graphique de f admet-elle une asymptote oblique en $+\infty$?
Si oui, quelle est son équation ?

Continuité

EXERCICE 1.13

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$. Calculer $f(-1)$, $f(-1/2)$, $f(0)$ et $f(1)$.

En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois racines réelles distinctes dans l'intervalle $[-1 ; 1]$.

EXERCICE 1.14

Montrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution β et encadrer β entre deux entiers consécutifs :

$$\begin{array}{ll} 1) x^3 + 2x = 5 & 3) x + \sqrt{x} + 2 = 3 \\ 2) \cos x - 2x = 0 & 4) x^3 + x^2 = 9 \end{array}$$

EXERCICE 1.15

Soit f une fonction continue définie sur $I = [0 ; 1]$ telle que pour tout x de I , $f(x)$ appartient à I . Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - x$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g , démontrer qu'il existe un réel c dans I tel que $f(c) = c$.

Dérivabilité et tangente en un point

EXERCICE 2.1

Les fonctions f suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

- 1) $f(x) = x^3 \sqrt{x}$ 3) $f(x) = x |x|$
- 2) $\begin{cases} f(0) = 0 \\ x \neq 0, f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$ 4) $f(x) = \sqrt{x}$

EXERCICE 2.2

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a :

- 1) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ en $a = 1$ 4) $f(x) = x^2 + x + 2$ en $a = 3$
- 2) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 1$ 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ en $a = 4$
- 3) $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$ 6) $f(x) = \cos(x)$ en $a = 0$

EXERCICE 2.3 (CORRIGE)

Trouver la limite de f au point a en utilisant la définition du nombre dérivé :

- 1) $f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$ en $a = 0$ 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 3}{x-8}$ en $a = 8$
- 2) $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ en $a = 0$ 4) $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$ en $a = 0$

EXERCICE 2.4

Soit la fonction $f : x \rightarrow \frac{x+2}{7-x}$, de courbe représentative C_f dans un repère orthonormé.

- 1) Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 = 5$.
- 2) Déterminer une équation de la tangente D à C_f au point d'abscisse $x_0 = 5$ et étudier la position de C_f par rapport à D .

Opérations sur les dérivées

EXERCICE 2.5

Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et calculer sa dérivée :

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------------|---|
| 1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$ | 5) $f(x) = 5 \sin(x) + 2 \cos(x)$ | 9) $f(x) = (\sin(x))^2$ |
| 2) $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$ | 6) $f(x) = (3x - 2)x^3$ | 10) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{2 + x}$ |
| 3) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ | 7) $f(x) = 2x \cos(x)$ | 11) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2}{3x - 2}$ |
| 4) $f(x) = \frac{2}{x}$ | 8) $f(x) = \cos(x) \sin(x)$ | 12) $f(x) = (x^5 + 2x^3 + 4)^5$ |

EXERCICE 2.6

Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable, calculer sa dérivée et dresser le tableau des variations :

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| 1) $f(x) = x^3 - 3x - 2$ | 4) $f(x) = 2x + \frac{4}{x}$ |
| 2) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$ | 5) $f(x) = x \sin x$ |
| 3) $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ | 6) $f(x) = \sqrt{x+3}$ |

EXERCICE 2.7

Déterminer les extremums locaux de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = -x^2 + 4x - 8$ sur \mathbb{R} | 4) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$ |
| 2) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ sur \mathbb{R}^{*+} et \mathbb{R}^{*-} | 5) $f(x) = -x^3 + x^2$ sur \mathbb{R} |
| 3) $f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{2x-4}$ sur $]2; +\infty[$ | 6) $f(x) = \sin x - x$ sur \mathbb{R} |

Dérivée d'une fonction composée, dérivées successives

EXERCICE 2.8

Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer sa dérivée :

- | | |
|--|------------------------------|
| 1) $f(x) = (2x + 4)^2$ | 4) $f(x) = (x^2 + 2x - 4)^3$ |
| 2) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ | 5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ |

$$3) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$6) f(x) = \cos(\cos x)$$

EXERCICE 2.9

Calculer la dérivée de f sur l'ensemble indiqué :

$$1) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}} \quad \text{sur }]-1; 2[$$

$$4) f(x) = \sqrt{\cos x} \quad \text{sur } [0; \frac{\pi}{2}[$$

$$2) f(x) = \sqrt{4-x} \quad \text{sur }]-\infty; 4[$$

$$5) f(x) = \tan(3x) \quad \text{sur } [0; \frac{\pi}{6}[$$

$$3) f(x) = \frac{(2x+1)^2}{(3x+1)^3} \quad \text{sur } \mathbb{R} - \{-1/3\}$$

$$6) f(x) = \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^3} \quad \text{sur } [0; \frac{\pi}{2}[$$

EXERCICE 2.10 (CORRIGE)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

- 1) Montrer que pour tout réel x : $(1+x^2)f'(x) = xf(x)$.
- 2) Quelle relation vérifient $f''(x)$, $f'(x)$ et $f(x)$?

EXERCICE 2.11

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

- 1) Vérifier que pour tout x de \mathbb{R} : $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$.
- 2) En déduire que pour tout x de \mathbb{R} : $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$.

Etude de fonctions

EXERCICE 2.12

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que :

- 1) si f est impaire, alors f' est paire.
- 2) si f est paire, alors f' est impaire.
- 3) si f est T-périodique, alors f' est T-périodique (T réel).

EXERCICE 2.13

Etudier la fonction f définie par :

$$1) f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$2) f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+x+4}$$

$$3) f(x) = \left| \frac{x+1}{x-3} \right|$$

EXERCICE 2.14 🏠

- 1) On considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
 - a) Etudier les variations de P sur \mathbb{R} .
 - b) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule α dans l'intervalle $]1,6 ; 1,7[$.

- 2) Soit D l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1 . On considère la fonction f définie sur D par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra 4 cm comme unité).
 - a) Etudier les variations de f (utiliser les résultats de la première question).
 - b) Ecrire une équation de la tangente Δ à la courbe C au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite Δ dans l'intervalle $] -1 ; 1 [$.
 - c) Montrer que la courbe C_f est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1. Tracer la droite Δ , la tangente à C_f au point d'abscisse 1 et la courbe C_f .

EXERCICE 2.15 🏠

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)}$.

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f . Montrer que f est 2π -périodique.
- 2) Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. En déduire que la droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C_f .
- 3) Etudier les variations de f sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.
- 4) Tracer C_f à l'aide des questions précédentes.

EXERCICE 2.16 🏠

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$.

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1)
 - a) Etudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - b) Préciser les équations des asymptotes de C_f (pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}})$).
 - c) Tracer la courbe C_f .
- 2)
 - a) Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y = m$. Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de Δ et de C_f .
 - b) Pour tout $m > \sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de C_f . Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $]\sqrt{2} ; +\infty[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$.

EXERCICE 2.17 🏠 (CORRIGÉ)

On considère les fonctions f et g d'une variable réelle définies par :

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$$

- 1) Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
- 2) Étudier les variations de la fonction g sur \mathbb{R} . En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur \mathbb{R} une solution unique α , avec $0 < \alpha < 1$.
- 3) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 4) On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de C_f d'abscisse -1 et par J le point de C_f d'abscisse $+1$.
 - a) Vérifier que la droite (IJ) est la tangente en J à C_f .
 - b) Déterminer une équation de la tangente T en I à C_f .
- 5) Étudier la position de C_f par rapport à T .
- 6) Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe C_f (on prendra $\frac{2}{3}$ comme valeur approchée de α).

EXERCICE 2.18 🏠

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x\sqrt{3} - 2\sin(x)$ et de déterminer des valeurs approchées de la solution non nulle de l'équation $f(x) = 0$ qui appartient à l'intervalle $[0; \pi]$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- A - 1) a) Calculer la dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f' sur $[0; \pi]$.
b) Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$ et construire l'arc de courbe Γ correspondant (prendre 3 cm comme unité).
c) Étudier la parité de f . En déduire comment la courbe représentative C_0 de f sur $[-\pi; \pi]$ se déduit de Γ .
- 2) Pour tout nombre réel x , exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
En déduire que C se déduit de C_0 par des translations successives, que l'on précisera.

- B - 1) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left[\frac{\pi}{6}; \pi \right]$.

- b) Montrer que α appartient à l'intervalle $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right[$.

- 2) Soient p un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$ et Δ_p la tangente à C au point A_p d'abscisse p .

- a) Soit φ la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$ par : $\varphi(x) = f(x) - f'(p)(x - p) - f(p)$.

Étudier les variations de φ et déterminer le signe de $\varphi(x)$.

- b) En déduire que sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$, la courbe C est située au-dessus de Δ_p .

Tracer C sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$, en prenant 20 cm pour unité.

Chapitre III : EXPONENTIELLE, LOGARITHME, PUISSANCE

Définition, propriétés algébriques

EXERCICE 3.1

Ecrire plus simplement les nombres suivants :

$$A = \frac{e^{4x}}{(e^x)^2 e} \quad B = \frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}} \quad C = \ln(e^3 \sqrt{e})$$

$$D = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) \quad E = 3^{-\frac{1}{\ln 3}} \quad F = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$$

EXERCICE 3.2

Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a :

$$1) \quad 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$
$$2) \quad -1 + \frac{2}{1+x} \leq \frac{e^{-x}}{1+x} \leq \frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{2(1+x)}$$

EXERCICE 3.3

Ecrire plus simplement les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{32}}{8 \sqrt[8]{4}} \quad C = \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x}$$

$$B = 5^{\frac{2}{3}} \sqrt[6]{25} \quad D = \frac{\sqrt[5]{2^3} \sqrt[4]{\frac{1}{2^5}}}{\sqrt[6]{2^{-4}}}$$

Dérivation

EXERCICE 3.4

Pour chaque fonction, préciser sur quel intervalle (ou réunion d'intervalles) la fonction considérée est définie, dérivable et exprimer sa fonction dérivée.

$$1) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad 3) \quad g(x) = \ln(x^2 + 1) \quad 5) \quad h(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$$
$$2) \quad p(x) = 4^x \quad 4) \quad q(x) = \ln(1 + e^x) \quad 6) \quad r(x) = -\frac{3^x}{2^x}$$

EXERCICE 3.5

Vérifier que la fonction f est dérivable en tout point de I et calculez f' :

1) $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ sur $I =]2; +\infty[$

4) $f(x) = e^{x \ln x}$ sur $I =]0; +\infty[$

2) $f(x) = \ln(\ln(x))$ sur $I =]e; +\infty[$

5) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} e^x$ sur $I =]0; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$ sur $I =]-\infty; +\infty[$

6) $f(x) = (1-x)^{\frac{3}{2}}$ sur $I =]-\infty; 1[$

Equations, inéquations, systèmes

EXERCICE 3.6

Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

4) $\frac{e^x + 5}{5 + e^{-x}} = 1$

2) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

5) $e^{2x} - 14e^x + 33 = 0$

3) $(\ln x)^2 - 3 \ln(x) - 28 = 0$

6) $9e^{4x} - 25e^{2x} + 16 = 0$

EXERCICE 3.7

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(x-3) + \ln(2x+6) \leq 0$

4) $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$

2) $(\ln(x))^3 - 25 \ln(x) \geq 0$

5) $e^{2x-2} - e^{x-1} - 2 \geq 0$

3) $\ln(x+2) \leq \ln(8-2x)$

6) $e^{x^2-5x} \geq 1$

EXERCICE 3.8 (CORRIGE)

Résoudre les systèmes suivants :

1)
$$\begin{cases} \ln(x) \ln(y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 0 \\ \ln(x+y) = 1 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x^4 - 3y^{\frac{2}{3}} = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} - 3y^{\frac{4}{3}} = 648 \end{cases}$$

Limites, croissances comparées

EXERCICE 3.9

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{2e^x - 3}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 1)$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$

EXERCICE 3.10

Calculer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$:

1) $f(x) = \sqrt{1 + (\ln(x))^2}$ 2) $f(x) = x - \ln(x)$ 3) $f(x) = \frac{e^x}{x} - x$ 4) $f(x) = e^{\frac{-x^2+1}{x}}$

Etude de fonctions

EXERCICE 3.11

A. - La fonction numérique g est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3 \ln x + 6$.
En utilisant le sens de variation de g , déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

B. - La fonction numérique f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3 \ln(x)}{\sqrt{x}} + x - 1$.

- 1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 2) Utiliser la partie A. pour déterminer le sens de variation de f .
- 3) Soient Δ la droite d'équation $y = x - 1$ et C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormal du plan.
 - a) Montrer que Δ est asymptote à C_f et étudier la position relative de C_f et Δ .
 - b) Construire Δ et C_f .

EXERCICE 3.12 (CORRIGE)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$

- 1) Etudier la fonction f .
- 2) Soit C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormal du plan. Déterminer une équation de l'asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]$ et en déduire l'équation de l'asymptote à C_f en $+\infty$.

EXERCICE 3.13

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)$.

- 1) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et que $f'(x) = 2x - 2x \ln(x^2 + 1)$.
- 2) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- 3) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α , dans l'intervalle $[\sqrt{e-1} ; \sqrt{e^2-1}]$, tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner une approximation décimale à 10^{-2} près par défaut de α .
- 4) En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $[0 ; +\infty[$.

EXERCICE 3.14

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f . Etudier les variations de f .
- 2) Soit g la fonction telle que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $g(x) = f(x)$ et $g(0) = 0$.
Etudier la dérivabilité de g en 0.

- 3) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormal.

EXERCICE 3.15 🏠(CORRIGE)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- 1) Etudier la fonction f (ensemble de définition, parité, variations de f).
- 2) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un ensemble E à préciser.
- 3) Expliciter la fonction réciproque de f .
- 4) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de sa fonction réciproque.

EXERCICE 3.16 🏠

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x(1 - \ln(x))$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On appelle C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.
- 2) a) Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
b) Etudier les variations de f .
- 3) a) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse e .
b) Préciser la tangente à C_f au point d'abscisse 0. Tracer T et C_f .

EXERCICE 3.17 🏠

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = a e^{2x} + b e^x + c$, où a , b et c sont trois nombres réels.

C_f est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

- 1) a) Déterminer les nombres a , b et c sachant que C_f passe par O , que $f'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 0$ et que la

droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C_f .

b) Etudier la fonction f (limites et variations).

c) Déterminer les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses et construire C_f .

- 2) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur

$$\left] -\infty ; \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right[\cup \left] 0 ; +\infty \right[\text{ par : } g(x) = \ln(2e^{2x} - 3e^x + 1).$$

On désigne par C_g la courbe représentative de g .

a) Etudier la fonction g en précisant ses limites et ses variations.

b) Montrer qu'une droite est asymptote à C_g en $+\infty$, et donner son équation

(on pourra vérifier que l'on peut écrire : $g(x) = 2x + \ln\left(2 - \frac{3}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)$).

Propriétés algébriques, encadrements

EXERCICE 4.1

Démontrer l'inégalité suivante : $-\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) dx \leq \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 4.2

Donner la valeur moyenne des fonctions f sur l'intervalle indiqué :

- 1) $f(x) = 2x - 3$ sur $[0; 5]$
- 2) $f(x) = 2x^3$ sur $[0; 2]$
- 3) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ sur $[-2; 2]$

EXERCICE 4.3

En utilisant la relation de Chasles, calculer l'intégrale : $\int_{-2}^0 \left(|x+1| + \frac{4}{x-1} \right) dx$

EXERCICE 4.4

Trouver un encadrement des intégrales suivantes après avoir déterminé les extremums des fonctions sur l'intervalle d'intégration :

- 1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3(t)) dt$
- 2) $\int_2^3 \frac{\ln(t)}{t} dt$
- 3) $\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt$

Calcul de primitives

EXERCICE 4.5

Déterminer une primitive de f sur l'intervalle indiqué :

- 1) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
- 2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+1}}$ sur $I =]-\frac{1}{3}; +\infty[$
- 3) $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}_+$
- 4) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{4}$ sur $I = \mathbb{R}$
- 5) $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3+8)^3}$ sur $I =]-2; +\infty[$
- 6) $f(x) = e^{3x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 4.6

Trouver la primitive F de f sur I telle que :

- 1) $f(x) = \frac{3}{x}$ sur $I =]0 ; +\infty[$ avec $F(e) = 5$
- 2) $f(x) = x^3$ sur $I = \mathbb{R}$ avec $F(2) = 5$
- 3) $f(x) = -2 \sin(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$ avec $F(\frac{\pi}{4}) = 1$

EXERCICE 4.7

Justifier que f est continue sur $[a, b]$, et calculer $\int_a^b f(t)dt$ grâce à une primitive de f.

- 1) $f(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$, a = 0 et b = 1
- 2) $f(t) = \sin(t) \cos(t)$, a = $\frac{\pi}{4}$ et b = 0
- 3) $f(t) = \tan(t)$, a = $\frac{\pi}{4}$ et b = 0
- 4) $f(t) = \frac{1}{t^6}$, a = 1 et b = 2
- 5) $f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{1+2t^3}}$, a = 0 et b = 1
- 6) $f(t) = \frac{2t}{(t^2+1)^3}$, a = -1 et b = 0

Calcul d'intégrales

EXERCICE 4.8

En écrivant la fonction à intégrer comme une somme de fonctions simples, calculer :

$$\int_1^2 \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{x^2} dx .$$

EXERCICE 4.9

La fonction h est définie sur \mathbb{R}^* par $h(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$.

- 1) Déterminer a et b réels tels que pour tout x appartenant à \mathbb{R}^* : $h(x) = a + \frac{be^x}{e^x - 1}$.
- 2) Calculer $\int_1^2 h(x)dx$.

EXERCICE 4.10

En reconnaissant la dérivée d'une fonction composée, calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^1 \frac{4x}{(2x^2+1)^2} dx$
- 2) $\int_0^1 \frac{3e^x}{3e^x+1} dx$
- 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)(1+\tan^2(x)) dx$
- 4) $\int_0^3 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$
- 5) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$
- 6) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$

EXERCICE 4.11

Soient les intégrales suivantes : $A = \int_0^{\pi} x \cos^2(x) dx$ et $B = \int_0^{\pi} x \sin^2(x) dx$.

- 1) Calculer $A + B$ et $A - B$.
- 2) En déduire les valeurs de A et B .

Intégration par parties :

EXERCICE 4.12

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e x \ln(x) dx \quad B = \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(2x) dx$$
$$D = \int_0^1 \ln(2x+1) dx \quad E = \int_0^1 x e^x dx \quad F = \int_3^2 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) dx$$

EXERCICE 4.13

A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e x (\ln(x))^2 dx \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(3x) dx$$

EXERCICE 4.14

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^2 x^2 \ln(x) dx \quad B = \int_1^e \ln(x) dx \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$$
$$D = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx \quad E = \int_0^2 (x-2) e^{2x+1} dx \quad F = \int_{-1}^1 x e^{-x} dx$$

Calcul d'aires

EXERCICE 4.15

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 8}{(x-2)^2}$.

- 1) Montrer que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$, où a , b et c sont des réels que l'on déterminera.
- 2) Etudier et tracer C , courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.
- 3) Soit $S(m)$ l'aire limitée par C et les droites $D_1 : y = x + 1$; $D_2 : x = 4$; $D_3 : x = 4 + m$, avec $m > -2$.
 - a) Calculer $S(m)$.
 - b) Calculer $\lim_{m \rightarrow -2} S(m)$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} S(m)$.

EXERCICE 4.16

- 1) Soit $g : x \rightarrow 1 + e^x(x + 1)$. Etudier les variations de g . En déduire le signe de $g(x)$.
- 2) Etudier les variations de la fonction $f : x \rightarrow x + 2 + xe^x$.
- 3) Montrer que la représentation C de f admet pour asymptote la droite D d'équation : $x - y + 2 = 0$.
Déterminer la position de C par rapport à D . Tracer C (unité : 3 cm).
- 4) Calculer l'aire $A(\lambda)$, exprimée en cm^2 , du domaine défini par : $\lambda \leq x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq x + 2$
Déterminer la limite quand λ tend vers $-\infty$ de $A(\lambda)$.

EXERCICE 4.17

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2 + 1}$. C_f est la représentation graphique de f dans un plan muni d'un repère orthogonal (unité : 2cm). Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -x + \frac{3}{2}$. C_g est la représentation graphique de g . Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par C_f , C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$.

Etude de fonctions et intégrales :

EXERCICE 4.18 (CORRIGE)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

Pour tout nombre réel strictement positif α , on pose : $I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$.

- 1) Montrer que f est une fonction à valeurs positives. Quel est le signe de $I(\alpha)$?
- 2) a) Déterminer des réels a et b tels que pour tout nombre réel x , $\frac{e^x}{1 + e^x} = a + \frac{b}{1 + e^x}$.

En déduire le calcul de $\int_0^\alpha \frac{1}{1 + e^x} dx$.

- b) Calculer $f + f'$ où f' est la fonction dérivée de f .
- c) Calculer $I(\alpha)$.

EXERCICE 4.19

Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$

L'objectif est de calculer I , J et K .

- 1) Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$.
 - a) Calculer la fonction dérivée de la fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2 + 2}$.
 - b) En déduire la fonction dérivée f' de f .
 - c) Calculer la valeur de I .
- 2) Vérifier que $J + 2I = K$.
- 3) A l'aide d'une intégration par parties sur K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
- 4) En déduire les valeurs de J et K .

EXERCICE 4.20

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :
$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Soit C la courbe représentative de f et soit Δ la première bissectrice.

A - 1) Montrer que f est dérivable en 0.

2) a) Montrer que pour $x < 0$, on a $f'(x) > 0$.

b) Etudier les variations de f' sur $]0; +\infty[$. En déduire que pour $x > 0$, on a : $f'(x) > 0$.

c) Construire le tableau de variation de f .

3) a) Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

b) On admettra l'inégalité suivante : $1+t \leq e^t \leq \frac{1}{1-t}$ pour $t < 1$.

En déduire que pour $x < 0$, on a : $\frac{x}{x-1} \leq x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \leq 1$.

c) Que vaut $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$? Montrer que la courbe C admet la droite D d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $-\infty$.

d) Préciser la position de C par rapport à D pour $x < 0$.

4) Construire C et préciser l'intersection de C et de Δ .

B - 1) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$, on ait :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

2) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que f admet pour primitive sur \mathbb{R}^+ la

fonction : $x \mapsto \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2-2x)$.

3) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par Δ , C et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = e - 1$.

EXERCICE 4.21 (CORRIGE)

A - Soit la fonction f définie sur $] -1 ; 0]$ par : $f(x) = \ln(1-x^2) - x$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

1) Déterminer la limite de f en -1 . Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2) Etudier les variations de f .

3) Donner le coefficient directeur de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse 0.

4) Tracer D et C .

5) On admet que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions 0 et α . Vérifier que α appartient à l'intervalle $] -0,72 ; -0,71 [$.

B - 1) Vérifier l'égalité $\int_{\alpha}^0 \ln(1-x^2)dx = \int_{\alpha}^0 \ln(1+x)dx + \int_{\alpha}^0 \ln(1-x)dx$.

2) A l'aide d'intégrations par parties, calculer en fonction de α les intégrales :

$$I = \int_{\alpha}^0 \ln(1+x)dx \quad \text{et} \quad J = \int_{\alpha}^0 \ln(1-x)dx$$

3) Calculer en fonction de α l'intégrale $K = \int_{\alpha}^0 f(x)dx$.

4) Soit A l'aire, exprimée en cm^2 , de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C, et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

a) Calculer A en fonction de α .

b) Montrer qu'en prenant $\alpha = -0,71$, on obtient une valeur approchée de A par défaut.

EXERCICE 4.22

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -x e^{2x+1}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

1) a) Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de f(x) ?

b) Étudier le sens de variation de f.

c) Déterminer les limites de f en plus et $+\infty$ et $-\infty$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Soit x un réel quelconque. En intégrant par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t e^{2t} dt .$$

b) Soit x un réel négatif. Calculer l'aire A(x), exprimée en cm^2 , de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées (u, v) vérifient:

$$\begin{cases} x \leq u \leq 0 \\ 0 \leq v \leq f(x) \end{cases}$$

c) Calculer A(-1) .

Equations différentielles

EXERCICE 4.23

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = \frac{2}{3}y$

2) $3y' + 2y = 0$

3) $\frac{1}{5}y' - 2y = 0$

EXERCICE 4.24

Mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ (a et b réels) et la résoudre:

1) $y' + 4y = 5$

2) $y' + 2 = 5y$

3) $y' - 2y - 3 = 0$

EXERCICE 4.25

Soient f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et C sa courbe représentative.
Déterminer f telle que :

- pour tout x de \mathbb{R} : $f'(x) - 2f(x) = 0$
- le point $A(2 ; -1)$ est un point de C

EXERCICE 4.26

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

- 1) Montrer que la fonction g , définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x e^{2x}$ est solution de (E).
- 2) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$.
- 3) Démontrer qu'une fonction f , définie sur \mathbb{R} , est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0).
- 4) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
- 5) Déterminer la fonction solution de l'équation (E) qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE 4.27

Soit l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = x^2 + 1$.

- 1) Déterminer a , b et c tels que la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
- 2) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $2y' + 3y = 0$.
- 3) Démontrer qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0). En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Principe de récurrence

EXERCICE 5.1

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, où n est un entier naturel, $n \geq 1$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 5.2

Pour tout entier naturel n , on note la proposition $P_n : 3^n \geq (n+2)^2$.

- 1) P_0, P_1, P_2, P_3 sont-elles des propositions vraies ?
- 2) Démontrer par récurrence que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq 3$.

EXERCICE 5.3

Soit n un entier naturel. On définit la suite (u_n) par :
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

- 1) $u_n < 6$.
- 2) $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$.

Suites arithmétiques et géométriques

EXERCICE 5.4

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$.

Déterminer les valeurs de q telles que $2u_2 = 3u_1 - u_0$ et calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

EXERCICE 5.5

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$, de raison 2.

Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

EXERCICE 5.6 (CORRIGE)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n}{4 + u_n}$.

- 1) Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $u_n \neq 1$.
- 2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2 + u_n}{1 - u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
- 3) Calculer la raison q de v_n , le premier terme v_0 et le terme général v_n .
- 4) (v_n) est-elle convergente ?
- 5) Etudier la convergence de (u_n) .

EXERCICE 5.7

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2) Montrer que $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.
- 3) En déduire par récurrence qu'on a toujours $u_n > 1 > \frac{1}{2}$ et donc que la suite (u_n) est bien définie pour tout n .
- 4) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est une suite arithmétique.
- 5) Ecrire v_n puis u_n en fonction de n .

Comportements asymptotiques

EXERCICE 5.8

Etudier la limite de la suite (u_n) à l'aide d'un théorème de comparaison :

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 1) $u_n = \cos n - n$ | 3) $u_n = 2n + (-1)^n$ |
| 2) $u_n = \frac{3 - \sin n}{n}$ | 4) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ |

EXERCICE 5.9

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- 1) Montrer que la suite est majorée par 2.
- 2) Montrer que $0 < 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$
- 3) En déduire que $0 < 2 - u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 4) Montrer que la suite $(2 - u_n)$ converge vers 0. En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 5.10

On définit les suites réelles (u_n) et (v_n) par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \end{cases} \text{ et } v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}} .$$

- 1) Montrer que pour $n \geq 0$, on a $v_{n+1} = v_n^2$. En déduire la relation $v_n = v_0^{2^n}$.
- 2) Montrer que $v_0 = \frac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$, et en déduire la majoration : $|v_0| < \frac{1}{16}$.
- 3) Déterminer alors la limite de (v_n) , puis celle de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 5.11

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

- 1) a) Etudier les variations et tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{3x+4}$.
b) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
- 2) a) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 4.
b) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante, et en déduire qu'elle converge.
- 3) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $4 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - u_n)$.
b) En déduire la limite de (u_n) .
c) Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par : $v_n = n^2(4 - u_n)$.

EXERCICE 5.12 (CORRIGE)

- 1) a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+2^{-n})}{2n} = 0$, et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+n2^n)}{2n} = \frac{\ln 2}{2}$.
- 2) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} dx$.
 - a) Calculer u_0 , puis le terme général u_n pour tout entier n supérieur à 1.
 - c) En utilisant les questions précédentes, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Suites monotones

EXERCICE 5.13

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 8$, $u_1 = \frac{11}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - u_{n-1}}{2}$ pour $n > 1$.

- 1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est strictement monotone.
- 3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 3 + \frac{5}{2^n}$.
- 4) En déduire que la suite (u_n) est bornée.

EXERCICE 5.14

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$. Montrer que pour tout n : $1 \leq u_n \leq 3$.

EXERCICE 5.15

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$.

- 1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- 2) Montrer que pour tout n : $u_n \geq n$.
- 3) Déterminer la limite de (u_n) .

Suites adjacentes

EXERCICE 5.16

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n > 0$ sont adjacentes puis trouver leur limite commune :

$$1) u_n = \frac{n-1}{n} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{n^2} \qquad 2) u_n = 5 - \frac{1}{n} \text{ et } v_n = 5 + \frac{2}{n}$$

EXERCICE 5.17

Les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ sont-elles adjacentes ?

Etude de suites

EXERCICE 5.18

Soit n un entier naturel et soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

- 1) En intégrant par parties, montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
- 2) Calculer I_0 , I_1 et prouver par récurrence que :
$$I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \times \frac{\pi}{2} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1} \text{ pour } n \geq 0.$$
- 3) a) Montrer que $I_n - I_{n+1}$ est l'intégrale d'une fonction positive et que (I_n) est décroissante.
b) Montrer que $\frac{n-1}{n} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.
c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.
- 4) Etablir la formule de Wallis :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

EXERCICE 5.19 (CORRIGE)

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ où $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$.

- 1) Calculer la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$, x étant un point donné de $[0; 1[$.
- 2) Calculer u_0 . Calculer u_1 , à l'aide d'une intégration par parties.
- 3) Comparer x^n et x^{n+1} pour $x \in [0; 1]$. En déduire que (u_n) est décroissante.
- 4) Déterminer le maximum et le minimum de la fonction : $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur $[0; 1]$.
En déduire un encadrement de u_n . Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- 5) Justifier que $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x} dx$, puis établir que $u_{n+1} + u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.
- 6) A l'aide des résultats précédents, montrer que : $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}$.
En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 5.20

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1; +\infty [$ par : $f(x) = \ln(1+x)$.

On note (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

- 1) Donner un tableau de valeurs approchées à 10^{-2} près des termes de la suite d'indices 1, 2, 3, 4, 5 et 10.
- 2) Tracer, dans un repère orthonormal, la représentation graphique C_f de f et la droite d'équation $y = x$. Construire les points d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 , en laissant les traits de construction apparents.
- 3) Que peut-on prévoir pour le comportement de la suite ?
- 4) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , u_n est positif.
- 5) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur l'intervalle $] -1; +\infty [$ par :
$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

En déduire que, pour tout réel strictement positif x , on a : $0 < \ln(1+x) < x$.
Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 6) Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) converge et que sa limite est 0.

EXERCICE 5.21

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. On note $g^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de g .

- 1) a) Montrer par récurrence que g est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x ,
 $g^{(n)}(x) = (-1)^n (x^2 + u_n x + v_n) e^{-x}$ où u_n et v_n sont des nombres réels.
b) Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n .
- 2) a) Calculer u_n en fonction de n .
b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $v_n = n^2 - 3n + 1$.
En déduire l'expression de $g^{(n)}(x)$, pour tout réel x .

EXERCICE 5.22

On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$.

On définit la suite (v_n) sur \mathbb{N}^* par :
$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = h(v_n), n \geq 1 \end{cases}$$

1) a) Exprimer $h\left(\frac{1}{n}\right)$ en fonction de n .

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $h\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.

2) a) Déterminer $h'(x)$.

b) Quel est le sens de variation de h sur $[0; 1]$?

3) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \leq v_p \leq \frac{1}{p}$. Justifier que $0 \leq v_{p+1} \leq \frac{1}{p+1}$.

b) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n}$.

4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Justifier la réponse.

EXERCICE 5.23

Soit la suite (I_n) définie pour tout n entier naturel par l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx} dx}{e^x + 1}$.

1) Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0 .

2) Pour tout entier $n > 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

3) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

4) Prouver que pour tout entier n et tout x de $[0; 1]$: $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x + 1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$.

En déduire un encadrement de I_n .

5) A partir de cet encadrement, déterminer les limites de I_n et de $\frac{I_n}{e^n}$.

Dénombrements, Binôme de Newton

EXERCICE 6.1

Un restaurant propose des repas composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Les clients ont le choix entre 5 entrées, 4 plats et 3 desserts. Calculer le nombre de repas différents possibles.

EXERCICE 6.2

Montrer que : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

EXERCICE 6.3

Démontrer les égalités suivantes par le calcul :

1) Pour p et n entiers positifs avec $p \leq n-2$: $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2 \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$.

2) Pour p et n entiers positifs avec $0 \leq p \leq n$: $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$.

(On pourra d'abord montrer que pour $0 \leq k \leq p \leq n$: $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}$)

EXERCICE 6.4

Dans une assemblée de 10 personnes, toutes se serrent la main.
Quel est le nombre de poignées de mains échangées ?

EXERCICE 6.5 (CORRIGE)

Une urne contient 6 boules blanches, 4 rouges et 5 vertes.

- 1) On tire simultanément 3 boules de cette urne.
 - a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - b) Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
 - c) Combien y a-t-il de tirages tricolores ?
 - d) Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule blanche ?
- 2) Maintenant, on tire les 3 boules successivement en remettant à chaque fois la boule dans l'urne. Répondre aux questions a), b), c) et d) précédentes.

EXERCICE 6.6

Une urne contient cinq billets de 200 €, quatre billets de 100 € et deux billets de 50 €. On tire au hasard et simultanément quatre billets de l'urne.

- 1) Combien y a-t-il de tirages distincts ?
- 2) Combien y a-t-il de tirages dont la somme des valeurs des billets est 400 €.

EXERCICE 6.7

On inscrit sur huit cartons les mots ou groupes de mots suivants : « me font », « mourir », « yeux », « Marquise », « belle », « d'amour », « vos » et « beaux ». Les huit cartons sont placés dans une boîte ; on les tire les uns après les autres, on les place côte à côte à partir de la gauche dans l'ordre de tirage, de façon à former une phrase (avec un sens ou non). Combien peut-on ainsi former de phrases ?

EXERCICE 6.8

On dispose de n boules B_1, B_2, \dots, B_n à placer chacune dans une des n cases C_1, C_2, \dots, C_n . On dit que la boule B_i est mal placée si elle est placée dans une case C_j avec $i \neq j$. Puis, on dit qu'un placement des n boules dans les n cases contient p dérangements si exactement p boules sont mal placées. Pour $p \leq n$, on note $D(n,p)$ le nombre de placements possibles de n boules contenant p dérangements. Le but est de déterminer $D(n,p)$. Enfin, on pose $D(0,0) = 1$.

- 1) Calculer $D(n,0)$, $D(n,1)$ et $D(n,2)$ en fonction de n .
- 2) Montrer que : $D(n,p) = \binom{n}{p} D(p,p)$
- 3) Calculer $D(1,1)$ et $D(2,2)$.
- 4) Montrer que : $D(n,n) = n! - \binom{n}{0} D(0,0) - \dots - \binom{n}{n-1} D(n-1,n-1)$

Probabilités, Variable aléatoire

EXERCICE 6.9

- 1) Soit A et B deux événements indépendants. Montrer qu'il en est de même pour : A et \overline{B} , \overline{A} et B , \overline{A} et \overline{B} .
- 2) Au tir à l'arc, les deux événements « A atteint la cible » et « B atteint la cible » sont indépendants et de probabilités respectives $\frac{4}{5}$ et $\frac{7}{8}$. On considère que les deux archers tirent simultanément.
Calculer la probabilité des événements suivants :
 - a) A et B atteignent tous les deux la cible.
 - b) Seul A atteint la cible.
 - c) La cible a été manquée.
 - d) La cible a été atteinte.
 - e) Un seul tireur atteint la cible.

EXERCICE 6.10

Un dé est lancé 10 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6 ?

EXERCICE 6.11

Dans une ville, 40% de la population a les cheveux blonds, 50% les yeux bleus et 35% les cheveux blonds et les yeux bleus. On choisit une personne au hasard.

Quelle est la probabilité :

- 1) pour qu'elle ait les yeux bleus, sachant qu'elle a les cheveux blonds ?
- 2) pour qu'elle n'ait pas les cheveux blonds, sachant qu'elle a les yeux bleus ?

EXERCICE 6.12

Un sac contient douze boules. Sept sont rouges parmi lesquelles trois sont unies et quatre tachetées. Cinq sont blanches parmi lesquelles deux sont unies et trois tachetées. Ces boules sont indiscernables au toucher.

- 1) Un joueur tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir une boule rouge sachant qu'elle est tachetée ?
- 2) Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir une boule rouge exactement sachant qu'une des deux boules (au moins) est tachetée ?
- 3) Un joueur tire deux boules successivement et sans remise. Quelle est la probabilité qu'il tire d'abord une boule tachetée et ensuite une boule unie ?

EXERCICE 6.13

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1. On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.

On note A l'événement : « les deux dés tirés sont normaux ».

On note B l'événement : « les deux faces obtenues sont numérotées 6 ».

- 1) Calculer les probabilités de A et de son événement contraire \bar{A} .
- 2) Calculer $P_A(B)$, probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $P(B \cap A)$.
- 3) Calculer $P(B)$.
- 4) Calculer $P_B(A)$, probabilité de A sachant que B est réalisé.

EXERCICE 6.14

Un sac contient quatre jetons marqués 0, 1, 2 et 3. On tire deux jetons l'un après l'autre et l'on désigne par X la variable aléatoire « plus grand nombre tiré » (n'importe lequel en cas d'égalité). Donner la loi de probabilité de X, l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ dans chacun des cas suivants :

- 1) Le tirage est effectué sans remise.
- 2) Le tirage est effectué avec remise.

EXERCICE 6.15

On dispose d'une urne contenant 5 boules noires et 15 boules rouges. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Le joueur tire simultanément trois boules.

- 1) Calculer la probabilité que le joueur sorte 0, 1, 2 ou 3 boules noires.
- 2) Le joueur gagne 5 € par boule noire obtenue. Soit X la variable aléatoire désignant le gain du joueur. Calculer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

EXERCICE 6.16

On peint 6 faces d'un cube de bois d'arête trois centimètres. On le débite, par des coups de scie parallèles aux plans des faces, en 27 petits cubes d'arête un cm. On place ces 27 petits cubes dans un sac. On tire au hasard et sans remise deux cubes du sac, les tirages étant supposés équiprobables. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre total de faces peintes que présentent les deux cubes tirés.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X.
- 2) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

EXERCICE 6.17

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si une dame est tirée, 0 dans le cas contraire.

Y est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si un cœur est tiré, 0 dans le cas contraire.

Soit les événements : A : « la carte tirée est la dame de cœur ».

B : « la carte tirée est une dame qui n'est pas de cœur »

C : « la carte tirée est un cœur qui n'est pas une dame ».

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X et celle de Y .
- 2) Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ et en déduire la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) . Présenter les résultats sous forme d'un tableau.
- 3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Lois de Probabilité

EXERCICE 6.18 (CORRIGE)

On lance cinq dés simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux 1 ?

EXERCICE 6.19

On considère une urne contenant 5 boules rouges et 7 boules noires.

On admettra que tous les tirages éventuels sont équiprobables et on exprimera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

- 1) On tire simultanément 2 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements :
 - a) « on a tiré 2 boules rouges. »
 - b) « on a tiré 2 boules de même couleur. »
- 2) On répète six fois l'épreuve qui consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne en remettant les boules dans l'urne après l'épreuve (les épreuves successives sont donc indépendantes).

On considère comme un succès le tirage de 2 boules rouges à une épreuve.

Soit X la variable aléatoire « nombre de succès obtenus au cours des six épreuves ».

a) Quelle est la formule donnant, en fonction de k , la probabilité de l'événement $(X = k)$ où k est un entier ?

b) Quels sont l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire X ?

EXERCICE 6.20 (CORRIGE)

Un jeu comporte 16 cartes : 4 valets, 4 dames, 4 rois et 4 as. L'épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux cartes du jeu et à les remettre dans le jeu après avoir noté les cartes tirées.

- 1) On effectue une épreuve. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux as ?
- 2) On répète trois fois l'épreuve, on suppose que les tirages sont indépendants. Un joueur met une mise de 5 F.

S'il n'obtient pas deux as, il perd sa mise.

S'il obtient 1 fois deux as, on lui rembourse sa mise, plus 10 F.

S'il obtient 2 fois deux as, on lui rembourse sa mise, plus 50 F.

S'il obtient 3 fois deux as, on lui rembourse sa mise, plus 100 F.

Soit X la variable aléatoire définie par le gain algébrique du joueur après 3 tirages.

Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance mathématique de X .

EXERCICE 6.21

Un dé cubique a quatre faces blanches et deux faces noires. Quand on le lance, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

- A) On lance ce dé une fois. Quelle est la probabilité d'avoir :
- 1) une face supérieure blanche ?
 - 2) une face supérieure noire ?
- B) On répète cette épreuve cinq fois de suite, les lancers étant indépendants.
- 1) a) Quelle est la probabilité pour qu'une face noire apparaisse exactement une fois ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'une face noire apparaisse au moins une fois ?
 - 2) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de faces noires sorties. Quelle est la loi de probabilité de X et son espérance mathématique ?

EXERCICE 6.22

Dans un sac sont placés dix jetons : six jetons portent le numéro 1 et les autres le numéro 3. On tire simultanément trois jetons du sac et on appelle A l'événement « la somme des numéros sortis est strictement inférieure à 7 »

- 1) Calculer la probabilité de l'événement A .
- 2) On recommence quatre fois de suite le tirage précédent en remettant à chaque fois dans le sac les jetons tirés. Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise exactement trois fois ? Au moins trois fois ?

EXERCICE 6.23

On a rangé en vrac, dans une boîte, neuf cartes postales indiscernables au toucher. Cinq de ces cartes proviennent de France, une provient d'Australie et trois des USA.

- 1) On tire simultanément et au hasard trois cartes de la boîte.
 - a) Démontrer que la probabilité de n'obtenir aucune carte de France parmi les trois cartes tirées est égale à $\frac{1}{21}$.
 - b) Calculer la probabilité des événements E_1 : « lors d'un tirage, on obtient une carte de chaque pays » et E_2 : « lors d'un tirage, on obtient au moins une carte de France ».
 - c) X est la variable aléatoire comptant, pour chaque tirage de trois cartes, le nombre de cartes de France obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X (les résultats seront regroupés dans un tableau sous forme de fractions irréductibles).
- 2) On répète ce tirage 5 fois de suite en remettant à chaque fois les 3 cartes tirées dans la boîte.
 - a) Quelle est la probabilité de l'événement E_3 : « lors de ces 5 tirages, on obtient deux fois seulement aucune carte de France » ?
 - b) On répète n fois de suite ce tirage en remettant à chaque fois les trois cartes tirées dans la boîte. A partir de quelle valeur de n la probabilité d'obtenir au moins 1 tirage sans carte de France est-elle supérieur ou égale à 0,95 ?

EXERCICE 6.24

Vous arrivez à un arrêt de bus à 10 heures sachant que le bus arrivera à un certain instant qui suit la loi uniformément distribuée entre 10 h et 10 h 30.

- 1) Quelle est la probabilité que votre attente dure dix minutes ou plus ?
- 2) Si à 10 h 15, le bus n'est pas encore arrivé, quelle est la probabilité que votre attente dure au moins 10 minutes supplémentaires ?

EXERCICE 6.25

Montrer que la fonction f est la densité d'une loi de probabilité P et calculer la probabilité de l'événement A :

- 1) $I = [0, 1]$ avec $f(x) = 2x$ et $A = \left[\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right]$
- 2) $I = [0, n]$ ($n > 0$, entier) avec $f(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{n-1}$ et $A = [0, a]$ ($0 \leq a \leq n$)
- 3) $I = [-1, 1]$ avec $f(x) = 1 - |x|$ et $A = [a, b]$ ($-1 \leq a < b \leq 1$)

EXERCICE 6.26

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle.

- 1) Trouver le paramètre de cette loi sachant que $P(X \leq 80) = 0,05$.
- 2) En déduire $P(X = 20)$ et $P(X > 20)$.

EXERCICE 6.27

Soit θ un réel strictement positif.

- 1) Soit u un réel appartenant à $[0, 1]$. On pose $x = -\frac{\ln(1-u)}{\theta}$. Montrer que pour tout $x \geq 0$ et que pour tout réel $a \geq 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes : $x \leq a$ et $u \leq 1 - e^{-\theta a}$.
- 2) En déduire que, si la variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la variable aléatoire $X = -\frac{\ln(1-U)}{\theta}$ suit la loi exponentielle de paramètre θ .
- 3) Construire un échantillon de 100 nombres distribués selon la loi exponentielle de paramètre 2, en simulant le tirage de 100 nombres au hasard dans $[0, 1]$.

Calculs dans \mathbb{C}

EXERCICE 7.1

On pose $\alpha = \frac{3-i}{5+7i}$ et $\beta = \frac{3+i}{5-7i}$.

Montrer que $\alpha + \beta$ est un réel et que $\alpha - \beta$ est un imaginaire pur.

EXERCICE 7.2

On donne le nombre complexe $z = \frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$.

- 1) Écrire z sous forme algébrique.
- 2) Calculer le module et l'argument de z .

EXERCICE 7.3

Mettre sous la forme « $a + ib$ » les nombres complexes suivants :

- 1) $\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}$
- 2) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$
- 3) $i + \frac{1}{i}$

EXERCICE 7.4

Montrer que, pour tout complexe z non nul, on a :

$$\overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} - \frac{1+\overline{z}}{\overline{z}} = \overline{z} - 1$$

Module et Argument

EXERCICE 7.5

z et z' sont deux complexes tels que : $\overline{z z'} = z' \overline{z} = 1$ et $z z' \neq -1$.

Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

EXERCICE 7.6

Soit z un nombre complexe. Montrer que si $\left| \frac{1-iz}{1+iz} \right| = 1$, alors z est réel.

EXERCICE 7.7

Soient les nombres complexes $u = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $v = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Déterminer le module et un argument de u , v et uv . En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Forme trigonométrique et Exponentielle

EXERCICE 7.8

Soient les nombres complexes : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Mettre sous forme trigonométrique z_1 , z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

En déduire que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2) On considère l'équation d'inconnue réelle x : $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) = 2$. Résoudre cette équation dans l'ensemble des réels. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 7.9

En utilisant la notation exponentielle, déterminer le module et un argument de chacun des quotients :

$$1) \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \quad 2) \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}} \quad 3) \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

EXERCICE 7.10 (CORRIGE)

Soient les nombres complexes $z_1 = 3 + 3i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Ecrire sous forme trigonométriques les complexes : z_1 , z_2 , $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ et z_1^3 .

EXERCICE 7.11

Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$.

On pose $Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

- 1) Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
- 2) En déduire une forme exponentielle de Z .
- 3) Calculer alors la forme algébrique de Z .

Equations

EXERCICE 7.12 (CORRIGE)

Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 + (4i - 6)z^2 + (13 - 24i)z + 52i$.

- 1) Montrer que ce polynôme admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
- 2) Factoriser $P(z)$.
- 3) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des complexes.

EXERCICE 7.13

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} les équations $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$.
- 3) Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z tel que :
 $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$.

Vérifier que pour tout z non nul, on a : $\frac{P(z)}{z^2} = (z + \frac{1}{z})^2 - (1 + \sqrt{2}) (z + \frac{1}{z}) + \sqrt{2}$.

- 4) En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 7.14

Soit α un réel appartenant à $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

On considère l'équation (E) : $(1 + iz)^3(1 - i \tan(\alpha)) = (1 - iz)^3(1 + i \tan(\alpha))$ (E).

- 1) Soit z une solution de (E). Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$. En déduire que z est réel.
- 2) a) Exprimer $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.
b) Soit z un réel. On pose $z = \tan \varphi$, avec $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Montrer que (E) équivaut à une équation d'inconnue φ et résoudre cette nouvelle équation.
c) Déterminer les solutions z_1, z_2 et z_3 de (E).

EXERCICE 7.15

Aux coordonnées (a, b) d'un point M du plan P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on associe l'équation (E) d'inconnue complexe z : $z^2 - 2az + b = 0$.

- 1) Résoudre (E) si M a pour coordonnées $(2, 4)$ puis si M a pour coordonnées $(1, 5)$.
- 2) Trouver et représenter dans P :
 - l'ensemble des points M tels que l'équation (E) admette une solution double.
 - l'ensemble des points M tels que l'équation (E) admette deux solutions non réelles.

Vecteurs, Ensembles de points et Transformations

EXERCICE 7.16

Soit a un nombre complexe non nul et soit j tel que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que les trois points d'affixes respectives a , ja et j^2a sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

EXERCICE 7.17

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^3 - (1 - i)z^2 - (2 - 2i)z + 8 = 0$.

- 1) a) Vérifier que $1 + i$ est une solution de (E).
b) Montrer que (E) admet une solution réelle.
c) Achever la résolution de (E).
- 2) Soient A, B et C les images dans le plan complexe des solutions de (E). Construire ces points et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

EXERCICE 7.18

A, B, M et M' sont quatre points du plan d'affixes a , b , z et z' . Exprimer z' en fonction de a , b et z dans chacun des cas suivants :

- 1) M' est le symétrique de M par rapport à A.
- 2) M' est l'image de M par la translation de vecteur \vec{AB} .
- 3) M' est le symétrique de M par rapport à la parallèle à l'axe réel qui passe par A.

EXERCICE 7.19

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. On note A le point d'affixe $4 + 2i$, B le point d'affixe $-2 - i$ et M le point d'affixe z . Soit le nombre complexe $Z = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$.

- 1) Donner une signification géométrique de $|Z|$ et de $\arg Z$.
- 2) Préciser la nature puis construire :
 - l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 1$.
 - l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 2$.
 - l'ensemble des points M d'affixe z , tels que Z est un réel positif.
 - l'ensemble des points M d'affixe z , tels que Z est un imaginaire pur.

EXERCICE 7.20 (CORRIGE)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z + 9 = 0$

Déterminer le module et un argument des solutions z_1 et z_2 , puis donner l'écriture exponentielle de z_1 et z_2 .

- 2) Placer dans le plan P rapporté à un repère orthonormal direct, d'unité graphique 1 cm, les images M_1 et M_2 de z_1 et z_2 . Expliquer pourquoi M_1 et M_2 sont situés sur le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 3.

EXERCICE 7.21

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct, d'unité graphique 1 cm, placer les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = -4 + 4i$ et $c = -4i$.

- 1) a) Ecrire a , b et c sous forme trigonométrique.
b) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
- 2) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme A en A', B en B' et C en C'.
a) Construire les points A', B' et C'.
b) Soit a' , b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.
Etablir que $b' = -2(1 + \sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3})i$. Calculer a' et c' .
- 3) a) Déterminer les affixes p , q et r des points P, Q et R, milieux respectifs des segments [A'B], [B'C] et [C'A].
b) Démontrer que $r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$. En déduire la nature du triangle PQR.

EXERCICE 7.22

Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z distincte de $2 - i$ associe le point M'

d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z + 3 - 2i}{z - 2 + i}$.

- 1) Interpréter géométriquement le module de z' .
- 2) En déduire l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.
- 3) Interpréter géométriquement l'argument de z' .
- 4) En déduire l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.
- 5) Retrouver le résultat de la question 2 par le calcul.
- 6) Retrouver le résultat de la question 4 par le calcul.

Chapitre VIII : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Produit scalaire dans l'espace

EXERCICE 8.1

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées A (4 , 1 , -2) ; B (-1 , 2 , 4) ; C (0 , 2 , -5) et D (1 , - 2 , - $\frac{7}{2}$). M est le milieu du segment [AB] .

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$, $\vec{DB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{MB} \cdot \vec{CD}$.

EXERCICE 8.2

Soit ABC un triangle. Soient a, b et c les longueurs respectives des longueurs [BC], [AC] et [AB] . A' désigne le milieu de [BC]. G est l'isobarycentre de ABC. On rappelle que si G est

l'isobarycentre du triangle ABC, on a : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

1) Montrer que pour tout point M de l'espace :

$$2 \vec{MA} \cdot \vec{MA'} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} = 3 MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} .$$

2) En déduire que les points d'intersection des cercles de diamètres [AA'] et [BC], s'ils existent, appartiennent aussi à un cercle de centre G dont on précisera le rayon.

EXERCICE 8.3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A (13 , -11 , 10) ; B (13 , 9 , 25) ; C (-7 , 18 , 13) et D (-7 , -2 , -2) . Quelle est la nature de la figure ABCD ?

EXERCICE 8.4 (CORRIGE)

On considère un tétraèdre régulier ABCD. L'objet de cet exercice est de montrer que quelque soit le point M du segment [BC] et quel que soit le point N du segment [BD], la mesure de l'angle

MAN est inférieure ou égale à $\frac{\pi}{3}$.

On pose $x = BM$ et $y = BN$, on désigne par a l'arête du tétraèdre.

1) Montrer que $MA^2 = a^2 + x^2 - ax$, que $NA^2 = a^2 + y^2 - ay$ et que :

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \frac{a^2 + (a-x)(a-y)}{2} .$$

2) En déduire les inégalités suivantes : $AM \leq a$; $AN \leq a$ et $\vec{AM} \cdot \vec{AN} \geq \frac{a^2}{2}$.

3) Conclure.

Orthogonalité

EXERCICE 8.5

On considère les points A et B de coordonnées : A (1 , 1 , $\sqrt{2}$) et B ($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 0) .
Le point C est le symétrique de A par rapport à l'origine O du repère.
Prouvez que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

EXERCICE 8.6

Le triangle BCD a pour orthocentre H, et A est un point distinct de H appartenant à la perpendiculaire en H au plan (BCD). Montrer que les arêtes AB et CD du tétraèdre ABCD sont orthogonales. Même question pour les arêtes AC et BD, puis pour les arêtes BC et AD.

EXERCICE 8.7 (CORRIGE)

ABCDE est une pyramide de base ABCD.

ABCD est un carré de centre O et $EA = EB = EC = ED = 2a$ avec $OA = a$.

- 1) Montrer que la droite (EO) est orthogonale au plan (ABCD).
- 2) Déterminer suivant les valeurs de k l'ensemble des points M tels que :
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k a^2$

Equation cartésienne d'un plan

EXERCICE 8.8

Soit un repère orthonormé (O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}) .

- 1) Donner l'équation du plan P normal au vecteur \vec{n} et passant par le point A :
 - a) A (1 ; -2 ; 3) et \vec{n} (0 ; 1 ; -1) .
 - b) A (2 ; 3 ; -4) et \vec{n} (-2 ; 5 ; 6) .
- 2) Donner l'équation du plan Q parallèle au plan P et passant par A :
 - a) A (1 ; 0 ; -1) et P : $2x - 3y + 2z + 7 = 0$.
 - b) A (-1 ; 2 ; -3) et P : $-x + 4y + 5z - 8 = 0$.

EXERCICE 8.9

Dans chacun des cas trouver la distance du plan P au point A :

- 1) A (1 ; 0 ; -1) et P : $2x - 3y + 2z + 7 = 0$.
- 2) A (-1 ; 2 ; -3) et P : $-x + 4y + 5z - 8 = 0$.
- 3) A (-2 ; -2 ; -3) et P : $x + 2y + 3z - 4 = 0$.

EXERCICE 8.10

- 1) Déterminer une équation du plan (P) passant par A (-1 , 3 , 5) et de vecteur normal $\vec{n} (2 , -1 , -1)$.
- 2) Déterminer une équation du plan (P) passant par A (2 , 3 , 1) et admettant pour vecteurs directeurs $\vec{u} (2 , 1 , -3)$ et $\vec{v} (1 , 1 , 1)$.

EXERCICE 8.11

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 1$ et soit P' le plan d'équation $x - z = 0$.

- 1) Calculer la distance d'un point $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ aux plans P et P'.
- 2) En déduire que l'ensemble des points M de l'espace équidistants de P et de P' est la réunion de deux plans perpendiculaires.

Barycentres :

EXERCICE 8.12

Soit ABCD un rectangle. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| 3\vec{MA} + 2\vec{MB} \| = \| 6\vec{MC} - \vec{MD} \| .$$

EXERCICE 8.13

Soit AIJ un triangle non aplati. Soit B le barycentre de (A,-1) et (I,2) et soit C le barycentre de (A,-1), (I,2) et (J,-2).

- 1) Préciser la position relative des points A, I et B.
- 2) Montrer que C est barycentre des points B et J avec des coefficients à préciser.
- 3) Que représente la droite (IJ) dans le triangle ABC ?

EXERCICE 8.14 (CORRIGE)

Soit un tétraèdre ABCD et le point E défini par : $\vec{CE} = \vec{CB} + \vec{CD}$.

- 1) Montrer que le barycentre I des points B, C et D affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 1 est le milieu du segment [BE].
- 2) Déterminer l'ensemble E_1 des barycentres des points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients $k, 2, k - 1$ et $1 - 2k$ lorsque k décrit \mathbb{R} .
- 3) Déterminer les ensemble E_2, E_3, E_4 des points M tels que :

$$E_2 : (\vec{MA} + \vec{MC} - 2\vec{MD}).(2\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}) = 0 .$$

$$E_3 : \| \vec{MA} + \vec{MC} - 2\vec{MD} \| = \| 2\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD} \| .$$

$$E_4 : \| 2\vec{MB} + 2\vec{MD} - 2\vec{ME} \| = \| 2\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD} \| .$$

EXERCICE 8.15

Soit ABC un triangle non aplati et soit M un point intérieur à ABC. La droite (AM) coupe le segment [BC] en P. Notons H la distance de A à la droite (BC) et h la distance de M à (BC).

- 1) Montrer que l'aire a_1 du triangle MAC vérifie : $a_1 = \frac{1}{2} (H - h) \times PC$.
- 2) Montrer que l'aire a_2 du triangle MAB vérifie : $a_2 = \frac{1}{2} (H - h) \times PB$.
- 3) En déduire que P est le barycentre de (B, a_1) et (C, a_2) .

Représentations paramétriques

EXERCICE 8.16

Donnez une représentation paramétrique de la droite d passant par A de vecteur directeur \vec{u} :

- 1) A (1 ; -2 ; 3) et $\vec{u} (0 ; 1 ; -1)$.
- 2) A (2 ; 3 ; -4) et $\vec{u} (-2 ; 5 ; 6)$.

EXERCICE 8.17

Soient les points A (1 , 2 , 3) ; B (2 , -1 , 0) ; C (0 , 5 , 7) et D (1 , 2 , 6).

- 1) Donnez une représentation paramétrique des droites (AB) et (CD).
- 2) Prouvez que ces droites sont sécantes et calculer les coordonnées de l'intersection.

EXERCICE 8.18

Soit la droite D de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 - t\sqrt{2} \\ y = 2t - 1 \\ z = t\sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad (t \text{ réel})$$

- 1) Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle à D et passant par le point P (-1 , 0 , $-\sqrt{2}$).
- 2) Cette droite passe-t-elle par le point J ($\sqrt{2} - 1$, -2 , $-2\sqrt{2}$) ?

Intersections

EXERCICE 8.19

Soit (D) la droite passant par A (6 , 3 , -1) et de vecteur directeur $\vec{u} (-1 , 2 , 5)$.

Soit (P) le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

Déterminer l'intersection de (D) et (P).

EXERCICE 8.20 

- 1) Montrer que les plans $P : x - y + 2z - 1 = 0$ et $Q : 2x + y - z + 1 = 0$ sont sécants selon une droite D .
- 2) Soit R un plan distinct de P . Montrer que R contient D si et seulement s'il existe un réel a tel que $a(x - y + 2z - 1) + 2x + y - z + 1 = 0$ soit une équation de R .
- 3) Ecrire une équation cartésienne du plan contenant D et perpendiculaire à P .

EXERCICE 8.21 

Résoudre les systèmes composés de trois équations de plans et dire si ces trois plans ont un point commun, une droite commune ou aucun point commun :

$$1) \begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 5y + 13z = 3 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 8 \\ 5x + y - z = 16 \\ 6x - 2y - 3z = 11 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x - 4y + 5z = 3 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ -x + y - z = 3 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 8x + 5y - 2z = 0 \\ -7x - 6y + 5z = 8 \end{cases}$$

EXERCICE 8.22 

- 1) Déterminer les points d'intersection A , B , C du plan P d'équation $3x + 2y + 3z - 6 = 0$ avec les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) .
- 2) On désigne par E_1 le demi-espace fermé défini par $3x + 2y + 3z - 6 \leq 0$. Vérifier que l'origine O appartient à E_1 .
- 3) Représenter graphiquement l'intersection de E_1 avec l'ensemble des points à coordonnées positives ou nulles. Quel est le solide obtenu ?

Divisibilité dans \mathbb{Z}

EXERCICE 9.1 (CORRIGE)

- 1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne par 7 ?
- 2) Dans la division euclidienne par 7, l'entier relatif m a pour reste 4, l'entier relatif n a pour reste 5. Quels sont les restes de $m + n$, $m \times n$, m^2 et n^3 ?

EXERCICE 9.2

Déterminer l'ensemble des diviseurs dans \mathbb{Z} des entiers relatifs suivants :

50 , -12 , -56 , 63 , -8 , -75

EXERCICE 9.3

- 1) Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 7 de 3 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; 3^5 ; 3^6 .
- 2) En déduire que la suite des restes est périodique.
- 3) En remarquant que $10 = 7 + 3$, déterminer la suite des restes des divisions euclidiennes par 7 des puissances entières de 10.
- 4) Parmi les entiers naturels suivants, indiquer ceux qui sont divisibles par 7 :
2 922 ; 17 633 ; 24 841 ; 1 097 894.

EXERCICE 9.4

- 1) a) Déterminer toutes les valeurs possibles du reste de la division de n^4 par 5.
b) En déduire que pour tout entier relatif n , si 5 ne divise pas n , alors 5 divise $n^4 - 1$.
c) Démontrer que quel que soit l'entier relatif n , 10 divise $n^5 - n$.
- 2) a) Soient deux entiers relatifs a et b . Développer $(a + b)^5$.
b) En déduire que quels que soient les entiers relatifs a et b , $(a + b)^5$ et $a^5 + b^5$ ont le même reste dans la division euclidienne par 5.
c) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que le reste de la division de $n^5 + 101^5$ par 5 soit égal à 2.

EXERCICE 9.5

Montrer que si p est impair, la somme de p nombres consécutifs est un multiple de p .

EXERCICE 9.6 (CORRIGE)

Déterminer les couples d'entiers relatifs (x,y) solutions des équation suivantes :

- 1) $x.y = -6$
- 2) $x^2 - y^2 = 15$
- 3) $x^2.y + x.y^2 = 12$

EXERCICE 9.7

Soit n un entier naturel. Soient a et b définis par : $a = 6n + 5$ et $b = 8n + 3$.
Prouver que 1 et 11 sont les seuls diviseurs positifs possibles communs à a et b .

EXERCICE 9.8

- 1) La différence de deux entiers naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces nombres ?
- 2) La somme de deux entiers naturels est 2096. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 5 et le reste 206. Quels sont ces nombres ?

Congruences

EXERCICE 9.9

En utilisant les propriétés des congruences, déterminer le reste de la division euclidienne par 13 de chacun des entiers suivants : 100 , 27 , 127 , 2700 , 100^4 , 274 et 27^{2004} .

EXERCICE 9.10

Soit a et n deux entiers naturels ($n \geq 2$) tels que $a \equiv 1 [n]$.

- 1) Montrer que pour tout diviseur positif d de n , $a \equiv 1 [d]$.
- 2) Montrer que pour tout k entier naturel, $a^k \equiv 1 [n]$.
- 3) Montrer que $\cos\left(\frac{2a\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
- 4) Si p est un entier tel que $2^n \equiv 1 [p]$. Montrer que $2^a \equiv 2 [p]$.

EXERCICE 9.11

- 1) Montrer que pour tout entier n positif, on a $10^n \equiv 1 [9]$.
- 2) En déduire que si n s'écrit $10u + v$, alors n est divisible par 9 si et seulement si $u + v$ est divisible par 9.
- 3) En déduire un critère de divisibilité par 9.

EXERCICE 9.12 (CORRIGE)

Démontrer sans calculatrice les congruences suivantes :

- 1) $15^5 - 3^5 \equiv 0 [12]$.
- 2) $9^{10} - 5^{10} \equiv 0 [7]$.

EXERCICE 9.13

- 1) Démontrer que $3^5 \equiv 1 [11]$.
- 2) En déduire que quels que soient les entiers naturels k et r : $3^{5k+r} \equiv 3^r [11]$.
- 3) Soit n un entier naturel. Quels sont les restes possibles dans la division de 3^n par 11 ?
- 4) Trouver pour quelles valeurs de l'entier naturel n , $3^n + 7$ est divisible par 11.

Nombres premiers

EXERCICE 9.14

Reconnaitre si 937 et 1933 sont des nombres premiers.

EXERCICE 9.15

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 126, 525 et 720 .

EXERCICE 9.16

Soit a et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

- 1) Démontrer que $a - 1$ divise $a^n - 1$.
- 2) En déduire que si $a^n - 1$ est un nombre premier, alors $a = 2$.

EXERCICE 9.17

- 1) Démontrer que si n est un entier naturel premier alors $(n-1)!$ n'est pas divisible par n .
- 2) Soit n entier supérieur ou égal à 5.
Démontrer que si n n'est pas premier, alors n divise $(n-1)!$.

EXERCICE 9.18 (CORRIGE)

- 1) Soit n un entier naturel, $n > 3$. Le nombre $n^2 - 4n + 3$ est-il premier ?
- 2) De même avec $n > 1$ et $n^2 + n + 2$.

EXERCICE 9.19

Soit p un nombre premier différent de 2. Montrer que p divise : $1 + 2 + \dots + 2^{p-2}$.

EXERCICE 9.20

- 1) Décomposez 360 en produit de facteurs premiers.
- 2) Combien 360 a-t-il de diviseurs ?

EXERCICE 9.21

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

- 1) Démontrer que p s'écrit $6k - 1$ ou $6k + 1$ avec k entier strictement positif.
- 2) En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

PGCD et PPCM

EXERCICE 9.22

Montrer, en utilisant l'égalité de Bézout, que pour tout entier relatif n , les entiers $2n + 1$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux.

EXERCICE 9.23 

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $33a - 45b = 0$.

EXERCICE 9.24  **(CORRIGE)**

Déterminer deux entiers naturels a et b sachant que leur PGCD est 15 et que leur somme est 150 (deux réponses).

EXERCICE 9.25 

Résoudre les équations suivantes, où (x,y) est un couple d'entiers naturels :

- 1) $26x + 65y = 13$
- 2) $60x - 21y = 6$.

EXERCICE 9.26 

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer deux entiers naturels a et b tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible et que $\frac{a+21}{b+15} = \frac{a}{b}$.

EXERCICE 9.27 

Résoudre l'équation $19x - 33y = 1$ où (x,y) est un couple d'entiers relatifs.

EXERCICE 9.28 

- 1) Trouvez tous les entiers naturels diviseurs de 108.
- 2) Trouver tous les couples (x,y) d'entiers naturels dont le PGCD d et le PPCM m sont tels que $m - 3d = 108$ et $10 < d < 15$.

EXERCICE 9.29 

- 1) Prouver qu'il existe au moins deux entiers relatifs k et n tels que $13k - 23n = 1$. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide, deux de ces entiers.
- 2) Résoudre l'équation $-156x + 276y = 24$, où (x,y) est un couple d'entiers relatifs.

EXERCICE 9.30  **(CORRIGE)**

- 1) Déterminer le PGCD de $2^{12} - 1$ et $2^8 - 1$, puis celui de $2^{14} - 1$ et $2^{10} - 1$.
(rappel : quand d divise n , alors $2^d - 1$ divise $2^n - 1$). Que peut-on conjecturer ?
- 2) On cherche à déterminer D le PGCD de $2^n - 1$ et $2^m - 1$, où n et m sont des entiers non nuls, avec $m \leq n$.
 - a) Si r est le reste de la division euclidienne de n par m , établir que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^n - 1$ par $2^m - 1$.
 - b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, exprimer D en fonction de $d = \text{PGCD}(n,m)$.

Cylindres et Cônes de révolution

EXERCICE 10.1

Déterminer l'équation du cône C de sommet O et d'axe (Oz) qui vérifie la propriété dans chacun des cas suivants :

- 1) Un cercle de base du cône C a pour équation :
$$\begin{cases} z = -2 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$
- 2) Une génératrice du cône C passe par le point G (- 2 , 3 , 4) .
- 3) La section du cône C par le plan d'équation $z = - 3$ est un cercle de rayon 3.

EXERCICE 10.2

Donner l'équation du cylindre de révolution d'axe (Oz) sachant que le point C (1 , 3 , - 2) appartient à la section de ce cylindre par le plan d'équation $x = 1$.

EXERCICE 10.3

On se place dans un repère orthonormal de l'espace.

La surface (S) est l'ensemble des points M (x , y , z) tels que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- 1) Précisez la nature de la section de la surface (S) et du plan d'équation $z = a$, avec : $0 \leq a \leq 10$.
- 2) Exprimer en fonction de a, l'aire de cette section.
- 3) En déduire le volume du solide délimité par la surface (S) et les plans d'équations : $z = 1$ et $z = 10$.
- 4) Retrouver ce résultat avec la formule donnant le volume d'un cône.

Paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$

EXERCICE 10.4

On se place dans un repère orthonormal de l'espace.

La surface (S) est l'ensemble des points M (x , y , z) tels que $z = x^2 + y^2$.

Trois plans parallèles au plan (xOy) coupent la surface (S) selon des cercles de rayon R, 2R et 3R (R un réel, R > 0).

Quel est l'équation de chacun de ces plans ?

EXERCICE 10.5

On se place dans un repère orthonormal de l'espace.

La surface (S) est l'ensemble des points M (x , y , z) tels que $z = x^2 + y^2$.

Soit le point A (0 , 0 , $\frac{1}{2}$) et P le plan d'équation $z = -\frac{1}{2}$.

- 1) Soit un point M (x , y , z) et B son projeté orthogonal sur P. Calculer MA^2 et MB^2 en fonction de x, y et z.
- 2) En déduire que (S) est l'ensemble des points M situés à égale distance de A et de P.

EXERCICE 10.6

On se place dans un repère orthonormal de l'espace.

La surface (S) est l'ensemble des points M (x , y , z) tels que $z = x^2 + y^2$.

- 1) Précisez la nature de la section de la surface (S) et du plan d'équation $z = a$, avec : $0 \leq a \leq 15$.
- 2) Exprimer en fonction de a, l'aire de cette section.
- 3) En déduire le volume du solide délimité par (S) et le plan d'équation $z = 15$.
- 4) Trouver le réel b tel que le plan d'équation $z = b$ partage le solide précédent en deux solides de même volume.

Paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$

EXERCICE 10.7

Soit (O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}) un repère orthonormal de l'espace.

Soit la surface (S), ensemble des points M (x , y , z) tels que $z = x y$.

On note I_a (a réel) la droite intersection de (S) et du plan d'équation $x = a$.

On note J_b (b réel) la droite intersection de (S) et du plan d'équation $y = b$.

- 1) Montrer que pour $a_1 \neq a_2$, les droites I_{a_1} et I_{a_2} ne sont pas coplanaires.
- 2) Montrer que pour $b_1 \neq b_2$, les droites J_{b_1} et J_{b_2} ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 10.8

Soit (O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}) un repère orthonormal de l'espace.

Soit la surface (S), ensemble des points M (x , y , z) tels que pour tout x non nul, $z = \frac{y}{x}$.

- 1) K est la projection orthogonale sur le plan (O ; \vec{i} ; \vec{j}) de la section de la surface (S) par le plan d'équation $z = a$. Représenter K pour $a = 1$ et $a = -1$ dans (O ; \vec{i} ; \vec{j}).
- 2) J est la projection orthogonale sur le plan (O ; \vec{i} ; \vec{k}) de la section de la surface (S) par le plan d'équation $y = b$. Représenter J pour $b = 1$ et $b = 2$ dans (O ; \vec{i} ; \vec{k}).
- 3) I est la projection orthogonale sur le plan (O ; \vec{j} ; \vec{k}) de la section de la surface (S) par le plan d'équation $x = c$. Représenter I pour $c = 1$ et $c = -1$ dans (O ; \vec{j} ; \vec{k}).

EXERCICE 10.9

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

Soit la surface (S) , ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $z = x y$.

Soit D la droite du plan (xOy) d'équation $y = x$.

- 1) Montrer que pour tout point M de D , la parallèle à (Oz) issue de M rencontre la surface (S) d'équation $z = x y$ en un point de cote $\frac{1}{2} OM^2$ (valeur de z).
- 2) Représenter en vraie grandeur la section de (S) par le plan d'équation $y = x$.

Surfaces diverses

EXERCICE 10.10

Quelle est la surface (S) définie par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \geq 0$.

Montrer que (S) a pour équation $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

EXERCICE 10.11 (CORRIGE)

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

Soit la surface (S) , ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que pour tout x non nul,

$$z = \frac{2x^2 + y}{x^2 + 1}.$$

- 1) Quelle est la nature de la section K de la surface (S) par le plan P d'équation : $z = 3$?
 A est le point du plan P de coordonnées $(0, 0, 3)$.
Représenter graphiquement la courbe K dans le repère $(A; \vec{i}; \vec{j})$.
- 2) Quelle est la nature de la section I de la surface (S) par le plan Q d'équation : $x = 2$?
Donnez une représentation paramétrique de I .
- 3) Quelle est la nature de la section J de la surface (S) par le plan R d'équation : $y = 2$?
- 4) Quelle est la nature de la section L de la surface (S) par le plan S d'équation : $y = 5$?
 B est le point du plan S de coordonnées $(0, 5, 0)$.

Représenter graphiquement la courbe L dans le repère $(B; \vec{i}; \vec{k})$.

EXERCICE 10.12

Soient (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 = 2yz$, P le plan d'équation $z = 1$ et C le cercle du plan P , de centre $(0, 1, 1)$ et de rayon 1.

- 1) Montrer qu'un point $M(x, y, z)$ appartient à C si et seulement si $x^2 + y^2 - 2y = 0$ et $z = 1$. En déduire que C est la section de (S) par le plan P .
- 2) Soit $A(a, b, 1)$ un point de C . Montrer que la droite (OA) est contenue dans (S) .
- 3) Prouver que si $M(x, y, z)$ est un point de (S) distinct de l'origine O , alors z est différent de 0 et le point $A(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ appartient à C et à (OM) .
- 4) Déduire des questions précédentes que la surface (S) est constituée de toutes les droites (OA) , A décrivant le cercle C .

Chapitre XI : ISOMETRIES PLANES (SPECIALITE)

Transformations du plan

EXERCICE 11.1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit f l'application du plan qui au point $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ tel que $x' = y$ et $y' = x + 2$.

- 1) Soit M' un point donné. Montrer qu'il existe un unique point M tel que $f(M) = M'$.
- 2) En déduire que f est une transformation du plan que l'on précisera et donner sa transformation réciproque.

EXERCICE 11.2

Dans le plan orienté, soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et direct.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.

- 1) Construire le point $B' = r(B)$ et $C' = r(C)$.
- 2) Préciser la nature du triangle $AB'C'$.

EXERCICE 11.3

Donner l'écriture complexe de $f \circ g$ et $g \circ f$:

- 1) $f: z' = z^2 + 1$ et $g: z' = z - 2$
- 2) $f: z' = (2 + i)z + i$ et $g: z' = \bar{z}$
- 3) $f: z' = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $g: z' = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Similitudes

EXERCICE 11.4

Soient A et A' deux points distincts du plan. Construire le centre Ω de la similitude f de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme A en A' .

EXERCICE 11.5

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la

transformation f qui au point d'affixe z associe le point d'affixe z' tel que $z' = -e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2i$.

- 1) Montrer que f est une isométrie.
- 2) Définir f géométriquement.

EXERCICE 11.6

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la transformation f qui au point d'affixe z associe le point d'affixe z' tel que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1$.

- 1) Montrer que f est une isométrie.
- 2) Définir f géométriquement.

EXERCICE 11.7

Soit f la transformation d'écriture complexe : $z' = -i\bar{z} + 1 + i$.

- 1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
- 2) En déduire l'ensemble des points fixes de f .
- 3) Préciser la nature de f .

EXERCICE 11.8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit f l'application du plan qui au point $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ tel que $x' = -2x + 2$ et $y' = -2y + 3$.
Démontrer que f est une similitude et préciser son rapport.

Forme réduite de similitudes directes

EXERCICE 11.9

Soit a un réel tel que $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Soit f la transformation d'écriture complexe : $z' = (1 + i \tan(a))z + \tan(a)$.

Montrer que f est une similitude directe, préciser son centre, son rapport et son angle en fonction de a .

EXERCICE 11.10

Donnez les éléments caractéristiques des similitudes directes dont l'écriture complexe est :

- 1) $z' = 5z - 3i$
- 2) $z' = (-2 + 2i)z + 5 + i$
- 3) $z' = (2i - 1)z + 3 - 4i$
- 4) $z' = \frac{2-i}{1+i}z$

EXERCICE 11.11

Le triangle OAB est isocèle en O , mais non rectangle et on pose $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Soit h l'homothétie de centre O , de rapport $\cos(\theta)$.

Soit r la rotation de centre O et d'angle θ .

Soit s la similitude directe telle que $s = h \circ r$.

- 1) Construire l'image de A par s .
- 2) Donner la forme réduite de s .

EXERCICE 11.12

Identifier la transformation géométrique (translation...), préciser les éléments caractéristiques (rapport, centre...) et donner la forme réduite des similitudes directes suivantes :

1) $z' = z - 3i$

3) $z' = (2 + 3i)z - 7 + 8i$

2) $z' = 3z + 2i - 3$

4) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z - 3$

Applications géométriques

EXERCICE 11.13 (CORRIGE)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Soit l'application f qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M'

d'affixe z' définie par $z' = \frac{1}{z}$. Soient A et B les points d'affixes respectives $-i$ et i .

1) Soit C_1 le cercle de centre A et de rayon 1, privé de O .

a) Montrer que pour tout nombre complexe z non nul, $|z'+i| = |z'| \Leftrightarrow |z+i| = 1$.

b) En déduire l'ensemble C'_1 , image de C_1 par f .

c) Tracer C_1 et C'_1 sur une même figure.

2) Soit le cercle C_2 de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

a) Montrer que pour tout nombre complexe z non nul, $|z'-i|^2 = 2 \Leftrightarrow |z+i|^2 = 2$.

b) En déduire l'ensemble C'_2 , image de C_2 par f .

c) Tracer C_2 et C'_2 sur la figure précédente.

3) a) Donner l'écriture complexe de la similitude directe s de centre Ω d'affixe $1+i$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que $s \circ f$ est l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M'' d'affixe z'' tel que $z'' = \frac{2i + (3-i)\bar{z}}{\bar{z}}$.

c) A l'aide des questions précédentes, déterminer les ensembles Γ_1 et Γ_2 images respectives de C_1 et C_2 par $s \circ f$.

d) Tracer les ensembles Γ_1 et Γ_2 sur la figure précédente.

EXERCICE 11.14

Dans le plan complexe, soient les points A , B et C d'affixes respectives 1 , j et j^2 avec $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Soit s la similitude directe de centre O (O étant l'origine du repère du plan complexe) et d'écriture complexe : $z' = az$ où a est un nombre complexe distinct de 0 et de 1.

1) Préciser la nature du triangle ABC .

2) Calculer en fonction de a les affixes des points A' , B' et C' images respectives de A , B et C par s .

3) Montrer que A , B' et C' sont alignés si et seulement si $a + \bar{a} + a\bar{a} = 0$.

4) Soit Γ l'ensemble des points d'affixe a non nulle tel que $a + \bar{a} + a\bar{a} = 0$.

Montrer que Γ est le cercle de centre $\Omega(-1,0)$ et de rayon 1, privé du point O .

5) Montrer que lorsque le point d'affixe a décrit Γ , l'image de A par s décrit un cercle privé d'un point.

EXERCICE 11.15

Soient un cercle C de centre O de rayon R , D une droite ne coupant pas C et A un point de D .
On note E_A l'ensemble des points M du plan vérifiant la proposition suivante :
« il existe un point N du cercle C tel que le triangle AMN est équilatéral de sens direct ».

- 1) Montrer que E_A est un cercle dont on déterminera le centre Ω_A et le rayon R_A .
- 2) Quel est l'ensemble des points Ω_A lorsque A décrit D ?
- 3) Construire l'ensemble Ω_A .

EXERCICE 11.16

Dans un plan orienté, on considère le triangle ABC rectangle tel que $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$.

La hauteur issue de C coupe la droite (AB) en H et la parallèle à la droite (BC) menée par A en D .
On note $CA = b$ et $BC = a$. Soit s la similitude directe qui transforme C en A et B en C .

- 1) Déterminer le rapport de s en fonction de a et b .
- 2) Calculer l'angle de s .
- 3) En utilisant cet angle, démontrer que le centre de s est le point H .
- 4) Quelle est l'image de A par s .
- 5) En utilisant s , démontrer que $HC^2 = HA \times HB$.

EXERCICE 11.17

Dans un plan orienté, on considère deux cercles C et C' de centres O et O' , de même rayon R , tangents extérieurement en A .

Pour tout point M de C , on associe le point M' de C' tel que $(\vec{OM}, \vec{O'M'}) = \frac{\pi}{2}$.

- 1) Démontrer qu'il existe une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, dont vous construirez le centre Ω , qui transforme C en C' . Quelle est l'image de M par cette rotation ?
- 2) Démontrer que le milieu I de $[MM']$ est l'image de M par une similitude s directe de centre Ω .
- 3) Déterminer les caractéristiques de cette similitude.
- 4) Donner l'image de O par la similitude s et une mesure de l'angle (\vec{OM}, \vec{AI}) .
- 5) En déduire le lieu de I quand M décrit le cercle C .

EXERCICE 11.18

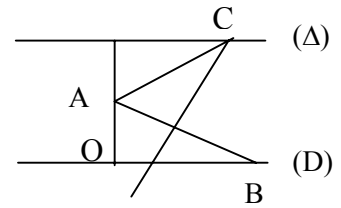
On considère (Δ) et (D) deux droites parallèles et A un point situé entre les deux droites et n'appartenant à aucune d'elles. On se propose de construire un triangle équilatéral ABC tels que B et C appartiennent respectivement à (D) et (Δ) . On note \mathfrak{R} la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.

On considère (D') l'image de (D) par la rotation \mathfrak{R} .

- 1) Montrer que (D') coupe (Δ) . On note C le point d'intersection de (D') et (Δ) .
- 2) Soit $B = \mathfrak{R}^{-1}(C)$. Montrer que le triangle ABC répond au problème posé.
- 3) Construire la droite (D') et placer les points B et C .

EXERCICE 11.19 🏠 (CORRIGE)

On considère la figure ci contre, où (Δ) et (D) sont deux droites parallèles et A un point situé entre les deux droites et n'appartenant à aucune d'elles. On se propose de construire un triangle équilatéral ABC tels que B et C appartiennent respectivement à (Δ) et (D) .



On note \mathfrak{R} la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.

Soit O le projeté orthogonal de A sur la droite (D) . Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ où \vec{u} est le vecteur directeur de (D) et \vec{v} est choisi de sorte que le point A ait pour affixe ai (a réel positif).

On note α la distance du point A à la droite (Δ) . Soit B un point de (D) d'affixe z_B (z_B réel). On appelle z_C l'affixe du point C , image de B par la rotation \mathfrak{R} .

1) Montrer que $z_C = \frac{1}{2}(z_B + a\sqrt{3}) + \frac{i}{2}(a + z_B\sqrt{3})$.

2) En déduire que le point C appartient à la droite (Δ) si et seulement si :

$$z_B = \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2\alpha).$$

3) En prenant désormais cette valeur pour z_B , exprimer AB^2 en fonction de a et α .

4) En déduire que l'aire du triangle équilatérale ABC est $S = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + a\alpha + \alpha^2)$.

EXERCICE 11.20 🏠

Dans le plan orienté, on considère quatre points E, F, G, H non alignés tels que $EFGH$ soit un parallélogramme de centre O . On désigne par A l'image de G par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Par B l'image de H par la rotation r' de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. On note I le milieu du segment $[GH]$.

L'objet de cet exercice est de démontrer que la médiane (OI) du triangle OGH est une hauteur du triangle OAB .

1) Placer les différents points.

2) On rapporte le plan complexe à un repère orthonormé direct d'origine O , tel que l'affixe du point G soit égale à 1 . On note z l'affixe du point H .

a) Calculer les affixes des points I, A et B , en fonction de z .

b) Prouver que les points O et I sont distincts, ainsi que les points A et B .

3) Montrer que la droite (OI) est perpendiculaire à la droite (AB) .

PREPARATION AU BAC

EXERCICE 1 Liban 2005

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

1. «Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a ; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.»

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$, g ne s'annulant pas :

«Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.»

3. «Si f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.»

4. On considère un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

«Si f est une fonction définie sur \mathbb{R}^* alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .»

5. «La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$.»

6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2.

«Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI].»

7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.

«L'ensemble des points M du plan tels que $\|3 \vec{MA} - 2 \vec{MB} + \vec{MC}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1.»

8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

«Le produit scalaire $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ est nul si et seulement si $M = A$ ou $M = B$.»

EXERCICE 2 Inde 2008 - Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

a. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.

Alors $\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}$

b. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :

$z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega).$$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1. a. Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A , z_B , z_C et z_D .

b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère

$(O; \vec{u}, \vec{v})$?

c. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par :

$$E = r(A) \text{ et } F = r(C).$$

a. Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

b. Donner l'écriture complexe de r .

c. Déterminer l'affixe du point E.

EXERCICE 3 National 2004 - Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2.

(a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$.

Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

(b) Dédurre de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

(a) On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n' , montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.

(b) On suppose u et v strictement positifs.

Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$

Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

(c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

EXERCICE 4 National 2008

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances

- Démontrer que pour tout $t \geq 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.
- Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s > 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t > 0$.

2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0,00026$.

- Calculer $P(X < 1\,000)$ et $P(X > 1\,000)$.
- Sachant que l'évènement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2\,000)$.
- Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures?
Pouvait-on prévoir ce résultat ?

EXERCICE 4 Amérique du Nord 2006

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0; +\infty[$ vérifiant les conditions :

(1) : pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$, $f'(x) = 4 - [f(x)]^2$

(2) : $f(0) = 0$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.

On obtient ainsi une suite de points notés (M_n) , d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$x_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, x_{n+1} = x_n + 0,2$$

$$y_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, y_{n+1} = -0,2 y_n^2 + y_n + 0,8$$

1. a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	6	7
x_n	0	0,2	0,4				
y_n	0	0,800 0	1,472 0				

Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

b. Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. a. Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0 ; 2]$ alors $p(x) \in [0 ; 2]$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq y_n \leq 2$.

c. Étudier le sens de variation de la suite (y_n) .

d. La suite (y_n) est-elle convergente ?

PARTIE B : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2 \left(\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1} \right)$ et (C_g) sa courbe représentative.

Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

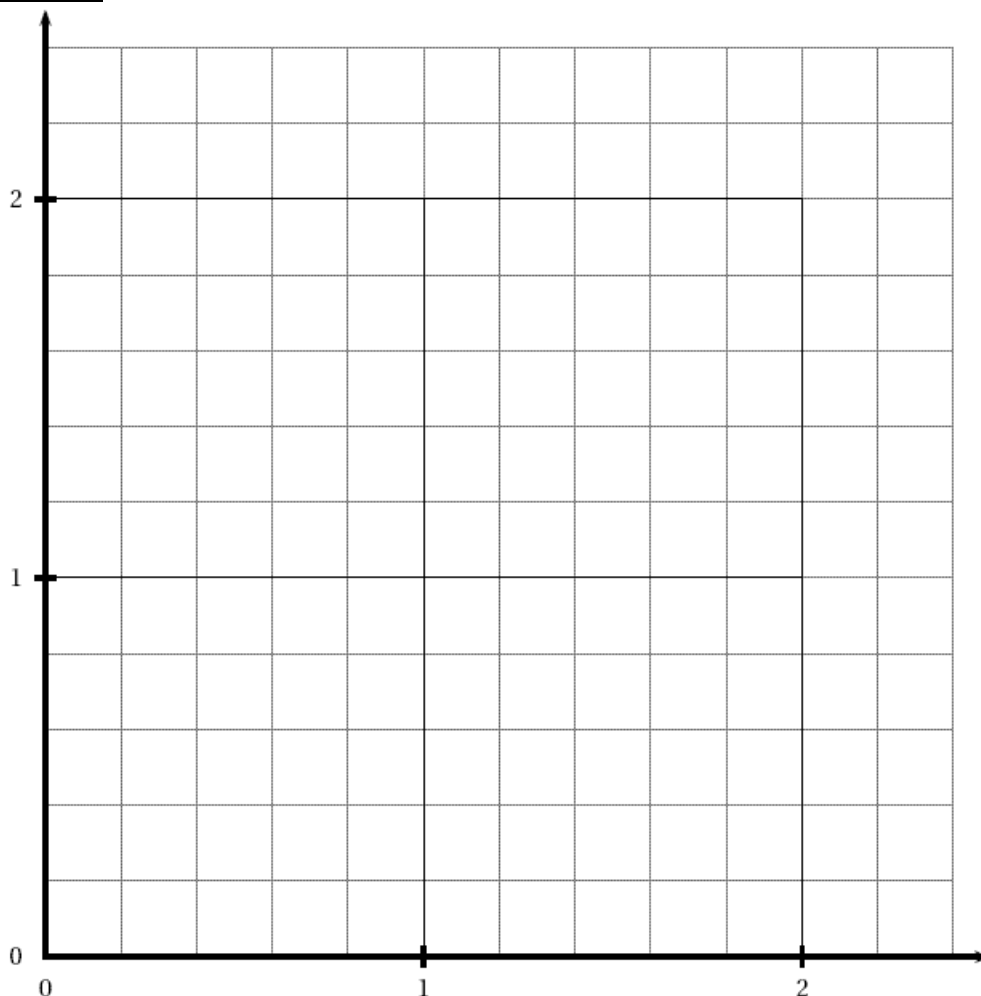
2. a. Montrer que (C_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (C_g) à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe (C_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

Annexe



Partie C : CORRECTION DES EXERCICES



Chapitre I : LIMITES ET CONTINUITÉ DE FONCTIONS

EXERCICE 1.2

$$1) f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} \text{ en } x_0 = -2$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par

$$(x-2) \text{ d'où } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}.$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = 0^-.$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}-1}{x} \text{ en } x_0 = 0$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par

l'expression conjuguée $\sqrt{2x^2+1}+1$.

$$\text{D'où : } f(x) = \frac{2x}{(\sqrt{2x^2+1}+1)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

EXERCICE 1.11

Il suffit de transformer l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2+1} = \frac{ax^3 + bx^2 + ax + b + c}{x^2+1}.$$

En identifiant les termes des polynômes au numérateur des deux expressions, on trouve :

$$\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ a=2 \\ b+c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\text{et } f(x) = 2x + \frac{1}{x^2+1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 0$$

La droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Chapitre II : DERIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 2.3

3) On ne peut pas conclure directement car on a une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$ sur $]-1; +\infty[$. On a $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x+1$. u est dérivable et strictement positive sur $]-1; +\infty[$, f est donc dérivable sur cet intervalle.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \text{ et } f'(8) = \frac{1}{6}.$$

D'après la définition du nombre dérivé, on a

$$f'(8) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{x - 8} = \frac{1}{6}.$$

EXERCICE 2.10

1) $D_f = \mathbb{R}$, f est dérivable sur \mathbb{R} de fonction dérivée $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Donc, pour tout x réel, $(1+x^2)f'(x) = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} = xf(x)$.

2) La fonction f' est elle-même dérivable sur \mathbb{R} et $f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Donc, pour tout x de \mathbb{R} :

$$(1+x^2)f''(x) = \frac{1}{f(x)}, \text{ et par conséquent :}$$

$$(1+x^2)^2 f''(x) = \sqrt{1+x^2} = f(x).$$

D'où $(1+x^2)f'(x) + (1+x^2)^2 f''(x) = (1+x)f(x)$.

EXERCICE 2.17

1) f est dérivable sur \mathbb{R}^* . Soit x réel non nul, alors :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2} \right) = \frac{1}{3} \frac{g(x)}{x^2}.$$

Donc, pour tout x non nul, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

2) g est dérivable sur \mathbb{R} de fonction dérivée $g'(x) = 2x(3x+1)$.

On obtient le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$			
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$		$-\frac{26}{27}$		-1		$+\infty$

Sur $]0; 1[$, g est strictement croissante (et continue), donc g réalise une bijection de $]0; 1[$ vers $] -1; 2[$. Donc il existe un unique réel α , $0 < \alpha < 1$, tel que $g(\alpha) = 0$.

3) Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
f'	-	-	0	+
f	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

- 4) a) $I(-1 ; \frac{-1}{3})$ et $J(1 ; 1)$, la droite (IJ) a pour équation : $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

La tangente à la courbe C en J est la droite d'équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1), \text{ soit } y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

b) Equation de la tangente T en I à C :

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1), \text{ soit } y = -\frac{2}{3}x - 1.$$

5) On étudie le signe de la différence :

$$\frac{1}{3}(x^2 + x + \frac{1}{x}) - (-\frac{2}{3}x - 1).$$

On trouve alors que si $x \leq -1$, alors C est au dessus de T ; et si $x \geq -1$, C est au dessous de T.

Chapitre III : EXPONENTIELLE, LOGARITHME ET PUISSANCE

EXERCICE 3.8

- On pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$ et on résout le système en X et Y.
- Les propriétés du logarithme nous permettent d'écrire $xy = 1$ et $x + y = e$.
- On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$ et on résout le système en X et Y.
- On pose $X = X^{\frac{3}{4}}$ et $Y = Y^{\frac{2}{3}}$ et on résout le système en X et Y.

EXERCICE 3.12

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$, f est dérivable sur D_f .

Limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{\substack{x \rightarrow \ln 2 \\ x < \ln 2}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow \ln 2 \\ x > \ln 2}} f(x) = +\infty$.

Dérivée :

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{(e^x - 2)^2} = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}.$$

d'où $f'(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty ; 0] \cup [\ln 4 ; +\infty [$

et $f'(x) < 0$ si $x \in [0 ; \ln 2 [\cup] \ln 2 ; \ln 4]$.

f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et $[\ln 4 ; +\infty [$, et décroissante sur $[0 ; \ln 2 [$ et $]\ln 2 ; \ln 4]$.

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2(e^x - 2)} = 0$$

donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe.

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(e^x - 2)} = 0$$

La droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe.

EXERCICE 3.15

1) $D_f = \mathbb{R}$, f est impaire car pour tout x de D_f , $-x$ appartient à D_f et $f(-x) = -f(x)$, donc la courbe C_f sera symétrique par rapport à l'origine du repère et on étudie f sur $[0 ; +\infty [$. f est dérivable sur D_f de fonction dérivée :

$$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Donc, pour tout x de D_f , $f'(x) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1. \text{ Donc la droite}$$

d'équation $y = 1$ est asymptote à C_f .

On résume cela dans le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	-1	1

2) f est strictement croissante sur \mathbb{R} à valeurs dans $]-1 ; 1 [$ et f est dérivable (donc continue) sur \mathbb{R} , donc f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]-1 ; 1 [$.

$$3) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}, y = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

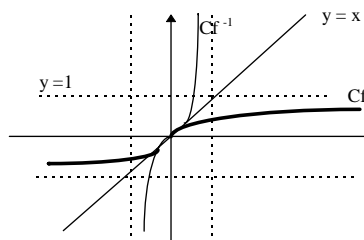
$$\Rightarrow y + ye^{-2x} = 1 - e^{-2x}$$

$$\Rightarrow e^{-2x}(1 + y) = 1 - y$$

$$\Rightarrow -2x = \ln\left(\frac{1 - y}{1 + y}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{2} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

- 4) Pour tracer les courbes, on sait qu'elles sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Chapitre IV : INTEGRALES, PRIMITIVES, EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 4.18

- 1) Pour tout x réel, $1 + e^x > 1$ donc $\ln(1 + e^x) > 0$, et $e^{-x} > 0$.

Donc, pour tout x réel, $f(x) > 0$ et $I(\alpha) > 0$.

- 2) a) On met l'expression au même dénominateur et par identification, on trouve : $a = 1$ et $b = -1$.

$$\int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^\alpha dx - \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$= [x]_0^\alpha - [\ln(1+e^x)]_0^\alpha = \alpha - \ln(1+e^\alpha) + \ln 2.$$

- b) Pour tout x réel,

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}.$$

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } f(x) + f'(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x} dx - \int_0^\alpha f'(x) dx$$

$$= \alpha - \ln(1+e^\alpha) + \ln 2 - f(\alpha) + f(0).$$

$$\text{Donc } I(\alpha) = \alpha + 2 \ln 2 - (1+e^{-\alpha}) \ln(1+e^\alpha).$$

EXERCICE 4.21

- A) 1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$.

2) f est définie sur $] -1 ; 0]$ (énoncé), f est dérivable sur $] -1 ; 0]$ de fonction dérivée :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{1 - x^2} = \frac{(x - (1 + \sqrt{2}))(x - (1 - \sqrt{2}))}{1 - x^2}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	-1	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	0
f'	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow \approx 0,226$	\searrow	0

- 3) Le coefficient directeur de la tangente D à C en $x = 0$ est $f'(0) = -1$.

- 5) $f(-0,72) \approx -0,0106$ et $f(-0,71) \approx 8,62 \cdot 10^{-3}$.
Donc $\alpha \in] -0,72 ; -0,71 [$.

- B) 1) $\ln(1-x^2) = \ln[(1-x)(1+x)] = \ln(1-x) + \ln(1+x)$.

$$2) I = \int_\alpha^0 \ln(1+x) dx = [x \ln(1+x)]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 \frac{x}{1+x} dx.$$

$$\text{Or, } \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

$$\text{Donc, } I = -\alpha \ln(1+\alpha) - \int_\alpha^0 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$\Rightarrow I = -\alpha \ln(1+\alpha) - [x - \ln(1+x)]_\alpha^0$$

$$\Rightarrow I = \alpha - (1+\alpha) \ln(1+\alpha).$$

On calcule J en procédant de la même manière.

$$3) K = I + J - \int_\alpha^0 x dx.$$

$$K = 2\alpha + \ln\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) - \alpha \ln(1-\alpha^2) + \frac{\alpha^2}{2}.$$

Or $f(\alpha) = 0$, donc $\ln(1-\alpha^2) = \alpha$.

$$\text{D'où } K = 2\alpha + \ln\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) - \frac{\alpha^2}{2}.$$

$$4) a) A = \int_\alpha^0 f(x) dx = 100 K \text{ cm}^2.$$

- b) $\alpha < -0,71$ et $f \geq 0$ sur $[\alpha; 0]$

$$A = \int_\alpha^{-0,71} f(x) dx + \int_{-0,71}^0 f(x) dx \geq \int_{-0,71}^0 f(x) dx.$$

Chapitre V : SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 5.6

1) $u_0 \neq 1$. Supposons que la propriété est

vraie au rang n : $u_n \neq 1$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2 + 3u_n}{4 + u_n} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{4 + u_n} \neq 0 \text{ donc la}$$

propriété est vraie au rang $n + 1$.

Et donc, pour tout n entier, $u_n \neq 1$.

$$\begin{aligned} 2) v_{n+1} &= \frac{2 + u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \frac{8 + 2u_n + 2 + 3u_n}{4 + u_n - 2 - 3u_n} \\ &= \frac{5(2 + u_n)}{2(1 - u_n)} = \frac{5}{2} \times \frac{2 + u_n}{1 - u_n} = \frac{5}{2} v_n \end{aligned}$$

3) La suite est géométrique de premier terme $v_0 = 3$

et de raison $\frac{5}{2}$. On a donc $v_n = 3 \left(\frac{5}{2}\right)^n$.

4) v_n est une suite géométrique de raison $\frac{5}{2} > 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

$$5) (1 - u_n) v_n = 2 + u_n \Leftrightarrow$$

$$v_n - u_n v_n = 2 + u_n \Leftrightarrow v_n - 2 = u_n (v_n + 1)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

EXERCICE 5.12

1) a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = 0$; donc au voisinage de

$+\infty$, $\ln(n + 2^{-n})$ se comporte comme $\ln n$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$; donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n + 2^{-n})}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n + 2^{-n})}{2n} = 0.$$

b) Calculons $\frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} - \frac{\ln 2}{2}$:

$$\frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln(1 + n2^n) - n \ln 2}{2n} =$$

$$\frac{\ln(1 + n2^n) - \ln 2^n}{2n} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2^n} + n\right)}{2n} = \frac{\ln(n + 2^{-n})}{2n}$$

D'après la question 1)a),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} - \frac{\ln 2}{2} \right] = 0;$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} = \frac{\ln 2}{2}.$$

$$2) a) u_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Soit } n \geq 1, u_n &= \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} dx \\ &= \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{2n \times 2^n x}{1 + n2^n x^2} dx = \frac{1}{2n} \left[\ln(1 + n2^n x^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{\ln(1 + n2^n)}{2n}. \end{aligned}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\ln 2}{2}.$$

EXERCICE 5.19

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} = 0, \text{ car } x \in [0; 1[$$

$$\begin{aligned} 2) u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx \\ &= 2 \left[\sqrt{1+x} \right]_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \left[2x\sqrt{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{1+x} dx \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

3) Pour tout x de $[0; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$x^{n+1} \leq x^n$; donc $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, d'où

$$\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx, \text{ i.e. } u_{n+1} \leq u_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

$$4) h : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} \text{ sur } [0; 1].$$

$$\text{Sur } [0; 1], h'(x) = \frac{-1}{2(1+x)\sqrt{1+x}}; \text{ pour } x$$

dans $[0; 1]$, $h'(x) < 0$; donc h est décroissante sur $[0; 1]$.

Le maximum sur $[0; 1]$ de h est $h(0) = 1$ et le

minimum sur $[0; 1]$ de h est $h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $h(1) \leq h(x) \leq h(0)$, soit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$$

Donc, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \leq x^n, n \in \mathbb{N}.$$

Donc, $\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx$; or

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} ; \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ par le}$$

théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$5) u_{n+1} + u_n =$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{\sqrt{1+x}} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1+x} dx ;$$

on intègre par parties : $u_{n+1} + u_n$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \sqrt{1+x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{1+x}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} u_{n+1}.$$

Or pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \geq 0$; donc

$$u_{n+1} + u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

6) d'après la question 4),

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

De plus, (u_n) est décroissante, donc pour tout n

$$\text{de } \mathbb{Z}, 2u_{n+1} \leq u_{n+1} + u_n.$$

Or, d'après la question 5),

$$u_{n+1} + u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

Donc, pour tout n de \mathbb{N}^* , $2u_{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} ; \Leftrightarrow u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}.$$

On a donc pour tout n de \mathbb{N} ,

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}.$$

Soit $n \geq 1$, $\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; donc

$$\frac{\sqrt{2}}{2(1+\frac{1}{n})} \leq nu_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc par le théorème des

gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chapitre VI : DENOMBREMENTS, PROBABILITES ET LOIS DE PROBABILITE

EXERCICE 6.5

1) Tirages simultanés :

$$a) \binom{15}{3} = 455 \text{ tirages.}$$

$$b) \binom{6}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 20 + 4 + 14 = 34$$

tirages unicolores.

c) $6 \times 4 \times 5$ tirages tricolores.

$$d) \binom{15}{3} - \binom{9}{3} = 455 - 84 = 371 \text{ tirages}$$

contenant au moins une boule blanche.

2) Tirages successifs :

$$a) 15^3 = 3375 \text{ tirages.}$$

$$b) 6^3 + 5^3 + 4^3 \text{ tirages unicolores.}$$

c) Il faut tenir compte de l'ordre d'obtention des boules. On multiplie donc $6 \times 5 \times 4$ par le nombre de permutations qui est de $3!$.

d) $15^3 - 9^3 = 2646$ tirages contenant au moins une boule blanche.

EXERCICE 6.18

C'est un schéma de Bernoulli, la réponse est

$$\text{donc : } \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,16.$$

EXERCICE 6.20

1) La probabilité d'obtenir deux as est : $p = \frac{1}{20}$.

2) Pour $k = 0, 1, 2, 3$; p (« k fois deux as »)

$$= \binom{3}{k} \left(\frac{1}{20}\right)^k \left(\frac{19}{20}\right)^{3-k} \text{ (schéma de Bernoulli).}$$

On en déduit le tableau suivant :

k fois deux as	0	1	2	3
P_k	$\frac{6859}{8000}$	$\frac{1083}{8000}$	$\frac{57}{8000}$	$\frac{1}{8000}$
valeur de X	-5	10	50	100

L'espérance mathématique de X est donc :

$$E(X) = \frac{-5 \times 6859 + 10 \times 1083 + 50 \times 57 + 100}{8000} = \frac{-20515}{8000} \approx -2,56.$$

Chapitre VII : NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 7.10

$$z_1 = 3 + 3i \text{ donc } |z_1| = 3\sqrt{2}$$

En factorisant par $3\sqrt{2}$, on obtient :

$$z_1 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

De la même manière, on trouve

$$z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

En utilisant les règles de calcul sur les nombres complexes écrits sous forme trigonométrique, on obtient :

$$z_1 z_2 = 6\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$z_1 / z_2 = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$$

$$z_1^3 = 54\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

EXERCICE 7.12

Soit y un réel. $P(iy) = 0 \Leftrightarrow$

$$-y^3 i - 4y^2 i + 6y^2 + 13yi + 24y + 52i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y(y+4) = 0 \\ y^3 + 4y^2 - 13y - 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -4$$

La solution imaginaire de $P(z) = 0$ est donc $z = -4i$.

Donc, $P(z) = (z + 4i)(az^2 + bz + c)$ avec a, b et c des réels.

Par identification terme à terme, il vient $a = 1$; $b = -6$ et $c = 13$.

Le polynôme $z^2 - 6z + 13$ admet $3 + 2i$ et $3 - 2i$ comme racines. D'où $S = \{-4i ; 3 + 2i ; 3 - 2i\}$

EXERCICE 7.20

$$1) \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Donc, l'équation devient :}$$

$$2) z^2 - 3\sqrt{3}z + 9 = 0$$

On résout cette équation et on trouve $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ et

$$z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

3) $|z_1| = |z_2| = 3$. Donc, M1 et M2 sont sur le cercle de centre O et de rayon 3.

Chapitre VIII : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

EXERCICE 8.4

1) Les faces du tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux, on a donc :

$$\cos \widehat{MBA} = \cos \widehat{NBA} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \times AB \times BM \times \cos \widehat{MBA} = a^2 + x^2 - ax.$$

De même :

$$AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2 \times AB \times BN \times \cos \widehat{NBA} = a^2 + y^2 - ay.$$

$$\begin{aligned} \vec{AM} \cdot \vec{AN} &= (\vec{AB} + \vec{BM}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BN}) \\ &= (\vec{BM} - \vec{BA}) \cdot (\vec{BN} - \vec{BA}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \vec{BM} \cdot \vec{BN} - \vec{BA} \cdot \vec{BM} - \vec{BA} \cdot \vec{BN} + BA^2 \\ &= \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}ay + a^2 \\ &= \frac{a^2 + (a-x)(a-y)}{2}. \end{aligned}$$

2) Comme $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq a$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}(a-x)(a-y) \geq \frac{a^2}{2}.$$

3) $AM^2 = a^2 - x(a-x)$ et $AN^2 = a^2 - y(a-y)$; d'où $AM \leq a$ et $AN \leq a$.

$$\cos \widehat{MAN} = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{AN}}{AM \times AN} \geq \frac{1}{a^2} \times \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}; \text{ donc}$$

$\widehat{MAN} \leq \frac{\pi}{3}$, car $x \rightarrow \cos x$ est décroissante sur $[0; \pi]$.

EXERCICE 8.7

- 1) On introduit E' le projeté orthogonal de E sur $ABCD$.

On utilise le théorème de Pythagore dans les triangles $EE'A$, $EE'B$, $EE'C$ et $EE'D$.

On en déduit que $E'A = E'B = E'C = E'D$ donc E' est le centre du carré $ABCD$ et $E' = O$.

- 2) Introduisons dans la relation le point O , on obtient :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \\ = 4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \\ = 4OM^2 + 4a^2 \end{aligned}$$

(car $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$)

On recherche donc les points M tels que $4OM^2 + 4a^2 = ka^2$, soit $4OM^2 = (k-4)a^2$.
Si $k < 4$, alors $(k-4)a^2 < 0$, donc l'ensemble cherché est vide.

Si $k = 4$, alors $(k-4)a^2 = 0$, donc l'ensemble cherché est réduit au point O .

Si $k > 4$, alors $(k-4)a^2 > 0$, donc l'ensemble est une sphère de centre O et de rayon $\frac{a}{2}\sqrt{k-4}$.

EXERCICE 8.14

- 2) Soit J le milieu de $[AC]$, E_1 est donc la

droite de vecteur directeur \vec{DJ} qui passe par I .

- 3) E_2 est donc le plan contenant I et de

vecteur normal \vec{DJ} .

E_3 est donc la sphère de centre I et de rayon DJ .

Soit K le barycentre de $(B, 1)$, $(D, 1)$ et $(E, -1)$.

E_4 est l'ensemble des points M vérifiant $MK = MI$, c' est le plan médiateur de $[KI]$.

Chapitre IX : ARITHMETIQUE (SPECIALITE)

EXERCICE 9.1

Les restes possibles sont $0; 1; 2; 3; 4; 5$ et 6 .

Le reste de $m+n$ est le reste de $4+5 = 9$ dans la division euclidienne par 7 , c'est à dire 2 .

Le reste de $m.n$ est le reste de $4 \times 5 = 20$ dans la division euclidienne par 7 , c'est à dire 6 .

Le reste de m^2 est le reste de $4^2 = 16$ dans la division euclidienne par 7 , c'est à dire 2 .

Le reste de n^3 est le reste de $5^3 = 125$ dans la division euclidienne par 7 , c'est à dire 6 .

EXERCICE 9.6

1) $x.y = -6 = -2 \times 3$. L'ensemble des diviseurs de -6 est : $\{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$.

Les couples solutions sont donc :

$(-6; 1); (-3; 2); (-2; 3); (-1; 6); (1; -6); (2; -3); (3; -2); (6; -1)$.

EXERCICE 9.12

1) $15 \equiv 3 [12]$ donc $15^5 - 3^5 \equiv 3^5 - 3^5 [12]$.

EXERCICE 9.18

On a : $n^2 - 4n + 3 = (n-3)(n-1)$. Si $n = 4$, $n^2 - 4n + 3 = 3$ qui est premier. Sinon $n^2 - 4n + 3$ se décompose en un produit de facteurs supérieurs à 1 , donc n n'est pas premier.

EXERCICE 9.24

$\text{PGCD}(a, b) = 15$ donc $a = 15.a'$ et $b = 15.b'$, où a' et b' sont premiers entre eux.

$a+b = 15.(a'+b') = 150$ d'où $a'+b' = 10$ or $10 = 1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 5+5$.

Les seuls couples (a', b') premiers entre eux sont $(1; 9)$ et $(3; 7)$ d'où : $a = 15$ et $b = 135$ ou $a = 45$ et $b = 105$.

EXERCICE 9.30

- 1) $2^{12} - 1 = 4095$ et $2^8 - 1 = 255$.

$$\text{PGCD}(4095; 255) = 15 = 2^4 - 1.$$

$$2^{14} - 1 = 16383 \text{ et } 2^{10} - 1 = 1023.$$

$$\text{PGCD}(16383; 1023) = 3 = 2^2 - 1.$$

On peut deviner que :

$$\text{PGCD}(2^m - 1; 2^n - 1) = 2^d - 1 \text{ où } d = \text{PGCD}(m; n).$$

- 2) a) Si $n = mq + r$, avec $0 \leq r < m$, alors :

$$2^n - 1 = (2^{mq} - 1)2^r + 2^r - 1.$$

$$\text{Mais } 2^{m(q-1)} + 2^{m(q-2)} + \dots + 2^m + 1 = \frac{1 - 2^{mq}}{1 - 2^m}$$

(somme des termes d'une suite géométrique).

Donc : $2^n - 1 =$

$$(2^m - 1)(2^{m(q-1)} + 2^{m(q-2)} + \dots + 2^m + 1)2^r + 2^r - 1.$$

Comme $0 \leq r < m$, $0 \leq 2^r - 1 < 2^m - 1$, alors l'égalité précédente est la division euclidienne de $2^n - 1$ par $2^m - 1$ et le reste vaut $2^r - 1$.

- b) Soit $d = \text{PGCD}(m; n)$ et soit

$D = \text{PGCD}(2^m - 1; 2^n - 1)$. En décomposant l'algorithme d'Euclide, la suite des restes est

$2^{r_0} - 1, \dots, 2^{r_i} - 1$ avec, r_0, \dots, r_i les restes de la

division euclidienne de n par m , donc $D = 2^d - 1$.

Chapitre X : SECTIONS PLANES DE SURFACES (SPECIALITE)

EXERCICE 10.11

1) La section K de la surface (S) par le plan P d'équation $z = 3$ est la parabole d'équation : $y = x^2 + 3$ dans le plan d'équation $z = 3$ muni du repère (A, \vec{i}, \vec{j}) .

2) La section I de la surface (S) par le plan Q d'équation : $x = 2$ est la droite intersection des plans d'équations $x = 2$ et $y - 5z + 8 = 0$.

Une représentation paramétrique de I est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = \frac{8+t}{5} \end{cases} \quad \text{avec } t \text{ un réel.}$$

3) La section J de la surface (S) par le plan R d'équation : $y = 2$ est la droite d'intersection des plans d'équations $y = 2$ et $z = 2$.

4) La section L de la surface (S) par le plan S d'équation : $y = 5$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x, 5, z)$ avec $z = \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 1}$.

Chapitre XI : SIMILITUDES PLANES (SPECIALITE)

EXERCICE 11.13

1) a) Pour tout nombre complexe z non nul,

$$|z' + i| = |z| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} + i \right| = \left| \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{1 + i\bar{z}}{z} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow \frac{|i(-i + \bar{z})|}{|z|} = \frac{1}{|z|}$$

z est non nul, donc $|\bar{z}|$ est non nul, donc l'égalité est équivalente à :

$$|i|\bar{z} - i| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - i| = 1$$

$\bar{z} - i$ est le conjugué de $z + i$, or deux nombres complexes conjugués ont même module, donc l'égalité précédente équivaut à : $|z + i| = 1$.

b) Soit M un point du plan d'affixe z non nulle.

$$M \in C_1 \Leftrightarrow |z + i| = 1 \text{ \& } z \neq 0 \Leftrightarrow |z' + i| = |z|$$

$$\Leftrightarrow AM' = OM'$$

$\Leftrightarrow M'$ appartient à la médiatrice de [OA].

L'image C'_1 de C_1 par f est donc la médiatrice de [OA].

2) a) Pour tout nombre complexe z non nul,

$$|z' - i|^2 = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} - i \right|^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{|1 - i\bar{z}|^2}{|z|^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (1 - i\bar{z})(1 + iz) = 2z\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow -z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 = 2 \Leftrightarrow |z + i|^2 = 2.$$

b) Soit M un point du plan d'affixe z non nulle. $M \in C_2 \Leftrightarrow |z + i| = \sqrt{2}$.

Les deux membres étant positifs,

$$M \in C_2 \Leftrightarrow |z + i|^2 = 2 \Leftrightarrow |z' - i|^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow |z' - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow M'B = \sqrt{2}.$$

M' appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

L'image C'_2 de C_2 par f est donc le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

3) a) Pour tout point M d'affixe z , l'image M' de M par la similitude s a pour affixe z' tel que : $z' - (1 + i) = 2i(z - (1 + i))$, soit $z' = 2iz - i + 3$.

b) Pour tout point M d'affixe z non nulle, soit $M'(z')$ l'image de M par f et soit $M''(z'')$ l'image de M' par s . Pour tout nombre complexe z

non nul, on a : $z'' = 2iz' - i + 3 = \frac{2i + (3 - i)\bar{z}}{\bar{z}}$.

c) L'image de la droite C'_1 par s est une droite Γ_1 perpendiculaire à C'_1 , passant par le point R' image par s d'un point R de la droite C'_1 , par exemple $R(1; \frac{-1}{2})$; $R'(\frac{5}{2}; 1)$.

On trouve alors que Γ_1 est la droite d'équation $x = 4$. De même, l'image Γ_2 de la droite C'_2 par s est un cercle de centre B' image de B par s et de rayon $2\sqrt{2}$.

EXERCICE 11.19

1) \Re la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$;

l'écriture complexe d'une telle rotation est :

$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \beta$. Pour déterminer β , on écrit que A est le point invariant de la rotation soit :

$$a.i = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right).a.i + \beta \quad \text{d'où}$$

$$\beta = a.i \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)$$

Donc la rotation s'écrit

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot z + a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

Donc, pour avoir z_C , on applique cette rotation à z_B et en développant on trouve le résultat.

2) Trouvons une équation de (Δ) . La distance de A à (Δ) est α , la distance de O à (Δ) est donc $(a+\alpha)$. Donc une équation de (Δ) est $y = a + \alpha$.

Donc $C \in (\Delta)$, si son ordonnée (c'est à dire sa partie imaginaire) est égale à $(a + \alpha)$, soit

$$\frac{1}{2}(a + z_B \sqrt{3}) = a + \alpha \quad \text{soit}$$

$$z_B = \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2\alpha)$$

3) Trouvons AB^2 . O étant le projeté orthogonal de A sur (D), le triangle AOB est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AO^2 + OB^2$

Mais $OB = z_B$ et $OA = a$. En remplaçant on arrive au résultat.

4) ABC est équilatéral. La hauteur h d'un tel triangle est égale à $h = AB \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times h.$$

complétude

soutien scolaire

donner envie d'apprendre

www.completude.com



Cours particuliers
Stages en petits groupes
0 810 13 14 15
(prix appel local)

